

М.М. Сорокин, Л.А. Гладков, Н.В. Гладкова**СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ 3D УПАКОВКИ**

Статья посвящена рассмотрению современных тенденций и подходов к решению актуальной оптимизационной задачи трехмерной упаковки в контейнеры. Важность построения эффективных методов решения данной задачи обусловлена бурным ростом направления электронной коммерции, когда достижение даже инкрементных улучшений плотности заполнения контейнеров грузами может привести к значительным сокращениям затрат на перевозку и хранение грузов. В статье приведен анализ различных типов задач и предложена классификация задач упаковки по различным критериям, в том числе: офлайн- и онлайн-упаковка, по размерности, по видам и количеству контейнеров и грузов. Приведена постановка классической оптимизационной задачи о рюкзаке и рассмотрены различные варианты ограничений, обусловленные особенностями решаемых задач. Приведен краткий обзор основных подходов к решению задачи. Выполнен анализ и обобщение характерных особенностей применения метаэвристических подходов, основанных на использовании эволюционных и биоинспирированных алгоритмов и методов машинного обучения, отмечены их достоинства и недостатки. В силу сложности рассматриваемой задачи предлагается активно использовать известные и разрабатывать новые модификации метаэвристических алгоритмов, которые позволяют находить квазиоптимальные решения за полиномиальное время. Приведен анализ известных методов машинного обучения, биоинспирированных алгоритмов, описаны принципы их работы, выделены их основные особенности, преимущества и недостатки, отмечена перспективность их разработки и применения для решения NP-полных задач комбинаторной оптимизации. Приведен обобщенный принцип работы метаэвристических алгоритмов. Сравнительный анализ применения различных методов оптимизации показал эффективность использования метаэвристических методов для решения задачи трехмерной упаковки.

Методы оптимизации; задача трехмерной упаковки; метаэвристические алгоритмы; биоинспирированные методы; машинное обучение.

M.M. Sorokin, L.A. Gladkov, N.V. Gladkova**MODERN APPROACHES TO SOLVING THE 3D BIN PACKING PROBLEM**

The article is devoted to the consideration of current trends and approaches to solving the urgent optimization problem of three-dimensional bin packing problem. The importance of building effective methods for solving this problem is due to the rapid growth of e-commerce, where achieving even incremental improvements in container filling density can lead to significant reductions in freight transportation and storage costs. The article provides an analysis of various types of problems and suggests a classification of bin packing problems according to various criteria, including: offline and online packing, by dimension, by type and quantity of containers and cargo. The formulation of the classical optimization knapsack problem is given and various options for constraints due to the specifics of the tasks being solved are considered. A brief overview of the main approaches to solving the problem is given. The analysis and generalization of the characteristic features of the application of metaheuristic approaches based on the use of evolutionary and bioinspired algorithms and machine learning methods is carried out, their advantages and disadvantages are noted. Due to the complexity of the problem under consideration, it is proposed to actively use known and develop new modifications of metaheuristic algorithms that make it possible to find quasi-optimal solutions in polynomial time. The analysis of known machine learning methods and bioinspired algorithms is given, the principles of their operation are described, their main features, advantages and disadvantages are highlighted, and the prospects for their development and application to solve NP-complete combinatorial optimization problems are noted. A generalized principle of operation of metaheuristic algorithms is given. A comparative analysis of the application of various optimization methods has shown the effectiveness of using metaheuristic methods to solve the problem of three-dimensional packaging.

Optimization methods; three-dimensional bin packing problem; metaheuristic algorithms; bioinspired methods; machine learning.

Введение. Актуальность разработки новых методов решения задачи упаковки, позволяющих повысить плотность и возможную загрузку контейнеров, обусловлена практической ценностью и возможностью применения в самых различных прикладных областях. Область практического использования данной задачи необычайно широка: заполнение и погрузка контейнеров в различных видах транспортных перевозок (ж/д, авиа- и морские перевозки), логистика, задачи оптимизации перемещения и складирования товаров, распределение товаров по складам и партиям. Необходимость интеграции экономик различных регионов и создание единого внутрироссийского экономического пространства определяют требования к пропускной способности транспортных терминалов и складов временного хранения. Соответственно, скорость и стоимость доставки товаров между производителями и потребителем напрямую зависят от эффективности работы информационных процессов на складах, моделирующих процессы разгрузки контейнеров, их временное хранение на складе и их отправку. Актуальность задачи и ее экономическая значимость растут по мере активного развития электронной коммерции, которая трансформирует логистические процессы. Так, в 2023 году только в Китае службы доставки обработали 37.1 млрд отправок, продемонстрировав рост на 17% по сравнению с предыдущим годом [1].

Кроме того, специфика электронной коммерции (а именно, преобладание высокочастотных заказов малого объема с широким ассортиментом товарных позиций, необходимость работы с разнотипной тарой и необходимость принятия решений в режиме реального времени) принципиально усложняет логистику и значимость эффективности методов упаковки [1, 2]. Это превращает классическую задачу трехмерной упаковки в острую операционную проблему, решение которой имеет не только экономическое, но и экологическое значение. Нерациональная упаковка приводит к увеличению объемов отходов и представляет серьезную угрозу для окружающей среды, а максимизация плотности упаковки определяет суммарные операционные расходы и общую устойчивость логистической цепочки производителя [1, 3]. Таким образом, разработка новых и модернизация существующих алгоритмов оптимизации, способных находить эффективные решения в условиях высокой неопределенности и множественных ограничений, является критически важным фактором повышения эффективности работы терминалов, складов и логистических центров. А задача создания новых моделей, методов и алгоритмов оптимизации таких информационных процессов является актуальной научной задачей и составляет научно-техническую проблему, имеющую важное народно-хозяйственное значение.

Классификация типов задач упаковки. Целью решения задачи трехмерной упаковки является построение эффективного варианта размещения объектов в трехмерном пространстве с одновременной максимизацией плотности их размещения [4]. Точное решение данной задачи невозможно получить за полиномиальное время, поскольку данная задача относится к классу NP-полных и NP-трудных задач. Поэтому целью, в данном случае, является получение «квазиоптимального» решения за приемлемое время. Как показывает практика, наиболее эффективными подходами к решению задачи трехмерной упаковки являются метаэвристические алгоритмы, в том числе генетические, биоинспирированные, роевые методы [5–8]. Получение качественного решения в этом случае, как правило, достигается путем итеративного улучшения решений, в том числе в условиях неопределенности и в нечетких условиях.

