

19. Jarecki S., Kiayias A., Krawczyk H. Round-optimal password-protected secret sharing and TPAKE in the password-only model, In: P. Sarkar, T. Iwata (eds.), *ASIACRYPT 2014, Part II, LNCS. Vol. 8874*, pp. 233-253. Springer, Heidelberg, December 2014.
20. Sampigethaya K., Poovendran R. A survey on mix networks and their secure applications, *Proceedings of the IEEE*, 2007, Vol. 94, No. 12, pp. 2142-2181.
21. Furukawa J., Mori K., Sako K. An implementation of a mix-net based network voting scheme and its use in a private organization, *Towards Trustworthy Elections: New Directions in Electronic Voting*. Springer, 2010, pp. 141-154.
22. Oluranti J., Olajide F., Ayo C. Network forensics tools in a mixed-network environment and the adoption of e-voting system in developing countries, *International Journal of Pharmacy and Technology*, 2016, Vol. 8, No. 4, pp. 23115-23118.

Дакуо Жан-Мишель Никодэмович – Национальный исследовательский университет ИТМО; e-mail: jeandakuo@mail.ru; г. Санкт-Петербург, Россия; тел.: +79217863122; факультет безопасности информационных технологий; аспирант.

Беззатеев Сергей Валентинович – Государственный университет аэрокосмического приборостроения; e-mail: bsv@guar.ru; г. Санкт-Петербург, Россия; тел.: +79045170951; кафедра информационной безопасности; зав. кафедрой.

Давыдов Вадим Валерьевич – ООО «КуАпп»; e-mail: vadimdavydov@outlook.com; г. Москва, Россия; криптограф-исследователь.

Иогансон Иван Дмитриевич – Национальный исследовательский университет ИТМО; e-mail: ivan.ioganson@yandex.ru; г. Санкт-Петербург, Россия; тел.: +79052278519; факультет безопасности информационных технологий; м.н.с.

Хуцаева Алтана Феликсовна – Государственный университет аэрокосмического приборостроения; e-mail: afkhutsaeva@itmo.ru; г. Санкт-Петербург, Россия; кафедра информационной безопасности; ассистент.

Dakuo Zhan-Mishel Nikodemovich – ITMO University; e-mail: jeandakuo@mail.ru; St. Petersburg, Russia; phone: +79217863122; Faculty of Secure Information Technologies; graduate student.

Bezzateev Sergey Valentinovich – State University of Aerospace Instrumentation; e-mail: bsv@guar.ru; St. Petersburg, Russia; phone: +79045170951; the Department of Information Security; head of the Department.

Davydov Vadim Valerievich – QApp LLC, Cryptographer-Researcher; e-mail: vadimdavydov@outlook.com; Moscow, Russia; cryptographer researcher.

Ioganson Ivan Dmitrievich – ITMO University; e-mail: ivan.ioganson@yandex.ru; St. Petersburg, Russia; phone: +79052278519; Faculty of Secure Information Technologies; junior scientific researcher.

Khutsaeva Altana Felixovna – State University of Aerospace Instrumentation; e-mail: afkhutsaeva@itmo.ru; St. Petersburg, Russia; the Department of Information Security; assistant.

УДК 681.5

DOI 10.18522/2311-3103-2026-4-212-226

А.Н. Каркищенко

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПОДДЕРЖАНИЯ СТРОЯ ПОДВОДНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ЗАДЕРЖКАХ НАВИГАЦИОННЫХ ДАННЫХ

Изучается влияние задержек в получении навигационной информации на поддержание строя подводных аппаратов в режиме «лидер-ведомые». Исследование опирается на предположение о градиентном принципе управления строем в процессе движения. Сложность задачи обусловлена неизвестностью траектории лидера, неполным знанием и нестационарностью среды, ошибками измерений. Полученные результаты не зависят от конфигурации аппаратов в строю. Показано, что достаточно исследовать влияние навигационных задержек на движение одного аппарата. Основные предположения: траектория движения лидера неизвестна; все взаимодействия между лидером и ведомыми аппаратами синхронизированы; лидер с определенной частотой передает свои координаты другим аппаратам; смещения ведомого аппарата от его места в строю могут

происходить в любом пространственном направлении. Предполагается, что между получением данных о положении лидера ведомый аппарат движется по прямой линии в направлении, выбор которого можно сделать многими способами. Рассматривается один из вариантов выбора такого направления и строится математическая модель движения. Ввиду того, что момент поступления информации неизвестен, применяется нелинейный закон для описания движения ведомого аппарата, учитывающий расстояние до целевой точки. Найдены оценки уклонения аппарата от целевой позиции в строе в каждый момент времени, а также усредненные оценки его уклонения на отрезке времени между получением навигационной информации и на всей траектории. Предложена и обоснована верхняя оценка интегрального уклонения, позволяющая дать простую интерпретацию факторов, влияющих на уклонение и нарушение строя.

Подводный аппарат; лидер-ведомые; поддержание строя; уклонение от позиции; верхние оценки.

A.N. Karkishchenko

QUANTITATIVE ESTIMATES OF THE ERROR IN MAINTAINING THE FORMATION OF UNDERWATER VEHICLES WITH DELAYS IN NAVIGATION DATA

The influence of delays in receiving navigation information on maintaining a formation of underwater vehicles in the leader-followers mode is studied. The study is based on the assumption of a gradient principle of formation control during movement. The complexity of the problem is due to the unknown trajectory of the leader, incomplete knowledge and non-stationarity of the environment, and measurement errors. The obtained results are independent of the configuration of vehicles in the formation. It is shown that it is sufficient to study the influence of navigation delays on the motion of a single vehicle. Key assumptions: the trajectory of the leader is unknown; all interactions between the leader and follower vehicles are synchronized; the leader transmits its coordinates to the other vehicles at a certain frequency; displacements of the follower from its position in the formation can occur in any spatial direction. It is assumed that between receiving data on the leader's position, the follower vehicle moves in a straight line in a direction that can be chosen in many ways. One option for choosing such a direction is considered, and a mathematical model of the motion is constructed. Since the moment of information receipt is unknown, a nonlinear law is used to describe the follower's motion, taking into account the distance to the target point. Estimates of the vehicle's deviation from the target position in the formation at each moment in time are found, as well as average estimates of its deviation over the time interval between receiving navigation information and over the entire trajectory. An upper bound for the integral deviation is proposed and substantiated, allowing for a simple interpretation of the factors influencing deviation and formation breakdown.

Underwater vehicle; leader-followers; formation maintenance; position evasion; upper estimates.

Введение. Развитие подводной робототехники делает особенно актуальным групповое применение автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) для наблюдения и мониторинга морских акваторий, исследования рельефа дна, инспекции искусственных и природных объектов, а также решения поисковых и специальных прикладных задач [1]. Такие комплексы позволяют повысить пространственный охват наблюдаемой области, обеспечить функциональное распределение ролей между аппаратами и повысить общую устойчивость выполнения миссии по сравнению с использованием одиночного подводного аппарата [2, 3]. Вместе с тем расширение практики группового применения АНПА сопровождается возрастанием требований к точности навигации, устойчивости управления и согласованности движения аппаратов в общей системе координат [2, 4].

