

И.С. Бурлаченко, Г.М. Чечин

РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ БУШЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МОД В ДВУМЕРНЫХ РЕШЁТКАХ

Рассматривается проблема резонансного возбуждения бушей в двумерных решётках с дискретной симметрией. Каждый буш представляет собой совокупность колебательных мод, которая сохраняется во времени и определяет некоторое точное решение нелинейных уравнений движения, которое нельзя получить в рамках теории возмущений. Актуальность данного исследования, заключается в том, что указанная схема возбуждения бушей, в отличие от прошлых математических моделей направленных на возбуждения бушей нелинейных нормальных мод может быть реализована в рамках физического эксперимента. Вышеуказанные ансамбли колебательных мод рассматриваются в рамках теории Чечина и Сахненко, основанной на теоретико-групповых методах исследования, что позволяет с равным успехом использовать любые модели потенциалов межатомного взаимодействия. Что в свою очередь – позволяет рассматривать динамические системы множества масштабов от молекулярных колебаний до движения макроскопических кристаллических структур. Цель работы: представить математическую модель возбуждения устойчивых нелинейных динамических объектов в двумерных молекулярных структурах пригодную как для вычислительного, так и для физического эксперимента. Предоставление результатов проведённого вычислительного эксперимента с описанием обнаруженных динамических объектов. В отличие от традиционных методов, теория бушей обеспечивает твёрдый теоретический аппарат, основанный на теории групп, который преодолевает ограничения теории возмущений, предлагая результаты исключительной надёжности. При этом свойства симметрии, используемые в теории бушей, способны давать значительные преимущества для численного моделирования, заметно снижая вычислительную сложность. На данный момент указанная проблематика исследуется многими авторами по всему миру. Стоит, однако, отметить, что работы, в которых обсуждаются проблемы, возбуждения динамических объектов, близких к понятию бушей, относятся только к одномерным случаям и что теоретико-групповые методы в них, за весьма редким исключением, не рассматриваются.

Нелинейные нормальные моды; моды Розенберга; пространственные группы симметрии; вычислительная физика; подгруппы пространственных групп симметрии; инвариантные множества; теоретико-групповые правила отбора; Гамильтоновы системы; буши нелинейных нормальных мод; колебательное движение.

I.S. Burlachenko, G.M. Chechin

RESONANT EXCITATION OF BUSH NONLINEAR NORMAL MODES IN TWO-DIMENSIONAL LATTICES

This paper addresses the problem of resonant excitation of bushes in two-dimensional lattices with discrete symmetry. A bush is defined as a set of vibrational modes that persists over time and constitutes an exact solution to the nonlinear equations of motion, which cannot be obtained within the framework of perturbation theory. The relevance of this study lies in the fact that the proposed scheme for bush excitation, in contrast to previous mathematical models aimed at exciting bushes of nonlinear normal modes, can be implemented in a physical experiment. The above-mentioned ensembles of vibrational modes are considered within the framework of the theory of Chechin and Sakhnenko, based on group-theoretic research methods, which makes it possible to use any models of interatomic interaction potentials with equal success. This, in turn, allows us to consider dynamic systems of multiple scales, from molecular vibrations to the movement of macroscopic crystal structures. The aim of the work is to present a mathematical model of excitation of stable nonlinear dynamic objects in two-dimensional molecular structures suitable for both computational and physical experiments. Providing the results of a computational experiment with a description of the detected dynamic objects. Unlike traditional methods, Bush theory provides a solid theoretical framework based on group theory that overcomes the limitations of perturbation theory, offering results of exceptional reliability. At the same time, the symmetry properties used in Bush theory can provide significant advantages for numerical modeling, significantly reducing computational complexity. Now, this issue is being investigated by many authors around the world. It is worth noting, however, that the works in which the problems of excitation of dynamic objects close to the concept of bushes are discussed relate only to one-dimensional cases and that group-theoretic methods are not considered in them, with very rare exceptions.

Nonlinear normal modes; Rosenberg modes; space symmetry groups, computational physics; subgroups of space symmetry groups; invariant manifolds; group-theoretical selection rules; Hamiltonian systems; bushes of nonlinear normal modes; oscillatory motion.

Введение. Ставшая классической работа Ферми, Пасты, Улама и Цингоу опубликованная 1955 г. [1] положила начало многочисленным исследованиям межмодовых взаимодействий в нелинейных структурах. Тогда, однако, не был поставлен вопрос об определении правил отбора для передачи возбуждения между нелинейными модами различной симметрии. Данные правила отбора обеспечивают возможность возбуждения устойчивых ансамблей однотипных мод, а набор мод, взаимодействующих внутри каждого такого ансамбля, со временем не меняется. Вышеуказанные группы рассматриваются в рамках теории так называемых «бушей» развитой в работах Чечина и Сахненко [2–4], в рамках которой эти динамические режимы называются бушами нелинейных нормальных мод. В этих работах впервые была поставлена и решена задача о теоретико-групповых методах исследования и передачи возбуждения между модами *разной симметрии*. Ввиду теоретико-групповой основы теории бушей – она имеет широкие границы применимости и не зависит от типа межатомных взаимодействий в системе. На данный момент указанная проблематика исследуется многими авторами по всему миру.

Стоит, однако, сразу отметить, что работы, в которых обсуждаются проблемы, возбуждения динамических объектов, близких к понятию бушей, относятся только к одномерным случаям и что теоретико-групповые методы в них не рассматриваются. Исключением является статья Боба Ринка [5], в которой содержится обсуждение теоретико-групповых вопросов, но опять-таки только для одномерного случая.