Задачи трехмерной упаковки подразделяются на два класса: задачи оффлайн- и онлайн-упаковки. Задачи оффлайн-упаковки работают с предоставленным полным набором необходимых исходных данных о грузах, в них возможно выполнить моделирование последовательности упаковки грузов или сортировки грузов. В задачах онлайн-упаковки требуется незамедлительная погрузка поступающих поодиночке грузов в контейнеры в режиме реального времени, без полного предварительного знания о них, что повышает сложность задачи.

Задача упаковки также может быть классифицирована по количеству измерений: одно-, двух- и трехмерная упаковка. При одномерной упаковке решается задача распределения участков на ленте заданной длины, ширина ленты считается несущественной

или фиксированной. Примерами задачи одномерной упаковки являются: задача о рюкзаке, задача разрезания стальных прутьев определенной длины, задача распределения времени между процессами в операционных системах.

При двумерной упаковке решается задача распределения двумерных объектов (прямоугольной или произвольной формы) в двухмерных контейнерах. Типичным примером задачи двумерной упаковки является задача раскроя листов стекла или металла с целью минимизации отходов.

Самая сложная задача – трехмерная упаковка – подразумевает распределение объемных объектов в трехмерном пространстве. Как правило, при трехмерной упаковке рассматриваются объекты в форме параллелепипеда (которые зачастую моделируют упакованные товары), но возможны также варианты задачи трехмерной упаковки для объектов сложной формы. Модели задач трехмерной упаковки применяются, как правило, при погрузке в контейнеры с учетом практических особенностей различных предметных областей, но также возможно применение данных моделей в других прикладных областях, например, при 3D-печати методом запекания порошка. В более абстрактном понимании, разновидностью задачи трехмерной упаковки является задача построения расписаний, в которой одной из трех координат пространства упаковки является время.

Среди различных типов задач трехмерной упаковки в контейнеры можно выделить следующие четыре класса:

- ♦ упаковка в полосу. При этом используется один «контейнер», два измерения которого фиксированы, а третье является переменным. Целью является минимизация длины контейнера по переменному измерению;
- ♦ упаковка в контейнеры – выполняется поиск наименьшего числа контейнеров, одинаковой размерности и стоимости использования, в которое можно распределить все имеющиеся объекты;
- ♦ многоконтейнерная упаковка. Используется множество контейнеров разных размеров и стоимости. Цель – минимизация суммарной стоимости контейнеров, которые были использованы при решении задачи упаковки;
- ♦ задача о рюкзаке подразумевает распределение нескольких типов упаковываемых объектов (все объекты одного типа имеют одинаковый размер) в один контейнер фиксированного объема. Цель – максимизация плотности упаковки объектов.

Постановка задачи. Задача трехмерной упаковки может быть сформулирована следующим образом. Необходимо разместить в трехмерном пространстве ограниченного размера максимальное число элементов различной формы и объема. Исходными данными являются размер контейнера и размеры располагаемых элементов. Каждый i -й элемент описывается тремя параметрами: ширина w_i , длина l_i и высота h_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Дана область контейнера, имеющая форму параллелепипеда с шириной W , длиной L и высотой H . Расположение каждого i -го элемента в контейнере описывается координатами двух его углов: $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$, наиболее близкого к началу координат, и $\langle x_2, y_2, z_2 \rangle$, наиболее удаленного от начала координат. Решение задачи представляется в следующей форме:

$$S = \{s_i = (\langle x_{1i}, y_{1i}, z_{1i} \rangle, \langle x_{2i}, y_{2i}, z_{2i} \rangle) | i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Тогда целью является минимизация объема пустот в области упаковки и, следовательно, целевую функцию можно записать в следующем виде:

$$\text{ЦФ} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{V} \rightarrow 1,$$

где v_i – объем i -го элемента, V – объем ограничивающего параллелепипеда, требующегося для упаковки всех элементов (называемый областью упаковки).

При размещении объектов учитываются следующие базовые ограничения:

1. Ни один объект не должен выходить за границы контейнера.
2. Суммарный объем объектов не должен превышать объем области упаковки.
3. Отсутствуют пересечения объектов друг с другом.
4. Объекты располагаются параллельно граням области упаковки.
5. Все точки основания всех объектов лежат либо на дне области упаковки, либо на верхних гранях других объектов.

В зависимости от особенностей конкретной предметной области может потребоваться введение дополнительных ограничений в используемую модель задачи упаковки. Рассмотрим некоторые из них:

- ◆ ограничение возможной ориентации объекта (например, необходимость перевезти товар вертикально);
- ◆ ограничение веса, который можно располагать над объектом;
- ◆ ограничения на расположение объекта при транспортировке (например, необходимость располагать крупногабаритные объекты на полу контейнера или фиксировать их положение ниже определенной высоты; установка определенных типов объектов рядом с дверцей контейнера);
- ◆ ограничения на устойчивость груза (необходимость обеспечить устойчивость груза при перевозке и при проведении погрузки или разгрузки контейнера);
- ◆ разные типы группировки объектов, в том числе:
- ◆ по получателю и по типу товара;
- ◆ по пункту назначения (когда контейнер предназначен для отправки грузов в несколько пунктов назначения, нужно располагать грузы, предназначенные для одного пункта, в тесном порядке друг с другом);
- ◆ разделение различных типов объектов в контейнере (например, необходимость отделить пищевые товары от остальных категорий товаров);
- ◆ равномерное распределение веса внутри контейнера (с помощью вычисления центра масс);
- ◆ ограничение по суммарному весу контейнера (при тяжелом грузе может оказаться более значимым ограничением, чем объем контейнера).

При этом важно отметить, что дополнительные ограничения не обязательно применяются одновременно: отдельные из них могут оказаться противоречивыми по отношению друг к другу, или их введение может быть необходимо из-за требований перевозчика (отправителя) в отдельно взятом случае.