Одной из ключевых задач группового управления является поддержание заданного строя при движении вдоль требуемой траектории [4, 5]. Под строем АНПА понимается пространственно организованная группа подводных аппаратов, совместно функционирующих для достижения общей цели [3]. При этом управление группой предполагает не только удержание предписанной геометрической конфигурации, но и планирование траектории всей группы и отдельных аппаратов, согласование скоростей и направлений движения, а также адаптацию к внешним ограничениям и возмущениям среды [3, 4, 6].

Специфика подводной среды существенно усложняет решение задачи формирования и поддержания строя. В отличие от наземных и воздушных робототехнических систем, для АНПА характерны отсутствие прямого доступа к сигналам навигационных спутниковых систем, ограниченные возможности радиосвязи, зависимость качества навигации от гидроакустических измерений, а также влияние течений, рельефа дна, неоднородности среды и подвижных препятствий [3, 7]. Именно поэтому задачи управления строем АНПА тесно связаны с проблемами неполноты информации, запаздывания измерений и ограниченной пропускной способности каналов связи [3].

В настоящее время в задачах управления строем подводных аппаратов выделяются несколько базовых подходов: архитектура «лидер–ведомые» [8], ситуационный подход [9], методы виртуальной структуры [10], а также распределённые и схемы кооперативного управления [3, 4]. Подход «лидер–ведомые» удобен из-за простоты организации движения группы и задания строя относительно аппарата-лидера, однако он чувствителен к ошибкам навигации лидера и к нарушениям каналов передачи информации [3, 11, 12]. Подход виртуальной структуры позволяет описывать группу как единый пространственный объект с фиксированной геометрией [13], однако распределённые схемы обеспечивают большую гибкость и живучесть группы при отказах отдельных аппаратов [4, 14].

Значительное число работ посвящено использованию методов искусственных потенциальных полей, градиентных алгоритмов и их модификаций для локальной навигации и формирования строя мобильных объектов, включая подводные аппараты [15–18]. Данные методы позволяют единообразно учитывать притяжение к целевой конфигурации, взаимное пространственное согласование аппаратов и уклонение от препятствий [6, 13, 19].

Обзоры последних лет показывают, что исследования в области формирования строя АНПА развиваются по нескольким взаимосвязанным направлениям: обеспечение устойчивости геометрии строя, координация движения при ограничениях связи, согласование траекторий в трёхмерном пространстве и повышение робастности по отношению к неопределённостям модели и внешним возмущениям [3, 4]. При этом всё большее внимание уделяется не только формированию законов управления, но и оценке влияния сетевых и навигационных ограничений, включая задержки передачи данных и дискретность обмена сообщениями на качество поддержания строя [11, 20].

Особое значение имеют работы, в которых рассматривается управление строем нескольких АНПА при ограничениях на коммуникацию и запаздывании информации. В частности, известно, что задержки и пропуски данных приводят к ухудшению точности взаимного позиционирования и могут вызывать заметное искажение желаемой конфигурации группы [11]. Для подводных систем эта проблема особенно существенна, поскольку задержка возникает не только в линиях связи, но и на уровне получения и обработки навигационной информации, что непосредственно влияет на ошибки поддержания строя вдоль всей траектории движения [3, 7].

Следует отметить то обстоятельство, что во многих работах основное внимание уделяется формированию управления группой АНПА, тогда как количественная оценка погрешности поддержания строя на участках траектории изучена существенно слабее [3, 4]. Между тем именно такие оценки представляют практический интерес при проектировании групп АНПА, поскольку позволяют установить допустимые требования к навигационным средствам, частоте обновления данных и скорости движения [3, 7]. Для неоднородных по динамике групп данная проблема становится ещё более сложной и значимой [20].

В ряде современных публикаций рассматриваются адаптивные, робастные и интеллектуальные методы формирования строя, включая сочетание потенциальных полей, виртуальных структур и различных методов обучения [11]. Эти исследования демонстрируют расширение возможностей группового управления в сложной обстановке, однако не снимают вопроса об оценках точности поддержания строя при наличии навигационных задержек. Поэтому задача построения количественных оценок погрешности поддержания строя, зависящих от величины задержек и скорости движения аппаратов, сохраняет самостоятельную теоретическую и прикладную значимость [3].

В настоящей работе в рамках подхода «лидер–ведомый» изучается влияние задержек навигационных данных на поддержание строя АНПА. Исследование опирается на градиентный принцип формирования строя в процессе группового управления движением подводных аппаратов и продолжает развитие подхода, основанного на вероятностной природе потенциального поля [21]. В отличие от работ, в которых основное внимание сосредоточено на конструктивном синтезе управления [11, 13, 14, 19, 22], здесь акцент делается на анализе точности поддержания строя и на получении количественных оценок погрешности, применимых к различным пространственным конфигурациям расположения аппаратов.

Представляемые результаты ориентированы на выявление зависимости точности поддержания строя от величины задержек навигационной информации и параметров движения группы. Такой анализ имеет важное значение для обоснования требований к навигационному и информационному обеспечению, а также режимам функционирования группы АНПА при выполнении практических миссий в подводной среде [3, 7].

Основные предположения и постановка задачи. Будем рассматривать подход к управлению группой подводных аппаратов, основанный на принципе «лидер–ведомые». Под *строем* будем понимать виртуальную пространственную структуру, образованную точками – позициями подводных аппаратов, которая полностью определяется положением и ориентацией АНПА-лидера, а также относительными позициями ведомых аппаратов. При этом считается, что лидер группы движется по заданной неизвестной траектории с почти постоянной скоростью v_L , которая лишь на некоторых участках может незначительно меняться. Относительно него формируется реальный строй. Ведомые АНПА имеют назначенные им заранее позиции относительно лидера в виртуальном строе, которые они должны по возможности максимально точно занимать в процессе движения. Будем считать, что динамические и кинематические характеристики лидера и остальных АНПА одинаковы. При этом известны максимальная $v_{\max}$ и минимальная $v_{\min}$ скорости подводных аппаратов, которые могут ими достигаться при движении в неподвижной воде. Ставится задача исследовать влияние частоты обновления навигационных данных на точность поддержания строя.

Основные предположения состоят в следующем:

- ♦ лидер и ведомые аппараты оснащены средствами обнаружения препятствий, что позволяет им двигаться независимо;
- ♦ все взаимодействия между лидером и ведомыми АНПА синхронизированы во времени, т.е. все подводные аппараты получают информацию о текущем положении лидера одним пакетом и обновляют свои параметры пространственного состояния почти одновременно;
- ♦ лидер с определенной частотой передает собственные координаты другим АНПА. Дальность передачи считаем достаточной для ее получения аппаратами, входящими в состав группы;
- ♦ вызванное неблагоприятными факторами смещение ведомого АНПА от его места в строе может происходить в любом пространственном направлении и на любое расстояние в пределах радиуса информационной связи с лидером.

Далее оценку уклонения ведомого АНПА от его позиции в строе будем проводить для одного аппарата, так как уклонение для всей группы легко агрегируется с помощью любой усредненной метрики в пространстве, размерность которого определяется числом ведомых подводных аппаратов в группе.

Место в строе, которое должно быть занято аппаратом в строе, будем называть *позицией*. Считаем, что АНПА в точности занимает свою позицию в строе, если координаты его центра тяжести совпадают с координатами назначенного места в строе, а ориентация его продольной оси сонаправлена с осью лидера.