Прежде всего, стоит отметить статью Харольда Стоукса и Дориана Хэтча [6], где в случае цепочки ФПУ были обнаружены долгоживущие динамические объекты, которые являлись линейными комбинациями некоторого числа линейных колебательных мод. Эта работа авторов была основана на анализе свойств самих динамических уравнений широко-известной модели Ферми, Пасты и Улама, которая была предложена этими авторами при исследовании механической системы грузиков, связанных пружинками с нелинейными добавками к обычному закону Гука. Как известно, эта работа является именно той работой, которая и породила современную нелинейную динамику. Совместно с ними опубликован ряд работ, объединяющие оба подхода [7].

Целый ряд работ таких авторов как Йошимура, Шинохара продолжили эту традицию по исследованию цепочек ФПУ на основе специфики уравнений движения этой модели. Стоит ещё раз подчеркнуть, что единственной работой, нарушившей эту традицию, является уже упоминавшаяся работа Боба Ринка [5]. Но в ней опять-таки исследование ограничено лишь одномерным случаем и не была выявлена фундаментальная роль подгрупп группы симметрии рассматриваемых динамических систем для исследования их динамики.

Отдельно нужно выделить работы, в которых используются первопринципные расчёты на основе методов типа Хартри-Фока и метода функционала плотности, в частности работы Доя, Нишимуры и их японских коллег [8, 9].

В заключение стоит подчеркнуть, что динамические объекты, в той или иной степени аналогичные бушам колебательных мод, представляют существенный интерес для современной физики.

Однако есть один принципиальный момент, связанный с теорией бушей. Дело в том, что могут существовать объекты, не связанные только с механическими движениями широко изучаемых систем. Могут существовать и буши **немеханической природы**, например буши **магнитных мод** и разные их комбинации с колебательными модами. В этом отношении открывается широкая перспектива по части дальнейшего развития теории бушей нелинейных нормальных мод.

В рамках данной работы рассматривается математическая модель, в которой предполагается, что колебания в системе возбуждаются путём воздействия на один из незакреплённых атомов решётки внешней периодической силой. Поскольку атом, на который действует эта внешняя сила, передаёт возбуждение на связанные с ним атомы – то в случае наличия резонансной частоты – возбуждение передаётся по всей структуре, что и приводит к возбуждению некоторой группы нелинейных нормальных мод. Такая группа может соответствовать некоторому бушу, сохраняющему свою структуру в течение эволюции системы во времени.

Теория бушей нелинейных нормальных мод. Постановка задачи. В 1930 году Вигнер впервые использовал теоретико-групповые методы для изучения *малых атомных колебаний* молекул и кристаллов в своей работе [10]. Он показал, что нормальные моды, которые вводятся в гармоническом приближении для систем с дискретной симметрией, могут быть классифицированы по неприводимым представлениям группы симметрии этих равновесных систем, независимо от их физической природы.

Все моды, связанные с данным неприводимым представлением, имеют одинаковую частоту, а соответствующие им собственные векторы матрицы силовых постоянных могут рассматриваться как базисные векторы этого неприводимого представления. Возможность такой классификации основана на *линейности* динамических уравнений, полученных при использовании гармонического приближения.

Линейность уравнения Шредингера позволяет провести аналогичную классификацию квантовых состояний (теорема Вигнера) [11].

В 90-х годах прошлого века в Ростовской исследовательской группе под руководством Г.М. Чечина была разработана теория бушей нелинейных нормальных мод, с целью изучения колебаний атомов в системах с дискретной симметрией при *произвольных амплитудах* колебаний [2–4].

Существуют различные концепции, определяющие понятие нелинейных нормальных мод. Теория бушей использует концепцию таких мод, восходящих к определению, данному Розенбергом. Моды Розенберга оказались весьма плодотворной и удобной концепцией – широко используемой в разнообразных современных инженерных расчётах [12, 13].

Подобно теории Вигнера, эта теория основана на применении аппарата неприводимых представлений групп точечной и пространственной симметрии. Теория бушей нелинейных нормальных мод (ННМ) основана на исследовании правил отбора для передачи возбуждения между модами различной симметрии.

Буши нелинейных нормальных мод, представляют собой *точные* динамические объекты в нелинейных системах с дискретной симметрией, которые нельзя получить ни в каком порядке обычной теории возмущений.

Присутствие точечной или пространственной симметрии в нелинейной системе обуславливает наличие правил отбора (ПО), регулирующих процесс передачи возбуждения между нормальными модами данной системы [4–6].

Правила отбора могут быть получены на основе метода полного конденсата первичных и вторичных параметров порядка, который был разработан в рамках теории фазовых переходов исследовательской группой под руководством Г.М. Чечина и В.П. Сахненко в НИИФ РГУ.

В классической механике симметрия системы материальных точек определяется набором их скоростей и координат. Однако для последующего анализа симметричного состояния системы достаточно учитывать только пространственную группу симметрии её геометрической конфигурации.

Предположим, что группа G_0 описывает систему в состоянии равновесия. При возникновении малых колебаний в этой системе *симметрия понижается* и будет характеризоваться некоторой подгруппой G группы G_0 :

$$G \subset G_0.$$

Совокупность смещений всех N частиц рассматриваемой системы из положения равновесия может быть представлена в виде вектора:

$$\vec{X}(t) = \{\delta x_1(t), \dots, \delta x_{3N}(t)\}. \quad (1)$$

Данный вектор можно разложить по полному набору базисных функций всех неприводимых представлений группы G_0 :

$$\vec{X}(t) = \sum_{l=1}^{3N} \mu_l(t) \varphi_l, \quad (2)$$

здесь φ_l – базисная функция неприводимого представления, которая определяет направления смещений для всех атомов системы, а $\mu_l(t)$ – задаёт временную зависимость этих смещений.

В дальнейшем, согласно данному представлению, под колебательной модой будем понимать линейную комбинацию базисных функций, определяемую набором коэффициентов $\mu_i(t)$.

Предположим, что в начальный момент времени в системе возбуждена определенная корневая мода, принадлежащая неприводимому представлению $\Gamma_j^{(k)}$. Здесь и далее под корневой модой понимается мода, которая возбуждается в начальный момент, в то время как другие моды буша, которые вовлечены в колебательный процесс из-за межмодовых нелинейных взаимодействий называются *вторичными модами* этого буша.