Кроме того, выбор формы грузов сам по себе также можно рассматривать как отдельное ограничение. Очевидно, что подавляющее большинство задач и применяемых подходов рассматривает объекты в форме параллелепипеда, что обусловлено сложностью подбора математических моделей, позволяющих получить адекватное описание объектов сложной формы. Тем не менее в научной литературе описаны задачи, в которых используются объекты произвольной формы, например в форме цилиндра или шара. Так, в работе [9] предложена пространственная модель, основанная на частицах, для объектов в виде параллелепипеда и фигур сложной формы. В основе предлагаемой модели – описание объектов сложной формы в виде трехмерного облака точек с использованием переходов от разреженных и неравномерных облаков точек к выпуклым оболочкам с помощью метода грануляции. В работе [10] описана модель задачи упаковки крепежных изделий трех форм (шестигранных гаек, болтов с шестигранной головкой и цилиндров) в контейнеры переменной размерности. Предлагается иерархический подход, согласно которому исходная задача решается на трех уровнях:

- ◆ уровень 1 – упаковка крепежных изделий одинаковой формы в коробки малой размерности (задача трехмерной упаковки грузов сложной формы);
- ◆ уровень 2 – упаковка картонных коробок в ящики (задача упаковки в контейнеры);
- ◆ уровень 3 – упаковка ящиков в один контейнер (задача о рюкзаке).

Цель – максимизация плотности заполнения контейнера. При этом используются следующие ограничения:

- ◆ ограничение ориентации объектов;
- ◆ все объекты должны помещаться внутри контейнера;
- ◆ отсутствие пересечений (наложения) объектов друг с другом;
- ◆ возможность расположения объектов только параллельно граням контейнера;
- ◆ выполнение условия, что нижняя поверхность объектов, расположенных на втором и последующих уровнях относительно дна контейнера должна иметь в качестве опоры объекты предыдущего уровня.

Также возможно ограничение по соотношению площади соприкосновения объектов, расположенных на различных уровнях [10].

Обзор и анализ подходов к решению задачи трехмерной упаковки. Существует несколько различных классов алгоритмов, используемых для решения задачи трехмерной упаковки.

Точные алгоритмы. Точные алгоритмы выполняют поиск в области допустимых решений и гарантированно находят оптимальное решение. Применение точных алгоритмов ограничено задачами небольшой размерности, при небольшом количестве грузов и заданных ограничений, а также при наличии высокой однородности размещаемых грузов. В настоящее время точные алгоритмы практически не применяются для решения NP-сложных задач, но использование их в комбинации с эвристическими методами может повысить их скорость и качество получаемых решений [11, 12].

Традиционно, для решения задачи трехмерной упаковки, используются методы смешанно-целочисленного линейного программирования (MILP) [13].

Так, исследование [14] продемонстрировало, что возможно учитывать практические ограничения (например, ограничение по весу и ограничение динамической устойчивости) и применять данные методы для решения задач с размерностью до 100 объектов.

В работе [12] была представлена модель смешанно-целочисленного линейного программирования для решения задачи размещения в одном контейнере. Предложенная модель учитывает множество практических ограничений, в том числе, например, соблюдение приоритетов погрузки и вычисления центра масс. Данная модель позволяет получать оптимальные решения для задач размерностью до 16 грузов, что объясняется высокой вычислительной сложностью. В исследовании [11] был предложен точный алгоритм решения задачи о рюкзаке, основанный на методах линейного программирования. Данный алгоритм позволяет учитывать до 12 практических ограничений и успешно применяется для задач с размерностью до 110 элементов.

Эвристические алгоритмы. Высокая вычислительная сложность реальных практических задач трехмерной упаковки приводит к тому, что основным методом их решения являются эвристические алгоритмы. Основной идеей подавляющего большинства эвристических методов является стремление сократить или упростить пространство поиска решений, за счет оценки потенциально оптимальных и отсекация неоптимальных решений. Таким образом, одна большая исходная задача разбивается в процессе решения на множество подзадач, а получаемые результаты затем обобщаются с учетом специфических характеристик задачи. Общий подход, применяемый при решении с использованием эвристических методов, основан на конструктивном подходе, который состоит из трех этапов:

1. Генерация шаблона погрузки – определение структуры наборов грузов и допустимых объемов, в которые они могут быть размещены.

Различные шаблоны погрузки позволяют по-разному использовать объем упаковки (например, отдавая предпочтение определенной ориентации упаковки перед другими, ограничивая размещение определенными областями, обеспечивая наличие определенных точек соприкосновения между упакованными товарами). Общая идея заключается в создании из множества грузов неких укрупнённых структур (шаблонов, облегчающих упаковку) и последующей оптимизации размещения этих укрупнённых структур. Для генерации шаблона погрузки необходимо разработать стратегию размещения. Возможны следующие основные типы стратегии размещения:

♦ *построение слоев.* Построение слоев – это шаблон, при котором грузы размещаются горизонтально или вертикально (построение стен) слой за слоем. При такой схеме загрузки элементы сначала размещаются на дне контейнера для создания первого слоя. Последующие слои накладываются поверх предыдущего слоя или рядом с ним до тех пор, пока в контейнер больше не останется места. Существует множество различных стратегий построения слоев. Например, слои могут создаваться только с использованием однородных элементов [15]. В других случаях допускается включение в один слой неоднородных грузов разных типов. Или в процессе погрузки вначале создается несколько слоев однородных объектов, которые затем объединяются между собой по вертикали, в

результате чего получается общий гетерогенный слой [16]. Другая возможная стратегия состоит в создании нескольких слоев элементов одинаковой высоты и дальнейшем распределении их таким образом, чтобы высота слоя была близка к геометрическому центру контейнера [17]. В качестве критериев создания гетерогенных слоев в работе [18] было предложено использовать предельную величину нагрузки и вес грузов. В некоторых вариантах задачи трехмерной упаковки рассматриваются многокамерные контейнеры. В этом случае алгоритм построения слоев учитывает геометрические размеры всех камер. При этом, в случае, когда комбинируются изделия разных типов, плотность укладки слоев обычно считается показателем качества слоя [19].