Введем обозначения для величин, характеризующих пространственное положение произвольного АНПА в некоторой неподвижной системе координат $OXYZ$ в момент времени t :

$P^L(t) = (x^L(t), y^L(t), z^L(t))$ – текущие абсолютные координаты позиции в строе;

$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ – текущие абсолютные координаты АНПА;

$\|P^L(t) - P(t)\| = \sqrt{(x^L(t) - x(t))^2 + (y^L(t) - y(t))^2 + (z^L(t) - z(t))^2}$ – евклидово расстояние (уклонение) между позицией в строе и положением АНПА в момент t . Интегральную оценку уклонения на всей траектории за период $[0, T]$ будем характеризовать с помощью усредненного евклидова расстояния (уклонения)

$$d = \frac{1}{T} \int_0^T \|P^L(t) - P(t)\| dt.$$

Траектория $P^L(t)$ позиции в строе полностью определяется траекторией движения лидера и по условию ведомым АНПА априори неизвестна. Траектории ведомых аппаратов также зависят от траектории лидера и определяются только в процессе движения. Отмеченные выше особенности гидроакустической связи приводят к задержкам и нерегулярности поступления информации о координатах положения лидера. Из этого следует, что аналитические выражения для $P^L(t)$ и $P(t)$, описывающие траектории позиции в строе и остальных аппаратов, отсутствуют. Доступными оказываются только дискретно и в общем случае нерегулярно поступающие сообщения о координатах лидера. Подобные ограничения на поступление навигационных данных ограничивают возможности эффективного поддержания строя и обеспечение безопасности группы в целом.

Будем предполагать, что данные о нахождении лидера поступают в моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_n$, в которые ведомые АНПА получают информацию о меняющихся координатах $P^L(t_0), P^L(t_1), \dots, P^L(t_n)$ позиции в строе. Ведомые аппараты обладают также информацией о координатах своего собственного положения. Ввиду этого для усредненного евклидова расстояния можно записать:

$$d = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|P^L(t) - P(t)\| dt + \frac{1}{T} \int_{t_n}^T \|P^L(t) - P(t)\| dt.$$

Следует отметить еще раз, что на каждом из интервалов функции $P^L(t)$ и $P(t)$ определяются в общем случае разными выражениями. Далее введем простое допущение, что на каждом участке времени $[t_k, t_{k+1})$ АНПА движется по прямой линии от точки $P(t_k)$, в которой он находится в момент t_k , в направлении, выбор которого можно сделать многими способами. Ниже рассмотрим одну из таких возможностей. При этом за координаты точки, в которой ведомый АНПА окажется в момент времени t_{k+1} , следует принять $P(t_{k+1})$. Эта точка будет отправной для следующего прямолинейного участка движения. Понятно, что положение точки $P(t_{k+1})$ зависит от направления и скорости движения подводного аппарата вдоль выбранной прямолинейной траектории.

Задача состоит в получении интегральной характеристики уклонения аппарата от его позиции на $[0, T]$. Выражение должно зависеть от параметра Δt , определяющего частоту обновления данных. Для этого необходимо получить выражения, задающие траектории движения АНПА на каждом участке времени.

Закон движения ведомого подводного аппарата. Предположим, что как только в момент времени t_k становится известно положение лидера $P^L(t_k)$ в строе, ведомый АНПА начинает прямолинейное движение в эту точку из точки $P(t_k)$ с постоянной на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ скоростью v_k . Это движение описывается уравнением: $P(t) = P(t_k) + a_k^0 v_k (t - t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$. В этом выражении a_k^0 – единичный направляющий

вектор прямолинейной траектории (рис. 1), в качестве которого можно взять вектор $a_k^0 = \frac{P^L(t_k) - P(t_k)}{\|P^L(t_k) - P(t_k)\|}$. Считаем, что в начальный момент времени значения $P^L(t_0)$ и $P(t_0)$ известны. Отметим еще раз, что на каждом временном отрезке скорость ведомых подводных аппаратов постоянная, но на каждом отрезке она может быть своя.

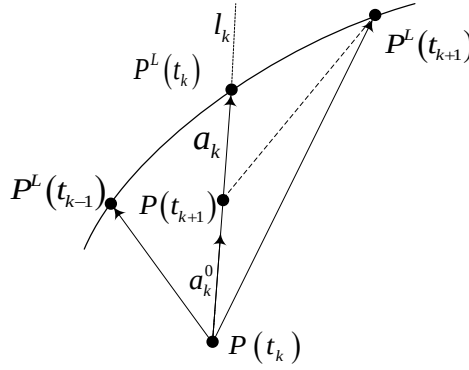


Рис. 1. Траектория движения АНПА

Координаты позиции полностью определяются координатами лидера. Поэтому будем иногда для простоты обозначать через $P^L(t)$ и координаты лидера. В момент t_{k+1} АНПА будет находиться в точке $P(t_{k+1}) = P(t_k) + a_k^0 v_k (t_{k+1} - t_k)$. В это время позиция в строе будет иметь координаты $P^L(t_{k+1})$, а расстояние между позицией в строе и АНПА будет равно:

$$\|P^L(t_{k+1}) - P(t_{k+1})\| = \|P^L(t_{k+1}) - P(t_k) - a_k^0 v_k (t_{k+1} - t_k)\|.$$

Условие, при котором АНПА после движения на отрезке сблизится со своей позицией в строе, выражается неравенством $\|P^L(t_k) - P(t_k)\| > \|P^L(t_{k+1}) - P(t_{k+1})\|$. Надо, чтобы с ростом k это расстояние как можно быстрее убывало, и соответственно, ведомый АНПА как можно быстрее «догонял» свою позицию.

Пусть момент t_{k+1} известен и $t_{k+1} - t_k = \Delta t_k$. Скорость v_k^* равномерного движения, при которой аппарат к моменту t_{k+1} попадет в точку $P^L(t_k)$ должна быть равна

$$v_k^* = \frac{\|P^L(t_k) - P(t_k)\|}{\Delta t_k}.$$

Однако, учитывая ограничения $v_{\min} \leq v_k \leq v_{\max}$, скорость v_k на отрезке времени $[t_k, t_{k+1})$ и положение АНПА в момент t_{k+1} должны определяться следующим образом:

$$v_k = \begin{cases} v_{\max}, & \text{если } v_k^* \geq v_{\max}, \\ v_k^*, & \text{если } v_{\min} < v_k^* < v_{\max}, \\ v_{\min}, & \text{если } v_{\min} \geq v_k^*. \end{cases} \quad P(t_{k+1}) = \begin{cases} P(t_k) + a_k^0 v_{\max} \Delta t_k, & \text{если } v_k^* \geq v_{\max}, \\ P^L(t_k), & \text{если } v_{\min} < v_k^* < v_{\max}, \\ P(t_k) + a_k^0 v_{\min} \Delta t_k, & \text{если } v_{\min} \geq v_k^*. \end{cases}$$

В первом случае аппарат к моменту t_{k+1} , очевидно, не достигнет точки $P^L(t_k)$, в то время как в третьем случае «проскочит» ее.