Рассмотрим теоретико-групповой метод для определения всех вторичных мод, которые могут быть возбуждены в процессе динамики рассматриваемой системы.

Учитывая инвариантность вектора $\vec{X}(f)$ относительно всех элементов g группы G , определяющей симметрию корневой моды, для каждого неприводимого представления Γ_j группы G_0 справедливо соотношение:

$$M_j(g)\vec{C}_j = \vec{C}_j, \quad g \in G. \quad (3)$$

Здесь $M_j(g)$ – матрица представления Γ_j размерности n_j , соответствующая элементу g , а компоненты C_{ji} вектора $\vec{C}_j = (C_{j1}, \dots, C_{jn_j})$ – коэффициенты разложения $\vec{X}(t)$ по базисным функциям этого представления.

Решение $\vec{C}_j$ уравнения (3) для каждого НП является стационарным вектором, который не изменяется при воздействии на него любых матриц этого представления для $g \in G$. Этот вектор, зависящий от S_j произвольных параметров ($0 \leq S_j \leq n$) выделяет некоторую колебательную моду.

Пусть, $\vec{C}^{(k)}$ обозначает стационарный вектор, определяющий корневую моду представления $\Gamma^{(k)}$. Множество всех ненулевых векторов $\vec{C}_j$, получаемых путем решения системы (3) для каждого НП группы G_0 , будет называться бушем стационарных векторов, который соответствует корневому вектору $\vec{C}^{(k)}$. В теории структурных фазовых переходов этот набор называется полным конденсатом параметров порядка. Из метода нахождения буша мод с использованием системы (3) ясно, что группа симметрии G' любой вторичной моды не ниже группы симметрии G корневой моды ($G' \geq G$). Критерием же для полноты набора мод, входящих в рассматриваемый буш с симметрией G является:

$$\sum_j n_j S_j = index \quad (4)$$

Здесь n_j обозначает размерность НП Γ_j , S_j – число произвольных параметров, описывающих стационарный вектор $\vec{C}_j$, $index$ – индекс подгруппы G в группе G_0 .

Существенно, что обычно достаточно большое число НП группы G_0 не дает вклада в данный буш (для них $\vec{C}_j = 0$). Следовательно, соответствующие моды не могут быть возбуждены в результате взаимодействия с корневой модой при любых ангармонических воздействиях, что указывает на строгие правила отбора для передачи возбуждения между модами различной симметрии.

Как известно, матричное представление группы симметрии использует матрицы, – которые представляют операторы симметрии. В рамках матричных представлений каждому элементу группы симметрии сопоставляется матрица, которая действует на скаляры, векторы или псевдовекторы, описывающие систему. Называют эти представления – соответственно: перестановочными, механическими или спинными.

Общее число механических степеней свободы μ , для данного буша, вытекающее из формулы (2), определяется как $m = \sum_j P_j S_j$, где P_j – количество раз, которое Γ_j входит в механическое представление рассматриваемой системы, причем динамические уравнения для них можно написать в виде:

$$\ddot{\mu}_l = -\frac{\partial U}{\partial \mu_l}, \quad (5)$$

где $l = 1, \dots, m$, а $U = U(\mu_1, \dots, \mu_m)$ – потенциальная энергия системы, выраженная через переменные μ_l .

Предположив аналитичность функции $U = U(\mu_1, \dots, \mu_m)$ можно представить её в форме бесконечного степенного ряда по всем аргументам. Аргументы в разложении – могут быть представлены в виде инвариантных комбинаций относительно прямой суммы НП, соответствующих данному бушу.

Разложения функции $U(\mu_1, \mu_2)$ для различных кристаллических структур часто имеют одинаковый вид, что позволяет выделять соответствующие им буши в отдельные классы универсальности.

Простейший класс двумерных бушей определяется функцией

$$U(\mu_1, \mu_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^k F_k(\mu_2), \quad (6)$$

где $F_k(\mu_2)$ суть произвольные четные функции от μ_2 .

В контексте анализа малых колебаний рассмотрение можно ограничить небольшим количеством первых ангармонических членов в выражении (6). Для минимизации количества произвольных констант используется соответствующая замена переменных. В результате, уравнения (5), определяющие функцию $U(\mu_1, \mu_2)$ из (6), могут быть представлены следующим образом:

$$\ddot{\mu}_1 + \mu_1 = \mu_2^2 + \dots, \quad (7a)$$

$$\ddot{\mu}_2 + \omega^2 \mu_2 = 2\mu_1 \mu_2 + \dots, \quad (7b)$$

Уравнения (7) являются динамическими уравнениями двух связанных нелинейных осцилляторов, соответствующих модам $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$.

Из структуры данных уравнений следует, что активация корневой моды $\mu_2(t)$ неизбежно вызывает возбуждение вторичной моды $\mu_1(t)$ поскольку система не допускает решения, при котором $\mu_2(t) \neq 0$ и одновременно $\mu_1(t) \equiv 0$. В то же время возбуждение $\mu_1(t)$, вообще говоря, не приводит к появлению корневой моды $\mu_2(t)$ так как система допускает решение, при котором $\mu_1(t) \neq 0$ и $\mu_2(t) \equiv 0$. Подобное подчинение мод для бушей большей размерности приводит к созданию иерархии взаимодействия между ними.

Правила отбора, определяющие моды определённого буша, базируются на основе общих симметричных соображений. Тем не менее, эти правила могут быть спонтанно нарушены под влиянием процессов аналогичных параметрическому резонансу. В результате, могут быть возбуждены моды, которые не являются частью первоначального буша с симметрией G , что приводит к его расширению и одновременному снижению симметрии до подгруппы $G' \subset G$.