♦ *построение блоков*. Стратегия построения блоков подразумевает формирование из грузов блоков в форме параллелепипедов и их последующую загрузку в контейнер. Блоки могут быть как однородными (состоящими из одинаковых грузов), так и неоднородными. Пример построения однородных блоков показан в работе [20], где для уменьшения размеров блоков и оптимизации их размещения в контейнере использован вероятностный метод. В работах [21, 22] приведен пример построения неоднородных блоков, при котором погрузка блоков в контейнер производится с помощью алгоритма поиска по дереву решений. В работе [23] используется похожая стратегия, согласно которой сначала формируются неоднородные блоки, которые затем располагаются с помощью алгоритма имитации отжига.

♦ *штабелирование*. В основе стратегии штабелирования лежит следующая идея: грузы сначала располагаются вертикальными стопками, а затем эти стопки размещаются на полу контейнера, что сводит рассматриваемую задачу к задаче двухмерной упаковки, которая имеет меньшую вычислительную сложность [24].

♦ *построение стены*. Стратегия построения стены описана в [25, 26], где используется модель классической задачи о рюкзаке и необходимо сформировать полосы коробок, а затем сгруппировать их в вертикальные слои.

2. Формирование последовательности упаковки – определение порядка расположения грузов, удовлетворяющих заданному набору ограничений.

3. Оценка решения и выполнение итераций – оценка качества получаемого решения и повторение алгоритма до тех пор, пока не будет достигнут заданный набор значений параметров качества.

Этапы формирования последовательности упаковки и оценки решения оказывают большое влияние на эффективность алгоритмов упаковки. При этом возможны два подхода к формированию последовательности упаковки: *статическая* и *динамическая* последовательность. Статическая последовательность задается в алгоритме до начала выполнения алгоритма и не изменяется в процессе упаковки [26]. Динамическая последовательность может быть скорректирована в процессе выполнения алгоритма в зависимости от результатов оценки значений параметров задачи [27].

Методы машинного обучения. Применение эвристических и гибридных методов позволяет улучшить качество получаемых результатов, а также исследовать большую часть пространства решений. Однако это достигается за счет увеличения вычислительной сложности алгоритмов. Потенциальной альтернативой эвристическим методам в настоящее время являются подходы, основанные на машинном обучении, которые в отдельных случаях позволяют получать лучшие результаты. Общая идея применения методов машинного обучения для решения задачи трехмерной упаковки состоит в использовании специальных классификаторов на основе известных примеров успешной предварительной упаковки контейнеров. Недостатком подходов, основанных на машинном обучении, является то, что они не могут гарантировать выполнение всех заданных ограничений для всех решений. Преимущество подходов на основе машинного обучения состоит в том, что решение может быть получено гораздо быстрее, чем это возможно при использовании точных или эвристических методов.

Пример подхода к решению задачи упаковки с использованием машинного обучения показан в работе [28], где для решения задачи трехмерного размещения грузов с минимизацией суммарного объема используется глубокое обучение с подкреплением в со-

четании с эвристическим методом. Метод глубокого обучения используется для определения и оптимизации порядка расположения грузов, а с помощью эвристического алгоритма определяется наилучшее положение и ориентация для каждого элемента. В работе [29] приведен модифицированный алгоритм из [28], улучшенный за счет использования многозадачного обучения (обучение с подкреплением и обучение с учителем) для одновременного определения порядка и ориентации объектов. В работе [30] предложена другая модель оптимизации, основанная на обучении с подкреплением, которая позволяет определить оптимальную последовательность выбора и ориентацию блоков. Данный подход предполагает наличие набора предварительно зафиксированных элементов и направлен на формирование последовательности упаковки. В исследовании [31] для оценки выбранной стратегии размещения использована глубокая нейронная сеть, а для улучшения этой стратегии используется алгоритм поиска по методу Монте-Карло.

Эволюционные и биоинспирированные алгоритмы решения задачи трехмерной упаковки. Согласно принятой в настоящее время точке зрения биоинспирированными (или вдохновленными природой) алгоритмами называется большая группа метаэвристических алгоритмов оптимизации, имитирующих процессы, протекающие как в живой, так и в неживой природе. Рассмотрим примеры биоинспирированных алгоритмов, используемые для решения задачи трехмерной упаковки.

Муравьиный алгоритм. Алгоритм муравьиной колонии основан на имитации поведения муравьиной колонии в процессе поиска пищи и взаимодействия между отдельными группами муравьев. В его основе лежит способность муравьев находить кратчайший путь и адаптироваться к изменяющимся внешним условиям. Муравьиная колония при этом рассматривается как многоагентная система, в которой особи (агенты) взаимодействуют между собой с помощью как прямого (химический и визуальный контакт), так и непрямого (стигмергия) обмена информацией. При движении каждый агент помечает свой путь феромоном (в алгоритме это некое числовое значение), что отражает приоритет выбора пути, который в дальнейшем используется другими агентами. После каждой итерации лучшие пути получают большее количество (значение) феромонов, а некоторая часть феромонов испаряется, что позволяет избежать преждевременной сходимости. К числу достоинств алгоритма относят устойчивость к попаданию в локальный оптимум, универсальность, масштабируемость и возможность организации параллельных вычислений. Недостатками являются необходимость прохождения большого количества итераций для сходимости и высокая зависимость от заданных настроек параметров алгоритма.

Метод роя частиц. В пространстве поиска решений случайным образом располагаются частицы, каждая из которых обладает координатой, скоростью и памятью. На каждой итерации вычисляется значение целевой функции для каждой частицы, а также определяется глобально лучшее решение, вдобавок, каждая частица запоминает лучшее из найденных ею решений. После этого производится обновление координат и скоростей частиц. На основе информации о текущем глобально лучшем решении производится корректировка скоростей и направлений движения частиц. Процесс поиска является итерационным и продолжается до достижения заданного максимального числа итераций или получения необходимой точности решения. Достоинствами метода роя частиц являются простота реализации, возможность организации параллельных вычислений, эффективность для решения задач большой размерности. Однако, данный алгоритм также требует тонкой настройки входных параметров, кроме того, его невозможно применять для решения задач с дискретной целевой функцией.