Однако точный момент времени t_{k+1} , как правило, неизвестен. В этом случае следует использовать не постоянную скорость, а ввести некоторый нелинейный закон $v(t)$ изменения скорости ведомого АНПА, при котором он вначале максимально быстро дви-

жется по направлению к точке $P^L(t_k)$, а затем по мере приближения к ней так же быстро, но плавно уменьшает скорость вплоть до $v_{\min}$. В этом случае закон движения АНПА будет описываться выражением

$$P(t) = P(t_k) + a_k^0 \int_{t_k}^t v(\tau) d\tau = P(t_k) + a_k^0 s(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (1)$$

где a_k^0 имеет тот же смысл, что и выше, а $s(t)$ – путь, пройденный ведомым аппаратом на k -м участке движения к моменту t . В качестве такого закона целесообразно взять выражение, которое было получено и использовалось в [13]:

$$v(t) = v(\rho(t)) = v_{\max} - (v_{\max} - v_{\min}) e^{-\gamma \rho(t)}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (2)$$

где γ – параметр, влияющий на скорость снижения скорости при приближении АНПА к своей позиции $P^L(t_k)$, $\rho(t)$ – расстояние от АНПА до целевой позиции в строе $P^L(t_k)$ в произвольный момент времени t . При достаточно большом расстоянии до целевой точки и большом значении параметра γ аппарат будет стартовать от начальной точки $P(t_k)$ со скоростью близкой к $v_{\max}$, экспоненциально уменьшающейся вплоть до $v_{\min}$. Еще раз укажем, что значение t_{k+1} неизвестно.

Найдем явное выражение для $s(t)$ на участке $[t_k, t)$. Подводный аппарат движется прямолинейно из точки $P(t_k)$ в точку $P^L(t_k)$. Как следует из (2), по мере приближения АНПА к целевой позиции его скорость уменьшается до $v_{\min}$. Введем обозначение $W_1(t_k) = P^L(t_k) - P(t_k)$. Тогда $\rho(t) = \|W_1(t_k)\| - s(t)$ (рис. 2).

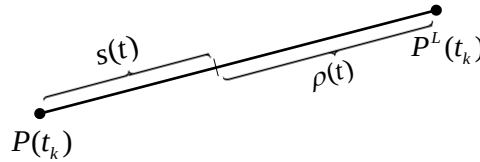


Рис. 2. Расстояния $\rho(t)$ и $s(t)$

Поскольку $v(t) = \frac{ds}{dt}$, то можем записать $\frac{ds}{dt} = v_{\max} - (v_{\max} - v_{\min}) e^{-\gamma(\|W_1(t_k)\| - s(t))}$. Решая это уравнение с начальным условием $s(t_k) = 0$, получаем:

$$\ln \left| v_{\max} e^{-\gamma s(t)} - (v_{\max} - v_{\min}) e^{-\gamma \|W_1(t_k)\|} \right| = -\gamma v_{\max} t + \ln C, \quad (3)$$

где произвольная постоянная взята для удобства в виде $\ln C$. Для отыскания постоянной C воспользуемся начальным условием $s(t_k) = 0$. В результате получим $\ln \left| v_{\max} - (v_{\max} - v_{\min}) e^{\gamma \|W_1(t_k)\|} \right| e^{\gamma v_{\max} t_k} = \ln C$. Подставим найденное значение $\ln C$ в (3), после преобразований получим:

$$\frac{\left| v_{\max} e^{-\gamma s(t)} - (v_{\max} - v_{\min}) e^{-\gamma \|W_1(t_k)\|} \right|}{\left| v_{\max} - (v_{\max} - v_{\min}) e^{\gamma \|W_1(t_k)\|} \right|} = e^{-\gamma v_{\max} (t - t_k)}.$$

Можно несколько упростить запись этого выражения, если ввести обозначение $\alpha = 1 - \frac{v_{\min}}{v_{\max}}$. Тогда $\frac{e^{-\gamma s(t)} - \alpha e^{-\gamma \|W_1(t_k)\|}}{1 - \alpha e^{-\gamma \|W_1(t_k)\|}} = e^{-\gamma v_{\max}(t-t_k)}$. Отсюда находим искомую зависимость на $[t_k, t_{k+1})$: $s(t) = -\frac{1}{\gamma} \ln \left[\alpha e^{-\gamma \|W_1(t_k)\|} + (1 - \alpha e^{-\gamma \|W_1(t_k)\|}) e^{-\gamma v_{\max}(t-t_k)} \right]$ или

$$s(t) = \|W_1(t_k)\| - \frac{1}{\gamma} \ln \left[\alpha + (e^{\gamma \|W_1(t_k)\|} - \alpha) e^{-\gamma v_{\max}(t-t_k)} \right]. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что функция $s(t)$ всегда неотрицательна. Таким образом, с учетом обозначения $W_1(t_k) = P^L(t_k) - P(t_k)$, получаем, что выражение (1) для закона движения принимает вид: $P(t) = P(t_k) + \frac{W_1(t_k)}{\|W_1(t_k)\|} s(t)$. Функция $s(t)$ на отрезке времени $[0, T]$ является псевдопериодической в том смысле, что $s(t_k) = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$, и на каждом участке $[t_k, t_{k+1})$ она повторяет одну и ту же функциональную зависимость, отличаясь лишь длиной $t_{k+1} - t_k$ этого участка времени и, возможно, «высотой», которая определяется параметром $W_1(t_k)$. Схематично вид этой функции показан на рис. 3. На этом рисунке функция $s(t)$ задана на отрезке $[0, 16]$, который распадается на участки $[0, 3)$, $[3, 5)$, $[5, 11)$, $[11, 16]$. Остальные параметры имеют следующие значения: $\gamma = 1.4$, $v_{\min} = 0.5$ м/с, $v_{\max} = 5$ м/с (и соответственно, $\alpha = 0.9$), $W_1(3) = W_1(5) = W_1(11) = W_1(16) = 4$.

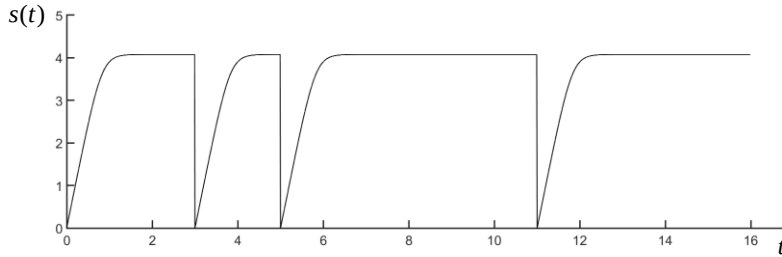


Рис. 3. Вид функции $s(t)$ на отрезке $[0, T]$

Линейная экстраполяция траектории лидера. Следующая задача состоит в том, чтобы найти аналитическое выражение для разности между положением ведомого АНПА и его позицией в строе. Эта позиция непрерывно движется в соответствии с законом движения лидера, который в свою очередь неизвестен. Поэтому необходимо получить приближенное выражение для траектории этой позиции. Это можно сделать на основании экстраполяции траектории лидера на основе информации о его движении в предыдущий период. Траектория лидера неизвестна, но в силу предположений его скорость v_L все время постоянна или меняется незначительно так, что ее можно считать постоянной. Так как по условию все АНПА имеют одинаковые характеристики, то $v_{\min} \leq v_L \leq v_{\max}$.

Для правдоподобной оценки уклонения аппарата от его позиции будем считать, что лидер на каждом отрезке времени между получением информации о его местоположении движется прямолинейно. Чем меньше задержки в передаче навигационной информации, тем меньше на этом участке будет расхождение гипотетической прямолинейной траектории лидера с реальной. Это утверждение становится еще более обоснованным в виду инерционности движения в водной среде. Время t_{k+1} и местоположение $P^L(t_{k+1})$ лидера неизвестны, поэтому сделаем дополнительные предположения и допущения.