В этом случае мы работаем в области неустойчивых решений и имеем дело с некоторым динамическим аналогом фазового перехода. В таком переходе мгновенная симметрия колеблющейся системы спонтанно снижается, что влечёт за собой расширение первоначального буша.

Теория бушей и резонанс. В этой работе была представлена математическая модель, которая описывает систему, состоящую из нескольких одинаковых грузов, соединенных пружинами. Растяжение таких пружин вызывает возникновение упругой силы, которая подчиняется закону Гука с добавлением нелинейных членов второго (модель FPU- α) или третьего (модель FPU- β) порядка. Далее вместо грузиков будут рассматриваться атомы или частицами, а вместо нелинейных пружин – потенциалы межатомного взаимодействия.

Данная элементарная механическая модель оказала значительное воздействие на современную теорию нелинейной динамики, а также послужила основой для открытия таких феноменов, как солитоны [14] и динамический хаос [15, 16].

В последующем, процесс возбуждения моды в системе для каждой ФПУ-подобной модели как правило включает в себя проведение следующей математической процедуры: сначала рассчитывается вектор начальных смещений, который является собственным вектором матрицы силовых постоянных системы; затем устанавливаются маленькие начальные смещения атомов в соответствии с этим вектором; начальные скорости устанавливаются равными нулю; задаются граничные условия (чаще всего периодические). После этого выполняется решение задачи Коши для системы нелинейных уравнений движения с использованием определенного численного метода на некотором временном интервале.

Присутствие ангармонических членов в разложении потенциальной энергии приводит к возникновению слабого взаимодействия между нормальными модами, что способствует возникновению определенного упорядоченного набора нелинейных нормальных мод.

Описанная выше процедура возбуждения колебательных бушей довольно проста для выполнения в вычислительных экспериментах, но ее невозможно реализовать в экспериментах физических.

Предлагаемый метод возбуждения колебательных бушей основан на резонансных воздействиях на изучаемую систему и, в отличие от метода, описанного выше, может быть осуществлён в рамках физических экспериментов.

Резонансное возбуждение бушей нелинейных нормальных мод в двумерных решётках. Основные результаты. Рассмотрим двумерную квадратную решётку, все межатомные взаимодействия которой описываются потенциалом Леннарда-Джонса и атомы которой оказывают прямое влияние лишь на атомы первой «координационной сферы». Закрепим все граничные атомы системы и будем считать массы всех атомов равными друг другу.

Размер решётки положим равным 3×3 подвижных атомов. Начнём поочерёдно прикладывать к каждому атому системы внешнюю периодическую силу равную $0.01 \cos(\omega t)$ и имеющую направление $[1,0]$. Интегрирование будем проводить в течении $t=4000$. Здесь и далее, нумерация атомов ведётся с учётом граничных, неподвижных атомов.

Как показало моделирование, энергетические пики резонансных частот весьма различны по своей высоте, что приводит к разным амплитудам возбуждаемых колебаний.

К примеру, вот так (табл. 1–3) выглядит процесс накачки энергии при разных частотах, для случаев, когда периодическая сила приложена к атому $(2,2)$.

Таблица 1

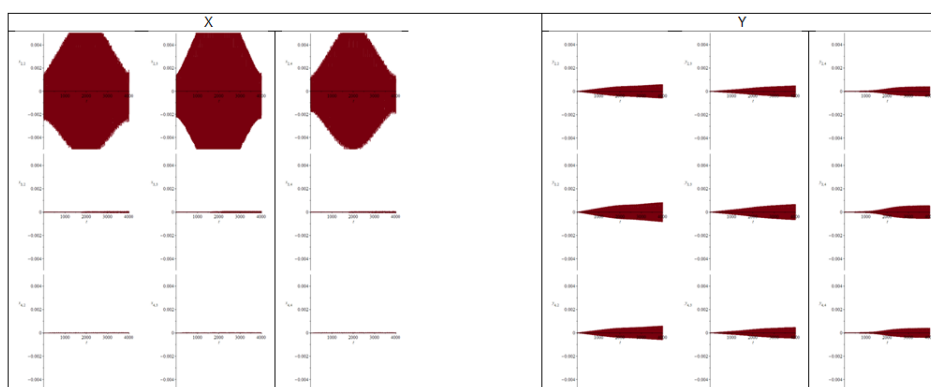
Резонансное возбуждение нормальной моды с частотой $\omega = 1.0225$ 

Таблица 2

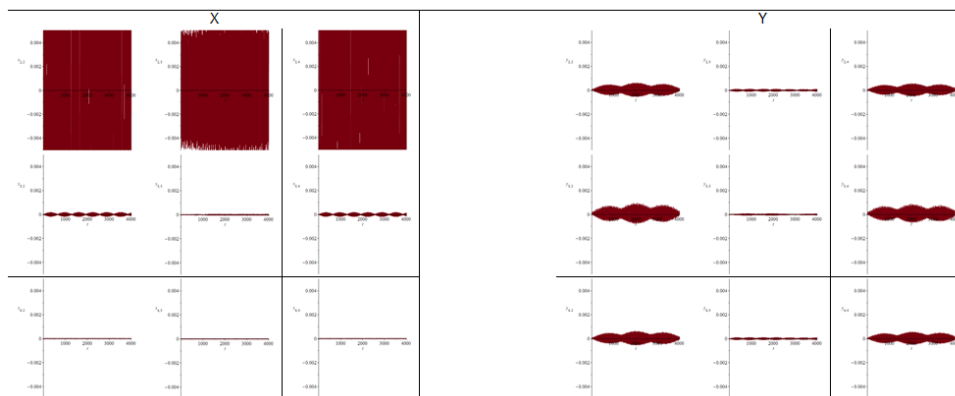
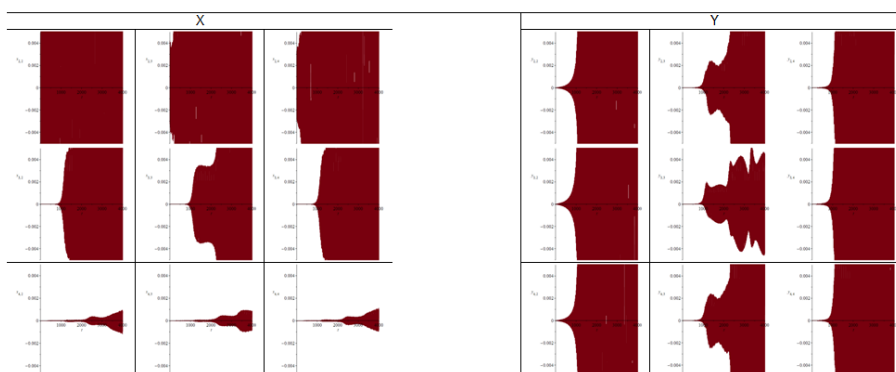
Резонансное возбуждение нормальной моды с частотой $\omega = 3.882$ 