В работе [32] представлен подход к решению многокритериальной задачи двумерной упаковки с использованием нескольких ограничений. Для её решения предложен многокритериальный алгоритм роя частиц, который использует оптимальность по Парето для создания популяции решений. В процессе эволюции для увеличения разнообразия получаемых решений используется оператор мутации, что повышает гибкость алгоритма. Важным моментом является то, что в данном алгоритме направление движения частиц определяется на основе либо оценки пригодности каждого решения, либо глобальной оценки пригодности, но не с обеими оценками пригодности сразу.

Алгоритм искусственной пчелиной колонии. Алгоритм построен на имитации поведения пчел при поиске нектара и обмене информацией об источниках пищи с другими пчелами в улье. Источник пищи представляется в виде координаты в пространстве поиска и представляет собой вариант решения, а количество нектара интерпретируется как целевая функция задачи оптимизации. Для успешного применения данного алгоритма необходимо иметь возможность вычисления топологического расстояния между точками в пространстве решений. В начале работы алгоритма создается популяция пчёл, при этом пчёлы разделяются на два вида: пчелы-разведчики и пчелы-рабочие. Пчёлы-разведчики вылетают из улья в случайном направлении и производят поиск нектара на больших областях. Вернувшись в улей, они сообщают информацию о количестве обнаруженного нектара и его расположении. Затем производится оценка полученной информации на основе расчета функции пригодности и выделяются элитные участки. Затем в найденные элитные участки вылетают пчёлы-рабочие и добывают там нектар, а также исследуют их окрестности, а пчёлы-разведчики занимаются поиском новых участков. Если качество источника пищи не улучшается в течение заданного количества итераций, то текущий участок исключается из рассмотрения, а занятая работой на нем пчела-рабочий становится разведчиком. Таким образом, за счет комбинирования работы пчёл-разведчиков и пчел-рабочих, происходит итеративное улучшение текущей выборки решений. Количество пчёл разных видов, число и размеры участков, а также максимальное количество итераций являются настраиваемыми параметрами алгоритма. К преимуществам алгоритма можно отнести возможность быстрого обнаружения областей с высоким значением целевой функции, эффективность применения для решения многомерных задач и задач с непрерывной целевой функцией, а также возможность организации параллельных вычислений. В качестве недостатков алгоритма можно выделить высокую чувствительность к выбору значений управляющих параметров и отсутствие памяти, т.е. невозможность использования опыта предыдущих итераций для повышения скорости сходимости алгоритма.

Так, например, в работе [33] был предложен эвристический популяционный гибридный алгоритм, основанный на комбинации алгоритма искусственной пчелиной колонии и генетического алгоритма. В работе [34] описан алгоритм искусственной пчелиной колонии, включающий две эвристики загрузки для объединенной задачи трехмерной упаковки контейнеров и оптимизации маршрутов с учетом ограничений на грузоподъемность транспортных средств. При этом задача трехмерной упаковки решается с помощью применения различных эвристик, а для оптимизации маршрутов использовался алгоритм искусственной пчелиной колонии. Варианты решения в алгоритме искусственной пчелиной колонии формировались с помощью новой методики вещественного кодирования.

Светлячковый алгоритм. Метаэвристический алгоритм, вдохновленный движением роя светлячков к свету. Отдельный светлячок при этом интерпретируется как возможное решение. Яркость светлячка соответствует качеству решения, которое в случае с задачей упаковки определяется количеством использованных контейнеров или суммарным объемом. Алгоритм моделирует механизм движения менее ярких светлячков в направлении более ярких; этот процесс определяется функцией привлекательности, которая затухает по мере увеличения расстояния в пространстве решений. Такое поведение облегчает поиск глобального оптимума, позволяя оценивать различные последовательности упаковки и ориентацию предметов. Для задачи трехмерной упаковки решение обычно кодируется в виде последовательности перестановок грузов. Оператор движения адаптирован к этому комбинаторному процессу за счет использования таких операций, как сложные перестановки или последовательности мутации. Также используется детерминированная эвристика размещения (алгоритм максимального пространства или гильотинной резки) для преобразования последовательности перестановок в допустимый вариант упаковки и оценки качества полученного решения. Стохастическая и коллективная природа этого подхода повышает его способность избегать локальных экстремумов, что позволяет использовать его при решении задач трехмерной упаковки в ограниченном многомерном пространстве поиска (*highly constrained multi-modal landscape*), где необходимо учи-

тывать ограничения по весу, ориентации и стабильности. При этом можно отметить наличие серьезных трудностей при реализации из-за необходимости дополнительных вычислений при попарном сравнении светлячков, что приводит к квадратичной сложности алгоритма. Данная проблема может быть частично купирована за счет использования гибридизации светлячкового алгоритма с алгоритмами локального поиска (например, табу-поиск). К преимуществам алгоритма можно отнести высокую производительность при решении задач высокой размерности, возможность организации параллельных вычислений и гибкую структуру, которая позволяет легко комбинировать данный алгоритм с другими эвристическими методами. Однако, его эффективность в значительной степени зависит от качества предварительной настройки таких параметров, как коэффициент поглощения света и коэффициент рандомизации.

В работе [35] предложен комплексный подход к решению задачи трехмерной упаковки разнородных объектов в однотипные контейнеры. При упаковке рассматриваются объекты разных геометрических форм: куб, прямоугольная призма, цилиндр и сфера. Алгоритм позволяет учитывать различные практические ограничения, в том числе, ограничение стабильности, ограничения ориентации и несущей способности (load bearing) грузов. Моделирование показало, что проверка выполнения ограничений после размещения каждого объекта в контейнер дает лучшие результаты, чем проверка, выполняемая в конце процесса упаковки всего контейнера, хотя в этом случае увеличивается вычислительная сложность алгоритма. Также предусмотрена процедура предварительной сортировки и категоризации размещаемых объектов по их весу и размеру, что также позволяет улучшить качество получаемых результатов. После окончания работы светлячкового алгоритма, используется эвристика Best Fit для дозаполнения оставшегося свободного места в контейнере. Согласно приведенным данным, алгоритм позволяет в среднем на 22,84% улучшить использование объема контейнеров по сравнению с эвристикой Best Fit и генетическим алгоритмом. Тем не менее, при работе с фиксированным набором объектов для упаковки, иногда в контейнере остается незаполненное пространство (для заполнения которого затем опять-таки использовалась эвристика Best Fit), или, наоборот, некоторые объекты оставались неупакованными после окончания работы алгоритма (что приводит к удалению лучших решений). Кроме того, из-за ограничения стабильности, большинство объектов сферической формы исключалось из итогового варианта упаковки.