Будем считать, что на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ лидер движется прямолинейно в том же направлении, что и его движение на предыдущем (уже известном) участке, т.е. будем использовать линейную экстраполяцию траектории. Иными словами, считаем, что лидер движется по прямой линии из точки $P^L(t_k)$ в направлении, задаваемом единичным вектором $b_{k-1}^0 = \frac{P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})}{\|P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})\|}$, причем с постоянной скоростью $v = \frac{\|P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})\|}{t_k - t_{k-1}}$, которая равна средней скорости лидера на предыдущем участке движения (рис. 4).

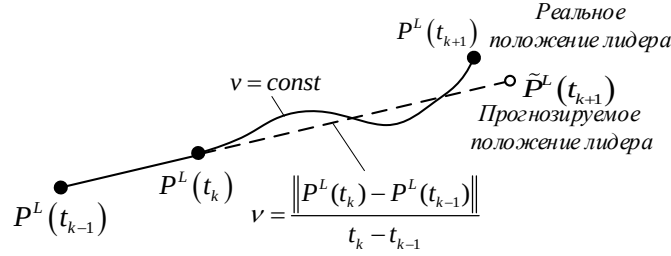


Рис. 4. Линейная аппроксимация движения лидера

Экстраполированное движение лидера (виртуальной позиции) на участке времени $[t_k, t_{k+1})$ описывается следующим уравнением:

$$P^L(t) = P^L(t_k) + b_{k-1}^0 v \cdot (t - t_k) = P^L(t_k) + (P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})) \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}}.$$

Поэтому прогнозируемым положением $\tilde{P}^L(t_{k+1})$ лидера в момент t_{k+1} будет $\tilde{P}^L(t_{k+1}) = P^L(t_k) + (P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})) \frac{t_{k+1} - t_k}{t_k - t_{k-1}}$, и, если, например, $t_{k+1} - t_k \approx t_k - t_{k-1}$, то $\tilde{P}^L(t_{k+1}) \approx 2P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})$.

Реальное положение $P^L(t_{k+1})$ позиции (лидера) в момент t_{k+1} будет, вообще говоря, отличаться от прогнозируемого $\tilde{P}^L(t_{k+1})$ (см. рис. 3). Но в момент t_{k+1} становится известным относительно точное реальное положение лидера. Именно эта информация (а не прогнозированная!) будет использоваться для дальнейших расчетов в процессе движения группы аппаратов.

Расстояние между аппаратом и его позицией в каждый момент времени. Расстояние между ведомым АНПА и его позицией в строю в момент времени $t \in [t_k, t_{k+1})$ равно:

$$\|P^L(t) - P(t)\| = \left\| P^L(t_k) + (P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})) \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}} - P(t_k) - \frac{P^L(t_k) - P(t_k)}{\|P^L(t_k) - P(t_k)\|} s(t) \right\|.$$

С учетом принятого обозначения $P^L(t_k) - P(t_k) = W_1(t_k)$, запишем:

$$\|P^L(t) - P(t)\| = \left\| W_1(t_k) + (P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})) \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}} - \frac{W_1(t_k)}{\|W_1(t_k)\|} s(t) \right\|.$$

Наконец, вводя дополнительные обозначения $\Delta t_{k-1} = t_k - t_{k-1}$ и $W_2(t_{k-1}) = P^L(t_k) - P^L(t_{k-1})$ (рис. 5), получаем:

$$\|P^L(t) - P(t)\| = \left\| W_2(t_{k-1}) \frac{t - t_k}{\Delta t_{k-1}} + W_1(t_k) \left(1 - \frac{s(t)}{\|W_1(t_k)\|} \right) \right\|. \quad (5)$$

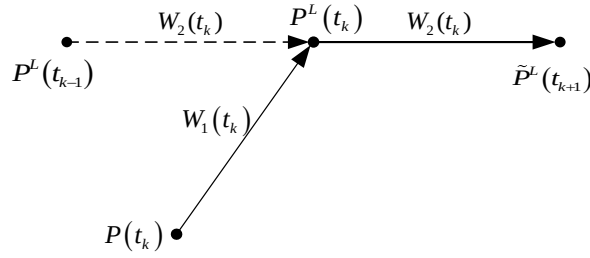


Рис. 5. Векторы движения и прогнозируемые положения лидера

Применим к последнему выражению неравенство треугольника:

$$\|P^L(t) - P(t)\| \leq \|W_2(t_{k-1})\| \frac{t - t_k}{\Delta t_{k-1}} + \|W_1(t_k)\| - s(t).$$

Эта формула тем точнее, чем меньше угол между направлениями движения АНПА и лидера. В пределе, когда направления движения совпадают, т.е. векторы W_1 и W_2 коллинеарны, получается равенство. Поскольку ведомый АНПА все время находится в режиме «догнать свою позицию в строю», то следует ожидать, что указанный угол действительно будет на всех временных участках небольшим. Следующее утверждение дает верхнюю оценку для расстояния между лидером и ведомым аппаратом.

Утверждение. $\|W_1(t_k)\| \leq (v_L + v_{\min})\Delta t_{k-1}$, где $\Delta t_{k-1} = t_k - t_{k-1}$.

Доказательство. Предположим, что в момент $t = t_{k-1}$ ведомый аппарат находится в малой окрестности точки $P^L(t_{k-1})$. Гипотетически предположим ситуацию, что в этот же момент $t = t_{k-1}$ лидер меняет свою траекторию и движется прямолинейно в направлении ведомого аппарата. Это значит, что за время $\Delta t_{k-1} = t_k - t_{k-1}$ он переместится на расстояние $v_L \Delta t_{k-1}$, перейдя в точку $P^L(t_k)$.

В свою очередь ведомый аппарат по сделанному выше предположению будет двигаться в противоположном по отношению к лидеру направлении. Поскольку после прохождения точки $P^L(t_{k-1})$ он может двигаться только с минимальной скоростью $v_{\min}$, то его максимально возможное удаление от точки $P^L(t_{k-1})$ будет гарантированно ограничено величиной $v_{\min} \Delta t_{k-1}$ (на самом деле меньшей). Точка, в которую он переместится, будет точкой $P(t_k)$.

Так как при сделанном предположении лидер и ведомый аппарат перемещаются вдоль одной и той же прямой линии, но в противоположных направлениях, то из построения следует, что максимально возможное расстояние, на которое лидер и ведомый подводный аппарат могут отдалиться друг от друга на отрезке времени $\Delta t_{k-1} = t_k - t_{k-1}$, равно $P^L(t_k) - P(t_k) = v_L \Delta t_{k-1} + v_{\min} \Delta t_{k-1} = (v_L + v_{\min})\Delta t_{k-1}$. Из этого следует справедливость доказываемого неравенства. ■

Усредненное отклонение аппарата от его позиции на отрезке времени и на всей траектории. Найдем усредненную оценку для отклонения $d([t_k, t_{k+1}))$ АНПА от целевой позиции на промежутке времени $[t_k, t_{k+1})$. Для этого необходимо вычислить интеграл на промежутке $[t_k, t_{k+1}]^{**}$ от функции, задающей расстояние между АНПА и его позицией в

**) Переход к интегралу позволяет рассматривать вместо промежутков (полуинтервалов) $[t_k, t_{k+1})$ замкнутые промежутки (отрезки) $[t_k, t_{k+1}]$.