Таблица 3

Резонансное возбуждение нормальной моды с частотой $\omega = 5.831$



Тут и далее, первая таблица иллюстрирует колебания атомов от положения равновесия вдоль оси X, вторая – вдоль оси Y.

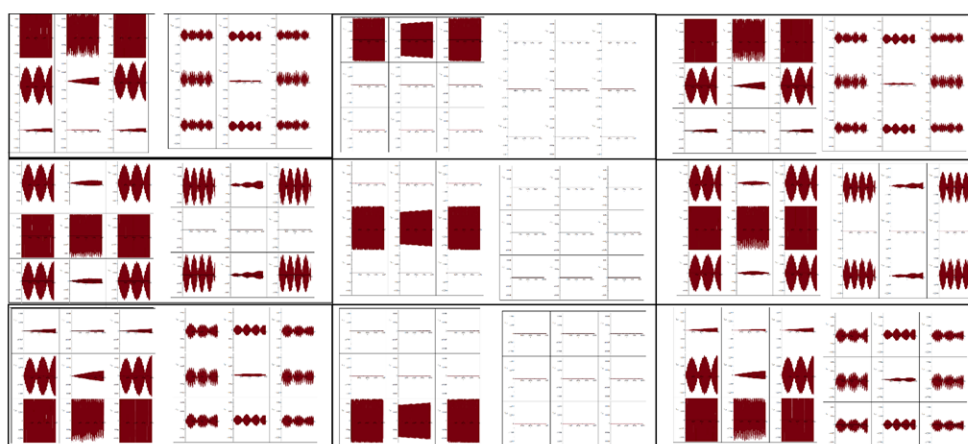
В табл. 1–4 возбуждение производится в плоской квадратной атомной решётке Леннарда-Джонса 5x5 и закреплёнными краями. В табл. 1–3 – резонансное возбуждение производится путём приложения внешней периодической силы в направлении [1,0] к атому (2,2).

При приложении внешней периодической силы, с не резонансной частотой, возбуждение по системе передаваться всё же будет, однако исключительно вдоль направления оси этой силы.

Точно так же хорошо видна и Z-структура нормальных мод (Z-структура – расположение всех нулевых элементов паттерна атомных смещений нелинейной нормальной моды). К примеру, если увеличить масштаб табл. 2 и подействовать $\omega = 3.882$ на каждый подвижный атом системы (табл. 4), то можно будет увидеть, что при прикладывании внешней периодической силы к атомам (2,3), (3,3), (4,3) возбуждение в системе передаётся лишь вдоль оси этой силы.

Таблица 4

Резонансное возбуждение нормальной моды с частотой $\omega = 3.882$ в, проведённое путём приложения внешней периодической силы в направлении [1,0] поочерёдно к каждому подвижному атому решётки



Заключение. Данная работа – посвящена вопроса возбуждения бушей нелинейных нормальных мод, теория которых развивается в ЮФУ и УрФУ несколько последних десятилетий [17–34].

Каждый буш представляет собой совокупность колебательных мод, которая сохраняется во времени и определяет некоторое точное решение нелинейных уравнений движения, которые нельзя получить в рамках теории возмущений.

В работе передоложена математическая модель позволяющая произвести возбуждение всех возможных бушей в квадратной двумерной решётке. Предполагается, что указанная схема возбуждения бушей мод могут быть использованы для реального возбуждения бушей в физических системах с дискретной симметрией