В работе [36] также рассмотрена задача трехмерной упаковки объектов сложной формы (в том числе, цилиндров и объектов сложной конфигурации). При этом размещаемые объекты представляются путем аппроксимации их формы с помощью вокселей. Для экономии времени для поиска подходящей позиции, была использована двухэтапная стратегия размещения. Сначала объект помещается в стартовую позицию, и затем выполняется попытка сдвига объекта во всех направлениях для того, чтобы он занял как можно более компактное положение. Таким образом решается задача минимизации имеющихся пустот. Гибридный светлячковый алгоритм используется для определения последовательности упаковки и ориентации объектов. Для инициализации популяции и настройки параметров алгоритма используется хаотический поиск, что позволяет увеличить разнообразие решений, а алгоритм имитации отжига применяется для выхода из локальных оптимумов. Полученные результаты показали, что предложенный гибридный светлячковый алгоритм выполняет упаковку объектов на 14-15% плотнее (по занимаемой высоте) по сравнению с упаковкой в случайном порядке. А по сравнению с классическими генетическим алгоритмом, алгоритмом роя частиц и светлячковым алгоритмом данный модифицированный алгоритм показал лучшие или сопоставимые по качеству результаты в 7 из 9 тестовых примеров. В случае разрешения на вращение объектов на 90 градусов полученные улучшения еще на 4%, но при этом увеличивается время вычислений.

Алгоритм стрекозы. Алгоритм стрекозы представляет собой метаэвристику, которая моделирует статическое и динамическое поведение роя стрекоз. Статический рой (небольшие группы, исследующие разные области) обеспечивает глобальное исследова-

ние пространства поиска, в то время как динамический рой (крупная группа, движущаяся согласованно) выполняет локальный поиск на перспективных участках. Механизм движения стрекоз похож на принцип, реализованный в алгоритме роя частиц, но дополнен сложными социальными правилами. В основе алгоритма лежат следующие пять управляющих социальных принципов:

- ◆ разделение – необходимость избегать столкновений с ближайшими соседями;
- ◆ согласование – поддержание одинаковой скорости с ближайшими особями;
- ◆ сплочённость – движение по направлению центра масс локальной группы;
- ◆ влечение к источнику пищи – движение в сторону источника пищи (лучшего найденного решения);
- ◆ стремление избежать врага – движение в противоположном направлении от наихудшего решения.

Перемещение каждой стрекозы в пространстве поиска определяется вектором, который определяется как взвешенная сумма этих пяти поведенческих факторов. В алгоритме происходит обновление текущей позиции каждого агента на основе использования вычисленного значения вектора шага. Для поддержания баланса между глобальным и локальным поиском, выполняется адаптивная настройка ключевых параметров, таких как инерционный вес и радиусы окрестности для определения соседей. В случае, если у стрекозы нет соседей в пределах её радиуса восприятия, то её позиция обновляется на основе принципа полёта Леви – особого типа случайного блуждания, усиливающего глобальный поиск. К основным преимуществам алгоритма стрекозы относятся его концептуальная простота, возможность поддержания баланса между глобальным и локальным поиском, а также эффективность при решении различных типов задач непрерывной и дискретной оптимизации. Главные недостатки – это высокая чувствительность к настройке параметров, а также вычислительная сложность особенно при решении задач большой размерности, что связано с необходимостью определения соседей для каждого агента на каждой итерации.

Алгоритм африканских буйволов. Алгоритм африканских буйволов – это метаэвристический алгоритм, имитирующий модель поведения, социальной организации и стратегию выживания стада африканских буйволов в их естественной среде обитания. При этом моделируется наблюдаемое у них сложное поведение, в том числе их коллективный образ жизни в больших группах, сезонные миграции, высоко скоординированные коллективные стратегии поиска источников пищи и воды, а также эффективного избегания хищников. В алгоритме реализован процесс обмена информацией между особями в естественной среде посредством звуковых сигналов. Под обучением, в данном случае, понимается процесс адаптации буйволов, основанный на их личном опыте и полученных коллективных знаниях. Каждый буйвол в популяции представляет собой потенциальное решение задачи оптимизации. Работа алгоритма начинается с инициализации стада (множество начальных решений), каждая особь которого занимает случайно выбранную позицию в пространстве поиска. На каждой итерации алгоритма каждый буйвол обновляет свое местоположение на основе сведений из следующих двух источников информации: своего личного лучшего опыта и глобально лучшего местоположения, обнаруженного всем стадом. При этом используются две стратегии поиска – совершенствование текущего лучшего решения ("оставаться и использовать") и исследование нового пространства решений ("двигаться и исследовать"), которые эффективно уравниваются за счет использования стохастических компонентов и специальных коэффициентов.

Отличительной особенностью алгоритма африканских буйволов является использование имитации звуков для управления стадом. Алгоритм итеративно совершенствует решения до тех пор, пока не будет выполнено заданное условие остановки. К преимуществам алгоритма можно отнести концептуальную простоту, небольшое количество настраиваемых параметров и эффективность в обеспечении баланса между исследованием и эксплуатацией (глобальным и локальным поиском), что позволяет применять его для решения различных дискретных и непрерывных задач. Однако алгоритм чувствителен к настройкам параметров, также существует проблема преждевременной сходимости в сложных условиях поиска с множественными экстремумами.