каждый момент времени, и поделить найденное значение на $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, т.е.

$d([t_k, t_{k+1}]) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|P^L(t) - P(t)\| dt$. Применяя найденное выше неравенство для $\|P^L(t) - P(t)\|$, запишем:

$$d([t_k, t_{k+1}]) \leq \|W_1(t_k)\| + \|W_2(t_{k-1})\| \frac{\Delta t_k}{2\Delta t_{k-1}} - \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} s(t) dt.$$

После подстановки в правую часть выражения (4) для функции $s(t)$ получаем:

$$d([t_k, t_{k+1}]) \leq \|W_2(t_{k-1})\| \frac{\Delta t_k}{2\Delta t_{k-1}} + \frac{1}{\gamma \Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ln \left[\alpha + \left(e^{\gamma \|W_1(t_k)\|} - \alpha \right) e^{-\gamma v_{\max}(t-t_k)} \right] dt.$$

Будем далее для простоты считать, что $\Delta t_k = \Delta t$ для всех k . В этом случае $t_k = k\Delta t$. Для случая равных промежутков доказанное выше Утверждение принимает вид: $\|W_1(t_k)\| \leq (v_L + v_{\min})\Delta t = \|W_1\|$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Кроме того, поскольку по условию скорость лидера считается постоянной, то $\|W_2(t_k)\| = v_L \Delta t = \|W_2\|$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Усредненная оценка расстояния не зависит от номера k и одинакова для всех промежутков равной длины, но зависит от длины этого промежутка, т.е. $d([t_k, t_{k+1}]) = d(\Delta t)$. Поэтому можно записать:

$$d([t_k, t_{k+1}]) = d(\Delta t) \leq \frac{1}{2} \|W_2\| + \frac{1}{\gamma \Delta t} \int_0^{\Delta t} \ln \left[\alpha + \left(e^{\gamma \|W_1\|} - \alpha \right) e^{-\gamma v_{\max} t} \right] dt.$$

Точность параметров, появляющихся в расчетах усредненных уклонений, не является критически важной, так как градиентный метод, лежащий в основе управления группой АНПА, будет их корректировать в процессе вычислений. В частности, можно считать, что временные отрезки лишь примерно равны, т.е. $\Delta t_k \approx \Delta t$ для всех k . Однако дискретно поступающие навигационные данные, напротив, существенно влияют на окончательные результаты, поскольку они содержат информацию о реальных траекториях подводных аппаратов.

Будем для простоты считать, что для некоторого n в точности выполняется равенство $T = n\Delta t$. Тогда для получения интегральной оценки d уклонения ведомого АНПА от его позиции на всей траектории движения за лидером необходимо просуммировать все уклонения и усреднить сумму по длине траектории. Учитывая, что уклонения по условию не зависят от номера промежутка k , интегральная оценка d уклонения на всей траектории будет совпадать с оценкой уклонения на любом временном отрезке длины Δt , Иными словами

$$d = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t d(\Delta t) \leq \frac{1}{2} \|W_2\| + \frac{1}{\gamma \Delta t} \underbrace{\int_0^{\Delta t} \ln \left[\alpha + \left(e^{\gamma \|W_1\|} - \alpha \right) e^{-\gamma v_{\max} t} \right] dt}_I. \quad (6)$$

Эта формула дает хорошее приближение к точному значению. Однако она затруднительна для простой интерпретации. Поэтому проведем дополнительные оценки правой части, заведомо потеряв в точности ради более понятной интерпретируемости. Для этого рассмотрим слагаемые в правой части. Как было показано выше $\|W_2\| = v_L \Delta t$. Рассмотрим теперь интеграл I . В силу Утверждения для равных промежутков: $\|W_1\| = (v_L + v_{\min})\Delta t$. Поскольку на отрезке $[0, \Delta t]$ всегда выполняется неравенство $e^{-\gamma v_{\max} t} \leq 1$, то $\ln \left[\alpha + \left(e^{\gamma \|W_1\|} - \alpha \right) e^{-\gamma v_{\max} t} \right] \leq \gamma (v_L + v_{\min}) \Delta t$ и, значит, $I \leq \gamma (v_L + v_{\min}) (\Delta t)^2$. С учетом этого получаем

$$d \leq \frac{1}{2} v_L \Delta t + (v_L + v_{\min}) \Delta t = \left(\frac{3}{2} v_L + v_{\min} \right) \Delta t. \quad (7)$$

Данная оценка интеграла является грубой, и ее точность вначале быстро падает с ростом Δt , хотя в асимптотике и стабилизируется. Тем не менее, она позволяет сделать полезные качественные выводы. Во-первых, надо отметить, что слагаемое $v_{\min} \Delta t$ определяется параметром $v_{\min}$, задающим минимально возможную скорость движения подводного аппарата. Эта величина является технической характеристикой АНПА, на которую нет возможности влиять в процессе выполнения задания. Поскольку по физическому смыслу скорость $v_{\min}$ маленькая (можно считать, что она на порядок меньше, чем $v_{\max}$, и с большой вероятностью, чем v_L), второе слагаемое не вносит заметного вклада в верхнюю оценку уклонения на траектории. Основное влияние на количественную оценку сохранения строя в процессе движения АНПА помимо задержек вносит первое слагаемое, которое определяется скоростью лидера v_L , а именно, среднее уклонение на всей траектории уменьшается с уменьшением этой скорости, что согласуется с интуитивным ожиданием, поскольку на начальном этапе каждого участка ведомый аппарат в соответствии с моделью его движения перемещается со скоростью близкой к максимальной.

Хотя на самом деле зависимость точности сохранения строя носит нелинейный характер, полученная оценка показывает, что она условно линейно зависит от средней скорости движения аппарата-лидера и с ростом задержек уклонение растет пропорционально $\sim 1.5v_L \Delta t$. Например, если $v_L = 2$ м/с, что является правдоподобным значением при выполнении большинства задач (например, при сканировании донных поверхностей), и задержка в получении навигационной информации равна 2 с, то верхняя оценка уклонения в строе будет $\approx 1.5 \cdot 2 \cdot 2 = 6$ метров. При этом надо принимать во внимание, что скорость перемещения лидера технически ограничена максимальной скоростью $v_{\max}$ и, следовательно, уклонение ведомого аппарата не может превышать $1.5v_{\max} \Delta t$.

Формула (7) сильно завышает реальные значения, особенно при больших интервалах Δt , что вызвано грубыми оценками параметра $\|W_1\|$ и интеграла I . Следующая ниже таблица содержит конкретные значения оценок (6) и (7) уклонений подводного аппарата от его позиции в строе в зависимости от величины задержки Δt поступления навигационных данных. В последнем столбце приведены относительные погрешности $\frac{| \text{Оценка (7)} - \text{Оценка (6)} |}{\text{Оценка (6)}} \cdot 100\%$.