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.M.* Studies of nonlinear problems I // Technical Report LA-1940, LANL. – May 1955. – P. 978-988.
2. *Chechin G.M., Sakhnenko V.P.* Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry // Exact results Phys. D. – 1998. – 117, 43.
3. *Sakhnenko V.P., Chechin G.M.* Symmetrical selection rules in nonlinear dynamics of atomic systems // Phys. Dokl. – 1993. – 38, 219.
4. *Chechin G.M., Ryabov D.S.* Introduction to the theory of bushes of nonlinear normal modes for studying large-amplitude atomic vibrations in systems with discrete symmetry // Lett. Mater. – 2020. – 10 (4). – P. 523-534.
5. *Rink B.* Symmetry and resonance in periodic FPU chains // Physica D. – 2001. – Vol. 218, No. 3. – P. 665-668.
6. *Stokes H.T., Hatch D.M., Campbell B.J.* ISOTROPY Software Suite. – <https://iso.byu.edu/>.
7. *Stokes H.T., Smith A.D., Hatch D.M., Chechin G.M., Sakhnenko V.P.* Group theoretical methods applied to non-linear dynamics in crystals // International journal of non-linear mechanics. – 1998. – 35 (3). – P. 497-513.
8. *Yoshimura K., Kolchinsky A., Dechant A.* Modulational instability of zone boundary mode in nonlinear lattices // Phys. Rev. Research. – 2023. – 5, 013017. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.013017>.
9. *Nakamura S., Shinohara S., et al.* Nonlinear Scar Modes Generated by Self-Organization of Resonance Modes // Proc. NOLTA. – Catania, 2023. – P. 682-682. – DOI:10.34385/proc.76.D1L-34.
10. *Wigner E.* Über die elastischen Eigenschwingungen symmetrischer systeme // Nachricht. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. – Berlin, 1930.
11. *Petrashen M.I., Trifonov E.D.* Applications of group theory in quantum mechanics. – Cambridge, MIT Press, 1969.
12. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В.* Нелинейная динамика упругих систем // Модели, методы, явления. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2019. – 715 с.
13. *Корзникова Е.А., Бокий Д.И., Дмитриев С.В.* Нелинейная динамика гексагональной решетки. – СПб.: Изд-во «Наукоемкие технологии», 2018. – 114 с.
14. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – 15 (6). – P. 240-243.
15. *Khasseh R., Fazio R., Ruffo S., & Russomanno A.* Many-body synchronization in a classical hamiltonian system // Physical Review Letters. – 2019. – 123 (18), 184301. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.184301>.
16. *Trengginas E.P., Sutanty et al.* Chaotic behaviour of modified hamiltonian Peyrard-Bishop-Dauxois model on DNA system // J. Phys.: Conf. Ser. – 1245 012070. – DOI 10.1088/1742-6596/1245/1/012070.
17. *Lobzenko I.P., Chechin G.M., Bezuglova G.S. et al.* Ab initio simulation of gap discrete breathers in strained grapheme // Phys. Solid State. – 2016. – 58. – P. 633-639. – <https://doi.org/10.1134/S1063783416030203>.
18. *Ryabov D.S., Chechin G.M., Naumov E.K. et al.* One-component delocalized nonlinear vibrational modes of square lattices // Nonlinear Dynamics. – 2023. – 111. – P. 8135-8153. – <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08264-6>.
19. *Korznikova E.A., Shcherbinin S.A., Ryabov D.S., Chechin G.M., Ekomasov E.G., Barani E., Zhou K., Dmitriev S.V.* Delocalized nonlinear vibrational modes in graphene: second harmonic generation and negative pressure // Physica Status Solidi (b). – 2019. – 256, 1800061. – <https://doi.org/10.1002/pssb.201800061>.
20. *Ryabov D.S., Chechin G.M., Upadhyaya A. et al.* Delocalized nonlinear vibrational modes of triangular lattices // Nonlinear Dynamics. – 2020. – 102. – P. 2793-2810. – <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06015-5>.
21. *Shcherbinin S.A., Semenova M.N., Semenov A.S. et al.* Dynamics of a three-component delocalized nonlinear vibrational mode in graphene // Phys. Solid State. – 2019. – 61. – P. 2139-2144. – <https://doi.org/10.1134/S1063783419110313>.
22. *Abdullina D.U., Semagina A.S., Ryabov D.S., Chechin G.M., Korznikova E.A., Baimova J.A., & Dmitriev S.V.* Stability of in-plane delocalized vibrational modes in triangular Morse lattice // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – 447 (1), 012060. – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/447/1/012060>.

23. Chechin G.M., & Lapina V.S. Discrete breathers of new type in monoatomic chains // arXiv. – 2018. – <https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.08901>.
24. Chechin G.M., & Lapina V.S. Universal bi-structures of strained monoatomic chains // Computational Materials Science. – 2020. – 177, 109578. – <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2019.109578>.
25. Chechin G., Ryabov D., Shcherbinin S. Large-amplitude in-plane atomic vibrations in strained graphene monolayer: bushes of nonlinear normal modes // Letters on Materials. – 2017. – 7 (4). – P. 367-372. – DOI: 10.17580/ism.2017.04.07.
26. Баимова Ю.А., Щербинин С.А., Чечин Г.М., Дмитриев С.В. Об устойчивости одномерных бушей нелинейных колебательных мод в графене // Letters on Materials. – 2018. – 8 (1). – P. 43-48. – <https://doi.org/10.22226/2410-3535-2018-1-43-48>.
27. Shcherbinin S.A., Krylova K.A., Chechin G.M., Soboleva E.G., Dmitriev S.V. Delocalized nonlinear vibrational modes in fcc metals // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2021. – Vol. 105. – P. 106083. – DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.106083.
28. Кедров А.А., Щербинин С.А. Исследование устойчивости колебательной π -моды в возмущенной цепочке Тоды // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2026. – Т. 34, № 2. – С. 206-222. – DOI: 10.18500/0869-6632-003202. – EDN: NRVWDG.
29. Ryabov D.S., Kosarev I.V., Xiong D., Kudreyko A.A., Dmitriev S.V. Delocalized Nonlinear Vibrational Modes in Bcc Lattice for Testing and Improving Interatomic Potentials // Computers, Materials and Continua. – 2025. – 82 (3). – P. 3797-3820. – <https://doi.org/10.32604/cmc.2025.062079>.
30. Ryabov D.S., Bezuglova G.S., Korznikova E.A., & Dmitriev S.V. Testing interatomic potentials for binary alloys using exact solutions to the equations of atomic motion // Computational Materials Science. – 2024. – 242, 113054. – <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2024.113054>.
31. Косарев И.В., Абдуллина Д.В., Дмитриев С.В. Делокализованные нелинейные колебательные моды ОЦК решетки // Известия Алтайского государственного университета. – 2025. – № 1 (141). – С. 58-66. – DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-07.
32. Chechin G., Ryabov D. Exact solutions of nonlinear dynamical equations for large-amplitude atomic vibrations in arbitrary monoatomic chains with fixed ends // arXiv:2109.09101v1. – 2021. – <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107176>.
33. Семенов А.С., Рябов Д.С., Чечин Г.М., Дмитриев С.В. Локализованные и делокализованные нелинейные колебательные моды треугольной решетки // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения. – 2021. – P. 64-65.
34. Chechin G., Ryabov D. Properties of large-amplitudes vibrations in dynamical systems with discrete symmetry. Geometrical aspects // arXiv:2005.13343v1. – 2020. – <https://arxiv.org/abs/2005.13343v1>.