Известны примеры эффективного применения алгоритма африканских буйволов для NP-трудных задач, в частности, одномерных задач упаковки и раскроя. Так, в работе [37] алгоритм африканских буйволов использовался совместно с методом Ranked Order Value для конвертации решений из непрерывного пространства поиска в дискретные решения, необходимые для задачи упаковки. Для повышения эффективности алгоритма и учёта специфики решаемой задачи также используются различные эвристики упаковки (First Fit, Best Fit, First Fit Decreasing, Best Fit Decreasing). По сравнению с другими известными эвристическими алгоритмами (алгоритм муравьиной колонии, светлячковый алгоритм, квантовый и адаптивный алгоритмы кукушки) алгоритм африканских буйволов даёт лучшие результаты в 915 из 1210 тестовых задач одномерной упаковки [38].

В работе [39] был предложен эффективный подход к решению одномерной задачи раскроя на основе алгоритма африканских буйволов. Чтобы избежать преждевременной сходимости из-за частых перезапусков популяции, предложена модификация алгоритма с использованием процедуры «скрещивание и сохранение». В соответствии с данной процедурой, при перезапуске поиска выполняется скрещивание лучших из найденных на данный момент решений с целью создать потенциально более качественное решение. Это позволяет сохранять полученный в процессе поиска прогресс и целенаправленно улучшать решение перед тем, как алгоритм вернется к решению задачи исследования пространства. Предложенный подход позволяет получить лучшие по качеству решения по сравнению с некоторыми точными, эвристическими и метаэвристическими алгоритмами по критерию минимизации отходов в 60% тестовых задач, а по показателю использования материала в 50% тестовых задач.

Алгоритм серых волков. Алгоритм серых волков – это роевой метаэвристический алгоритм, основанный на модели социальной иерархии и коллективного охотничьего поведения стаи серых волков. Он моделирует иерархическую структуру стаи, разделяя популяцию существующих решений на четыре типа:

- ◆ Альфа (α) – наилучшее решение.
- ◆ Бета (β) – второе по качеству решение.
- ◆ Дельта (δ) – третье решение.
- ◆ Омега (ω) – все остальные решения, которые должны следовать за лидерами.

Основная процедура алгоритма воспроизводит коллективный процесс охоты, включающий поиск, окружение и атаку добычи. Управление процессом поиска и оптимизации выполняется на основе учета позиций, занимаемых тремя ведущими волками (α , β и δ). Остальные волки (Омега) на каждой итерации корректируют свои позиции на основе расчета местоположения лидеров, таким образом, вся популяция движется в направлении к наиболее перспективным областям пространства поиска. Ключевым элементом алгоритма серых волков является его адаптивный механизм поддержания баланса между глобальным (оператор «поиска») и локальным поиском (оператор «атаки»), на основе параметра, значение которого уменьшается с течением итераций. Такая стратегия способствует широкому исследованию пространства поиска на начальном этапе и смещению фокуса на локальное улучшение решений на поздних стадиях. Алгоритм характеризуется концептуальной простотой и относительно малым количеством настраиваемых параметров.

К достоинствам алгоритма серых волков относятся высокая скорость сходимости и эффективность в нахождении удовлетворительных решений для разнообразных задач оптимизации. Однако, при этом высока вероятность преждевременной сходимости к локальным оптимумам и риск снижения разнообразия популяции. Это может приводить к стагнации поиска и получению квазиоптимальных решений, особенно при решении сложных, многокритериальных задач. Для устранения выявленных недостатков существует большое количество модификаций алгоритма серых волков, в том числе, на основе гибридизации с другими алгоритмами, использования хаотических отображений и полета Леви для повышения эффективности поиска и устойчивости.

Так, в работе [40] представлен дискретный алгоритм серых волков для решения двухмерной задачи упаковки (упаковка в полосу). В решаемой задаче не учитывается гильотинное ограничение и невозможен поворот объектов. Поскольку стандартный алго-

ритм серых волков работает в непрерывном пространстве, для решения задачи упаковки, были модифицированы операторы поиска и атаки. Также, вместо евклидова расстояния, была использована новая метрика для расчета расстояния между двумя решениями (последовательностями упаковки). Была предложена улучшенная стратегия размещения на основе эвристики Best Fit. При этом после оценки решений возможны пять вариантов размещения прямоугольника в доступном пространстве, что позволяет более плотно заполнять область упаковки. Также для того, чтобы избежать преждевременного перехода к локальному поиску и застревания в локальных оптимумах был изменен критерий остановки фазы поиска: в модифицированной версии алгоритма поиск ведется всеми волками, что повышает разнообразие решений. Проведено тестирование алгоритма на 737 бенчмарках с классическими метаэвристиками и современными алгоритмами, специализирующимися на задаче упаковки. Представленный алгоритм превзошел результаты узкоспециализированных алгоритмов на наборах данных CX, 2SP и ZDF, а также показал конкурентоспособные результаты на остальных бенчмарках, но проиграл конкурентам при решении некоторых задач средней размерности. Несмотря на модификации, в алгоритме сохранено основное правило – следование за лидерами (альфа, бета, дельта), что может приводить к преждевременной сходимости. Кроме того, алгоритм характеризуется высокой вычислительной сложностью.

Генетический алгоритм. Генетический алгоритм является метаэвристическим методом поиска, вдохновлённым теорией эволюции и генетикой. Вначале формируется множество решений задачи (популяция), при этом каждое решение специальным образом кодируется в «хромосому» – последовательность генов (разрядов), каждый из которых является числом. Распространённым подходом, применяемым для моделирования решения задачи трехмерной упаковки, является кодирование в гене информации о порядковом номере груза, последовательности погрузки и возможности вращения груза, а обратное декодирование хромосомы в решение производится посредством применения детерминированного эвристического алгоритма в качестве стратегии размещения каждого объекта в пространстве контейнера [41, 42]. Генетический алгоритм состоит из трех операторов: селекция, кроссовер и мутация. Алгоритм выполняется итерационно и повторяется до тех пор, пока не будет выполнен критерий остановки, либо не пройдет заданное число итераций. В процессе эволюции моделируется естественный отбор, как инструмент устранения из популяции самых неудачных по качеству решений. Качество решений оценивается с помощью функции приспособленности. Операция кроссовера позволяет создавать новые решения и позволяет распространять признаки лучших решений среди популяции. Оператор мутации производит случайную замену разрядов решений. Благодаря этим трем операторам на каждом шаге алгоритма производится постепенное улучшение качества как отдельных решений, так и популяции всей в целом [43].