Оценка (6)

Таблица 1

Оценки уклонений при различных задержках

Задержка Δt , с	Оценка уклонения (6), м	Оценка уклонения (7), м	Относительная погрешность оценки (7), %
0.1	0.2418	0.3500	44.7455
0.2	0.4388	0.7000	59.5424
0.3	0.6098	1.0500	72.1919
0.4	0.7649	1.4000	83.0279
0.6	1.0488	2.1000	100.2296
0.8	1.3160	2.8000	112.7623
1.0	1.5774	3.5000	121.8778
2.0	2.8931	7.0000	141.9565
3.0	4.2457	10.5000	147.3062
4.0	5.6192	14.0000	149.1471
5.0	7.0028	17.5000	149.9006
6.0	8.3918	21.0000	150.2444
7.0	9.7839	24.5000	150.4104
8.0	11.1780	28.0000	150.4910
9.0	12.5735	31.5000	150.5277
10.0	13.9698	35.0000	150.5406

Заключение. В работе рассматривается относительно простая модель движения подводного аппарата в промежутках между получением навигационных данных. Его движение осуществляется в направлении последней известной позиции лидера. Более эффективным был бы алгоритм управления движением в предполагаемое местонахождение лидера через промежуток времени Δt . Перефразируя Уолтера Гретцки, надо перемещаться туда, где лидер будет, а не туда, где он был. Это может быть предметом следующего исследования.

Многочисленные предположения о «прямолинейности» движения лидера и ведомого аппарата упрощают анализ точности строя, но делают полученную оценку более грубой. Такие упрощения вполне приемлемы на небольших участках траектории, т.е. при небольших величинах задержек Δt , но могут исказить реальную картину при увеличении таких участков, т.е. с ростом «навигационной неопределенности». Для улучшения оценок в подобных случаях необходимо проводить более тонкий анализ. В частности, при больших задержках важно учитывать возможное искривление траектории подводного аппарата-лидера. С этой целью целесообразно осуществлять экстраполяцию его траектории не по двум значениям, а например, по трем или даже четырем, если известно, что траектории движения лидера не предполагают резких поворотов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Инзарцев А.В., Киселев Л.В., Костенко В.В. и др.* Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. – Владивосток: Изд-во ФГБУН Ин-т проблем морских технологий ДВО РАН, 2018. – 368 с.
2. *Инзарцев А.В., Киселев Л.В., Матвиенко Ю.В.* Навигация и управление автономных подводных роботов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 3 (104). – С. 164-169.
3. *Yang Y., Xiao Y., Li T.* A Survey of Autonomous Underwater Vehicle Formation: Performance, Formation Control, and Communication Capability // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2021. – Vol. 23, No. 2. – P. 815-841.
4. *Hadi B.* Adaptive Formation Motion Planning and Control of Under-Actuated Autonomous Underwater Vehicles Using Deep Reinforcement Learning. – 2023.
5. *Schaub H., Vadali S.R., Alfriend K.T.* Spacecraft formation flying control using mean orbit elements // Journal of the Astronautical Sciences. – 2000. – Vol. 48, No. 1. – P. 69-87.
6. *Das B., Subudhi B., Pati B.B.* Cooperative Formation Control of Autonomous Underwater Vehicles: An Overview // International Journal of Automation and Computing. – 2016. – Vol. 13, No. 3. – P. 199-225.
7. *Hadi B., Kharrati H., Tatar Y.* A Review of the Path Planning and Formation Control for Autonomous Underwater Vehicles // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2021. – Vol. 101. – Article 44.
8. *Das A.K., Fierro R., Kumar V., Ostrowski J.P., Spletzer J., Taylor C.J.* A vision-based formation control framework // IEEE Transactions on Robotics and Automation. – 2002. – Vol. 18, No. 5. – P. 813-825.
9. *Lawton J.R., Beard R.W., Young B.J.* A decentralized approach to formation maneuvers // IEEE Transactions on Robotics and Automation. – 2003. – Vol. 19, No. 6. – P. 933-941.
10. *Lewis M.A., Tan K.-H.* High precision formation control of mobile robots using virtual structures // Autonomous Robots. – 1997. – Vol. 4, No. 4. – P. 387-403.
11. *Li L., Yan Z., Yu S. et al.* Formation Control of Multiple Autonomous Underwater Vehicles under Communication Delay, Packet Discreteness and Dropout // Journal of Marine Science and Engineering. – 2022. – Vol. 10, No. 7. – Article 920.
12. *Yan T. et al.* Formation Control of Multiple Autonomous Underwater Vehicles: A Comprehensive Overview of Recent Advances // Intelligence & Robotics. – 2023.
13. *Chen Y., Li C., Chen J. et al.* A Formation Control Method for AUV Group Under Communication Constraints // Frontiers in Bioengineering and Biotechnology. – 2022. – Vol. 10. – Article 848641.
14. *Bechlioulis C.P., Karras G.C., Heshmati-Alamdari S., Kyriakopoulos K.J.* Robust Formation Control for Multiple Underwater Vehicles // Frontiers in Robotics and AI. – 2019. – Vol. 6. – Article 90.
15. *Fan X., Guo Y., Liu H., Wei B., Lyu W.* Improved Artificial Potential Field Method Applied for AUV Path Planning // Mathematical Problems in Engineering. – 2020. – Article 6523158. – 21 p. – DOI: 10.1155/2020/6523158.
16. *Белоглазов Д.А., Гайдук А.Р., Косенко Е.Ю. и др.* Групповое управление подвижными объектами в неопределенных средах / под ред. В.Х. Пшихопова. – М.: Физматлит, 2015. – 304 с.
17. *Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б., Бараишков А.А.* Вопросы построения потенциальных полей в задачах локальной навигации мобильных роботов // Автометрия. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 65-70.

18. Guldner J., Utkin V.I. Tracking the gradient of artificial potential fields: Sliding mode control for mobile robots // *International Journal of Control*. – 1996. – Vol. 63, No. 3. – P. 417-432.
19. Yan Z., Li L., Yu S. et al. Adaptive Formation Control of Unmanned Underwater Vehicles with Collision Avoidance and Environment Adaptation // *Journal of Marine Science and Engineering*. – 2022. – Vol. 10, No. 4. – Article 516.
20. Xia G., Zhang Y., Zhang W., Chen X., Yang H. Multi-timescale 3-D Coordinated Formation Control for Multi-Underactuated AUV with Uncertainties: Design and Stability Analysis Using Singular Perturbation Methods // *Ocean Engineering*. – 2021. – Vol. 230. – Article 109053. – DOI: 10.1016/j.oceaneng.2021.109053.
21. Каркищенко А.Н. Градиентный метод формирования строя подводных аппаратов на основе вероятностного функционала // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2025. – Т. 26, № 4. – С. 209-219.
22. Zhen Q. et al. Formation Control of a Multi-AUVs System Based on Virtual Structure and Artificial Potential Field // *Ocean Engineering*. – 2022.