REFERENCES

1. Fermi E., Pasta J., Ulam S.M. Studies of nonlinear problems I, *Technical Report LA-1940*, LANL, May 1955, pp. 978-988.
2. Chechin G.M., Sakhnenko V.P. Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry, *Exact results Phys. D*, 1998, 117, 43.
3. Sakhnenko V.P., Chechin G.M. Symmetrical selection rules in nonlinear dynamics of atomic systems, *Phys. Dokl.*, 1993, 38, 219.
4. Chechin G.M., Ryabov D.S. Introduction to the theory of bushes of nonlinear normal modes for studying large-amplitude atomic vibrations in systems with discrete symmetry, *Lett. Mater.*, 2020, 10 (4), pp. 523-534.
5. Rink B. Symmetry and resonance in periodic FPU chains, *Physica D*, 2001, Vol. 218, No. 3, pp. 665-668.
6. Stokes H.T., Hatch D.M., Campbell B.J. ISOTROPY Software Suite. Available at: <https://iso.byu.edu/>.
7. Stokes H.T., Smith A.D., Hatch D.M., Chechin G.M., Sakhnenko V.P. Group theoretical methods applied to non-linear dynamics in crystals, *International journal of non-linear mechanics*, 1998, 35 (3), pp. 497-513.
8. Yoshimura K., Kolchinsky A., Dechant A. Modulational instability of zone boundary mode in nonlinear lattices, *Phys. Rev. Research*, 2023, 5, 013017. Available at: <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.013017>.
9. Nakamura S., Shinohara S., et al. Nonlinear Scar Modes Generated by Self-Organization of Resonance Modes, *Proc. NOLTA*. Catania, 2023, pp. 682-682. DOI: 10.34385/proc.76.D1L-34.
10. Wigner E. Über die elastischen Eigenschwingungen symmetrischer systeme, *Nachricht. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* Berlin, 1930.
11. Petrashen M.I., Trifonov E.D. Applications of group theory in quantum mechanics. Cambridge, MIT Press, 1969.

12. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V. Nelineynaya dinamika uprugikh sistem [Nonlinear dynamics of elastic systems], *Modeli, metody, yavleniya* [Models, Methods, Phenomena]. Moscow: Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2019, 715 p.
13. Korznikova E.A., Bokiy D.I., Dmitriev S.V. Nelineynaya dinamika geksgonal'noy reshetki [Nonlinear dynamics of a hexagonal lattice]. Saint Petersburg: Izd-vo «Naukoemkie tekhnologii», 2018, 114 p.
14. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, 1965, 15 (6), pp. 240-243.
15. Khasseh R., Fazio R., Ruffo S., & Russomanno A. Many-Body Synchronization in a Classical Hamiltonian system, *Physical Review Letters*, 2019, 123 (18), 184301. Available at: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.184301>.
16. Trengginas E.P. Sutantyo et al. Chaotic behaviour of modified hamiltonian Peyrard-Bishop-Dauxois model on DNA system, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1245 012070. DOI 10.1088/1742-6596/1245/1/012070.
17. Lobzenko I.P., Chechin G.M., Bezuglova G.S. et al. Ab initio simulation of gap discrete breathers in strained grapheme, *Phys. Solid State*, 2016, 58, pp. 633-639. Available at: <https://doi.org/10.1134/S1063783416030203>.
18. Ryabov D.S., Chechin G.M., Naumov E.K. et al. One-component delocalized nonlinear vibrational modes of square lattices, *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111, pp. 8135-8153. Available at: <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08264-6>.
19. Korznikova E.A., Shcherbinin S.A., Ryabov D.S., Chechin G.M., Ekomasov E.G., Barani E., Zhou K., Dmitriev S.V. Delocalized nonlinear vibrational modes in graphene: second harmonic generation and negative pressure, *Physica Status Solidi (b)*, 2019, 256, 1800061. Available at: <https://doi.org/10.1002/pssb.201800061>.
20. Ryabov D.S., Chechin G.M., Upadhyaya A. et al. Delocalized nonlinear vibrational modes of triangular lattices, *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102, pp. 2793-2810. Available at: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06015-5>.
21. Shcherbinin S.A., Semenova M.N., Semenov A.S. et al. Dynamics of a three-component delocalized nonlinear vibrational mode in grapheme, *Phys. Solid State*, 2019, 61, pp. 2139-2144. Available at: <https://doi.org/10.1134/S1063783419110313>.
22. Abdullina D.U., Semagina A.S., Ryabov D.S., Chechin G.M., Korznikova E.A., Baimova J.A., & Dmitriev S.V. Stability of in-plane delocalized vibrational modes in triangular Morse lattice, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, 447 (1), 012060. Available at: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/447/1/012060>.
23. Chechin G.M., & Lapina V.S. Discrete breathers of new type in monoatomic chains, *arXiv*, 2018. Available at: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.08901>.
24. Chechin G.M., & Lapina V.S. Universal bi-structures of strained monoatomic chains, *Computational Materials Science*, 2020, 177, 109578. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2019.109578>.
25. Chechin G., Ryabov D., Shcherbinin S. Large-amplitude in-plane atomic vibrations in strained graphene monolayer: bushes of nonlinear normal modes, *Letters on Materials*, 2017. – 7 (4), pp. 367-372. DOI: 10.17580/ism.2017.04.07.
26. Baimova Yu.A., Shcherbinin S.A., Chechin G.M., Dmitriev S.V. Ob ustoychivosti odnomernykh bushey nelineynykh kolebatel'nykh mod v grafene [On the stability of one-dimensional bushes of nonlinear vibrational modes in graphene], *Letters on Materials*, 2018, 8 (1), pp. 43-48. Available at: <https://doi.org/10.22226/2410-3535-2018-1-43-48>.
27. Shcherbinin S.A., Krylova K.A., Chechin G.M., Soboleva E.G., Dmitriev S.V. Delocalized nonlinear vibrational modes in fcc metals, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, Vol. 105, pp. 106083. DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.106083.
28. Kedrov A.A., Shcherbinin S.A. Issledovanie ustoychivosti kolebatel'noy π -mody v vozmushchennoy tsepoche Tody [Study of stability of oscillatory π -mode in perturbed Toda chain], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Bulletin of higher educational institutions. Applied nonlinear dynamics], 2026, Vol. 34, No. 2, pp. 206-222. DOI: 10.18500/0869-6632-003202. EDN: NRVWDG.
29. Ryabov D.S., Kosarev I.V., Xiong D., Kudreyko A.A., Dmitriev S.V. Delocalized Nonlinear Vibrational Modes in Bcc Lattice for Testing and Improving Interatomic Potentials, *Computers, Materials and Continua*, 2025, 82 (3), pp. 3797-3820. Available at: <https://doi.org/10.32604/cmc.2025.062079>.
30. Ryabov D.S., Bezuglova G.S., Korznikova E.A., & Dmitriev S.V. Testing interatomic potentials for binary alloys using exact solutions to the equations of atomic motion, *Computational Materials Science*, 2024, 242, 113054. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2024.113054>.
31. Kosarev I.V., Abdullina D.U., Dmitriev S.V. Delokalizovannyye nelineynyye kolebatel'nyye mody OTSK reshetki [Delocalized nonlinear vibrational modes of the bcc lattice], *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Altai State University], 2025, No. 1 (141), pp. 58-66. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-07.

32. Chechin G., Ryabov D. Exact solutions of nonlinear dynamical equations for large-amplitude atomic vibrations in arbitrary monoatomic chains with fixed ends, *arXiv:2109.09101v1*, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107176>.
33. Semenov A.S., Ryabov D.S., Chechin G.M., Dmitriev S.V. Lokalizovannye i delokalizovannye nelineynye kolebatel'nye mody treugol'noy reshetki [Localized and delocalized nonlinear vibrational modes of a triangular lattice], *Kompleksnyy analiz, matematicheskaya fizika i nelineynye uravneniya* [Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations], 2021, pp. 64-65.
34. Chechin G., Ryabov D. Properties of large-amplitudes vibrations in dynamical systems with discrete symmetry. Geometrical aspects, *arXiv:2005.13343v1*, 2020. Available at: <https://arxiv.org/abs/2005.13343v1>.

Бурлаченко Иван Сергеевич – Южный федеральный университет; e-mail: iburlachenko@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79054395264; кафедра физико-математических основ инженерного образования; ассистент.

Чечин Георгий Михайлович – НИИ Физики, Южный федеральный университет; e-mail: gmchechin@sfedu.ru; г. Ростов-на-Дону, Россия; тел.: +79054315081; с.н.с.; к.ф.-м.н.

Burlachenko Ivan Sergeevich – Southern Federal University; e-mail: iburlachenko@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79054395264; the Department of Physical and Mathematical Foundations of Engineering Education; assistant.

Chechin Georgy Mikhailovich – Research Institute of Physics, Southern Federal University; e-mail: gmchechin@sfedu.ru; Rostov-on-Don, Russia, phone: +79054315081; senior researcher; cand. phys. and math. sc.

УДК 003.26

DOI 10.18522/2311-3103-2026-4-201-212

Ж.-М.Н. Дакуо, С.В. Беззатеев, В.В. Давыдов, И.Д. Иогансон, А.Ф. Хуцаева

МОДЕЛЬ СХЕМЫ ЭЛЕКТРОННОГО ГОЛОСОВАНИЯ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ РЕШЕНИЯ УЧАСТНИКОМ ДО МОМЕНТА ОКОНЧАНИЯ ГОЛОСОВАНИЯ

Существующие протоколы электронного голосования, как правило, обладают архитектурой, в которой отправка бюллетеня является необратимым действием. Такой подход ограничивает удобство использования системы, поскольку участник не может исправить случайную ошибку или изменить свое решение в течение периода голосования без прохождения повторной процедуры аутентификации либо аннулирования ранее поданного бюллетеня. Целью настоящей работы является разработка теоретической модели криптографического протокола электронного голосования, обеспечивающей нативную возможность многократного изменения решения для повышения удобства использования при сохранении анонимности и корректности подсчета. Архитектура предлагаемой модели основана на совместном использовании схемы обязательств с потайным входом для реализации свойства изменения решения, проверяемой случайной функции (VRF) для формирования бюллетеней, протокола Privacy Pass для анонимной авторизации участников и смешанных сетей (Mix-Nets), обеспечивающих сокрытие связи между пользователем и передаваемыми сообщениями. Разработан протокол электронного голосования, позволяющий участнику неоднократно изменять свое решение без повторного обращения к центру регистрации после получения права на участие в голосовании, что уменьшает количество интерактивных действий и повышает удобство использования системы. Проведен теоретический анализ стойкости предложенной модели, подтверждающий выполнение основных и ряда расширенных свойств, включая, полноту, устойчивость, приемлемость, проверяемость, конфиденциальность участника, одноразовость, справедливость, атомарную и универсальную проверяемость, а также возможность изменения решения. Благодаря модульной архитектуре модель допускает применение различных криптографических примитивов, включая постквантовые алгоритмы, без изменения общей логики функционирования протокола, что делает предложенный подход перспективной основой для построения защищенных систем электронного голосования, стойких к атакам квантового компьютера.

Электронное голосование; схема обязательств с потайным входом; изменение решения; проверяемая случайная функция; универсальная проверяемость; Privacy Pass; анонимность.