REFERENCES

1. Inzartsev A.V., Kiselev L.V., Kostenko V.V., Matvienko Yu.V., Pavin A.M., Shcherbatyuk A.F. Podvodnye robototekhnicheskie komplekсы: sistemy, tekhnologii, primeneniye [Underwater robotic complexes: systems, technologies, application], Izd-vo FGBUN In-t problem morskikh tekhnologiy DVO RAN, 2018, 368 p.
2. Inzartsev A.V., Kiselev L.V., Matvienko Yu.V. Navigatsiya i upravleniye avtonomnykh podvodnykh robotov [Navigation and control of autonomous underwater robots], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2010, No. 3 (104), pp. 164-169.
3. Yang Y., Xiao Y., Li T. A Survey of Autonomous Underwater Vehicle Formation: Performance, Formation Control, and Communication Capability, *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2021, Vol. 23, No. 2, pp. 815-841.
4. Hadi B. Adaptive Formation Motion Planning and Control of Under-Actuated Autonomous Underwater Vehicles Using Deep Reinforcement Learning, 2023.
5. Schaub H., Vadali S.R., Alfriend K.T. Spacecraft formation flying control using mean orbit elements, *Journal of the Astronautical Sciences*, 2000, Vol. 48, No. 1, pp. 69-87.
6. Das B., Subudhi B., Pati B.B. Cooperative Formation Control of Autonomous Underwater Vehicles: An Overview, *International Journal of Automation and Computing*, 2016, Vol. 13, No. 3, pp. 199-225.
7. Hadi B., Kharrati H., Tatar Y. A Review of the Path Planning and Formation Control for Autonomous Underwater Vehicles, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2021, Vol. 101, Article 44.
8. Das A.K., Fierro R., Kumar V., Ostrowski J.P., Spletzer J., Taylor C.J. A vision-based formation control framework, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, Vol. 18, No. 5, pp. 813-825.
9. Lawton J.R., Beard R.W., Young B.J. A decentralized approach to formation maneuvers, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2003, Vol. 19, No. 6, pp. 933-941.
10. Lewis M.A., Tan K.-H. High precision formation control of mobile robots using virtual structures, *Autonomous Robots*, 1997, Vol. 4, No. 4, pp. 387-403.
11. Li L., Yan Z., Yu S. et al. Formation Control of Multiple Autonomous Underwater Vehicles under Communication Delay, Packet Discreteness and Dropout, *Journal of Marine Science and Engineering*, 2022, Vol. 10, No. 7, Article 920.
12. Yan T. et al. Formation Control of Multiple Autonomous Underwater Vehicles: A Comprehensive Overview of Recent Advances, *Intelligence & Robotics*, 2023.
13. Chen Y., Li C., Chen J. et al. A Formation Control Method for AUV Group Under Communication Constraints, *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 2022, Vol. 10, Article 848641.
14. Bechlioulis C.P., Karras G.C., Heshmati-Alamdari S., Kyriakopoulos K.J. Robust Formation Control for Multiple Underwater Vehicles, *Frontiers in Robotics and AI*, 2019, Vol. 6, Article 90.
15. Fan X., Guo Y., Liu H., Wei B., Lyu W. Improved Artificial Potential Field Method Applied for AUV Path Planning, *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, Article 6523158, 21 p. DOI: 10.1155/2020/6523158.
16. Beloglazov D.A., Gayduk A.R., Kosenko E.Yu. i dr. Gruppovoe upravleniye podvizhnymi ob"ektami v neopredelennykh sredakh [Group control of moving objects in uncertain environments], ed. by V.Kh. Pshikhopova. Moscow: Fizmatlit, 2015, 304 p.
17. Filimonov A.B., Filimonov N.B., Barashkov A.A. Voprosy postroeniya potentsial'nykh poley v zadachakh lokal'noy navigatsii mobil'nykh robotov [Issues of constructing potential fields in problems of local navigation of mobile robots], *Avtometriya* [Autometria], 2019, Vol. 55, No. 4, pp. 65-70.
18. Guldner J., Utkin V.I. Tracking the gradient of artificial potential fields: Sliding mode control for mobile robots, *International Journal of Control*, 1996, Vol. 63, No. 3, pp. 417-432.

19. Yan Z., Li L., Yu S. *et al.* Adaptive Formation Control of Unmanned Underwater Vehicles with Collision Avoidance and Environment Adaptation, *Journal of Marine Science and Engineering*, 2022, Vol. 10, No. 4, Article 516.
20. Xia G., Zhang Y., Zhang W., Chen X., Yang H. Multi-timescale 3-D Coordinated Formation Control for Multi-Underactuated AUV with Uncertainties: Design and Stability Analysis Using Singular Perturbation Methods, *Ocean Engineering*, 2021, Vol. 230, Article 109053. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2021.109053.
21. Karkishchenko A.N. Gradientnyy metod formirovaniya stroya podvodnykh apparatov na osnove veroyatnostnogo funktsionala [Gradient method for forming a formation of underwater vehicles based on a probabilistic functional], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2025, Vol. 26, No. 4, pp. 209-219.
22. Zhen Q. *et al.* Formation Control of a Multi-AUVs System Based on Virtual Structure and Artificial Potential Field, *Ocean Engineering*, 2022.

Каркищенко Александр Николаевич – НИИ Робототехники и процессов управления; e-mail: karkishalex@gmail.com; г. Таганрог, Россия; тел.: +79034610539; д.ф.-м.н.; профессор; г.н.с.

Karkishchenko Alexander Nikolaevich – Scientific Research Institute of the Robotics and Control Processes; e-mail: karkishalex@gmail.com; Taganrog, Russia; phone: +79034610539; dr. of phys. and math. sc.; professor; chief researcher.

УДК 681.51: 676.082.4

DOI 10.18522/2311-3103-2026-4-226-241

Д.А. Ковалёв, Д.Х. Имаев, С.Е. Душин

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ СОДОРЕГЕНЕРАЦИОННОГО КОТЛОАГРЕГАТА КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Ключевой агрегат производства сульфатной целлюлозы (крафт-процесса) – содорегенерационный котлоагрегат (СРК) – обеспечивает восстановление химикатов черного щелока. Актуальна задача повышения степени восстановления щелока без изменения технологии процесса и конструкции аппаратов, т.е. информационно-алгоритмическими средствами автоматического управления процессом. Более высокое гарантированное качество восстановления обеспечивают алгоритмы регулирования, синтезированные на основе адекватных математических моделей. Цель статьи – системный анализ СРК как объекта управления и построение усовершенствованной математической модели, пригодной для синтеза высококачественных систем автоматической стабилизации. В основе методологии лежит принцип последовательного раскрытия неопределённости моделей сложных систем управления (А.А. Вавилов). В отличие от известных подходов, динамика СРК в окрестности выбранного режима описана в виде многоуровневой модели класса LTI. Комбинирование аналитических методов с обработкой экспериментальных данных для конкретного режима позволило получить определенные до значений параметров математические модели реального СРК. Разработанная многоуровневая линейная стационарная модель СРК дает возможность анализировать динамику подсистем и агрегата в целом, устойчивость режимов и влияние возмущений, и обосновать необходимость автоматического поддержания требуемого качества технологических процессов в окрестности выбранного режима. Модели в символьном виде применимы к большинству подобных агрегатов технологического процесса производства сульфатной целлюлозы. Параметры полностью определенных моделей должны быть скорректированы по результатам обработки данных, относящихся к конкретному агрегату и режиму. Направление дальнейших исследований связано с развитием методов анализа динамики сложных систем управления по моделям иерархической структуры, а также синтеза систем стабилизации режима и ослабления влияния возмущений.

Содорегенерационный котлоагрегат; степень восстановления; черный щелок; моделирование; идентификация; система автоматического регулирования.

D.A. Kovalev, D.H. Imaev, S.E. Dushin

MODELING AND IDENTIFICATION OF A COGENERATION BOILER UNIT FOR KRAFT PULP PRODUCTION AS A CONTROL PLANT

The key unit of kraft pulp production – the recovery boiler – ensures the regeneration of black liquor chemicals. The task of increasing the liquor reduction degree without changing the process technology or equipment design, i.e., through information and algorithmic means – automatic control is relevant. A higher