К отличительным чертам генетических алгоритмов можно отнести возможность выхода из локального экстремума за счет применения многонаправленного поиска, повышение эффективности генетических операторов за счет минимизации вычислительной сложности одной итерации алгоритма, использование только одной целевой функции (без необходимости вычисления вспомогательных функций) для оценки качества найденных решений [44]. Благодаря этому генетические алгоритмы эффективно применяются для решения различных видов задач, включая дискретные, непрерывные и недифференцируемые [45]. К недостаткам генетических алгоритмов можно отнести низкую эффективность при наличии вычислительно сложных функций приспособленности, что связано с многократным вычислением их значений для каждой особи на каждой итерации алгоритма. Также результаты алгоритма в значительной степени зависят от качества настройки управляющих параметров алгоритма.

В литературе имеется множество примеров успешного применения генетических алгоритмов для решения различных типов задач, в том числе задачи трехмерной упаковки. Так, в работе [42] предложен гибридный генетический алгоритм, позволяющий учитывать такие факторы, как стабильность и ориентация грузов, при решении оффлайн-задачи трехмерной упаковки. Для компенсации существующих недостатков в виде недостаточных возможностей локального поиска и небольшой скорости сходимости в роли

оператора мутации был использован алгоритм табу-поиска. В работе [46] использована «жадная» эвристика, согласно которой грузы сперва складываются в стопки, а затем их потенциальное расположение оценивается с использованием функции взвешенной оценки. Генетический алгоритм используется для автоматической настройки функции взвешенной оценки и улучшения качества упаковки. В работе [47] предложен адаптивный генетический алгоритм на основе эвристики построения стены, в котором вероятности выполнения операторов кроссовера и мутации адаптивно изменяются в зависимости от значения индивидуальной приспособленности.

В работе [48] генетический алгоритм был применен для минимизации количества палет, максимизации плотности упаковки грузов и минимизации гетерогенности грузов в каждой палете. Авторами предложена модель, позволяющая учитывать 8 различных ограничений, в том числе ограничения ориентации, устойчивости грузов, расположения грузов с учетом заказов и взаимного скрепления грузов.

В работе [49] был предложен подход, использующий изменение размера контейнера с целью повышения вместимости и возможности упаковки всех подготовленных грузов. При этом рассматривалась задача трехмерной упаковки на открытом пространстве, которая подразумевает отсутствие ограничений на размер разнородных контейнеров. Целью представленного алгоритма является минимизация суммарной стоимости за счет использования сконфигурированных контейнеров свободной формы и шаблонов погрузки. В данном случае была решена комбинированная задача трехмерной упаковки на открытом пространстве и многоконтейнерной упаковки на основе использования генетического алгоритма и внутренней детерминированной эвристики.

Обобщенная схема метаэвристического алгоритма для решения задачи трехмерной упаковки. Анализ особенностей выполнения и принципов работы различных метаэвристических и эволюционных алгоритмов позволил сформулировать обобщенный принцип работы метаэвристического алгоритма, отражающий последовательность действий при решении задачи трехмерной упаковки (рис. 1):

1. Инициализация алгоритма, ввод исходных данных. В состав исходных данных для решения задачи трехмерной упаковки должны включаться сведения об объектах, требующих упаковки: спецификация объектов, их габаритные размеры, важные особенности и возможные ограничения на размещение; сведения о имеющихся в наличии контейнерах: количество контейнеров, их габаритные размеры, особенности погрузки и возможные ограничения.

2. Создание и инициализация начального множества решений (популяции). В случае, если для решения задачи упаковки используется генетический алгоритм, то необходимо разработать методику кодирования / декодирования решений, составляющих начальную популяцию, т.е. каждая хромосома должна отображать определенную последовательность упаковки рассматриваемых объектов. В случае же, когда упаковка выполняется с использованием роевых методов необходимо определить (вычислить) начальные координаты всех членов коллектива (популяции решений).

3. Вычисление значений функции пригодности и оценка качества решений, составляющих текущее множество решений.

4. Выбор из текущей популяции решений заданного числа особей (хромосом). Выбор может производиться как случайным образом, так и на основе различных эвристик, например, на основе рулетки, по результатам «турнира», на основе ранжирования, «элитная» и т.д.

5. Выполнение предусмотренных алгоритмом операций и получение новых решений. В случае с генетическим алгоритмом – это могут быть генетические операторы: кроссинговер, мутация, инверсия и др. В биоинспирированных методах тип операторов для генерации новых решений зависит от используемого в данном решении метода. Также важным моментом, независимо от применяемого метода является необходимость поддержания баланса между поиском новых решений и исследованием существующих областей пространства поиска, между глобальным (операторы исследования) и локальным (операторы использования/эксплуатации) поиском.

6. Проверка выполнения заданного критерия останова. В случае невыполнения имеющегося критерия – возврат к п. 3 данного алгоритма для проведения оценки новых решений.

7. В случае, если заданный критерий выполнен – завершение работы алгоритма и сохранение наилучшего среди полученных вариантов решений.

8. Декодирование полученного решения к виду однозначного описания последовательности упаковки объектов в контейнер с помощью детерминированной эвристики.

Сравнительный анализ эффективности применения метаэвристических алгоритмов. Можно отметить проведенные исследования сравнительной эффективности различных метаэвристических алгоритмов при решении задачи о рюкзаке [50]. В качестве объекта исследования рассматривались генетический алгоритм, табу-поиск и модифицированный алгоритм искусственной пчелиной колонии на основе принципа Парето, а также три эвристических алгоритма. Исследование эффективности работы рассматриваемых алгоритмов проводилось на 15 типовых задачах, предложенных Loh и Nee в работе [51]. Средние арифметические показатели процента плотности размещения грузов в пространстве упаковки представлены на рис. 2.

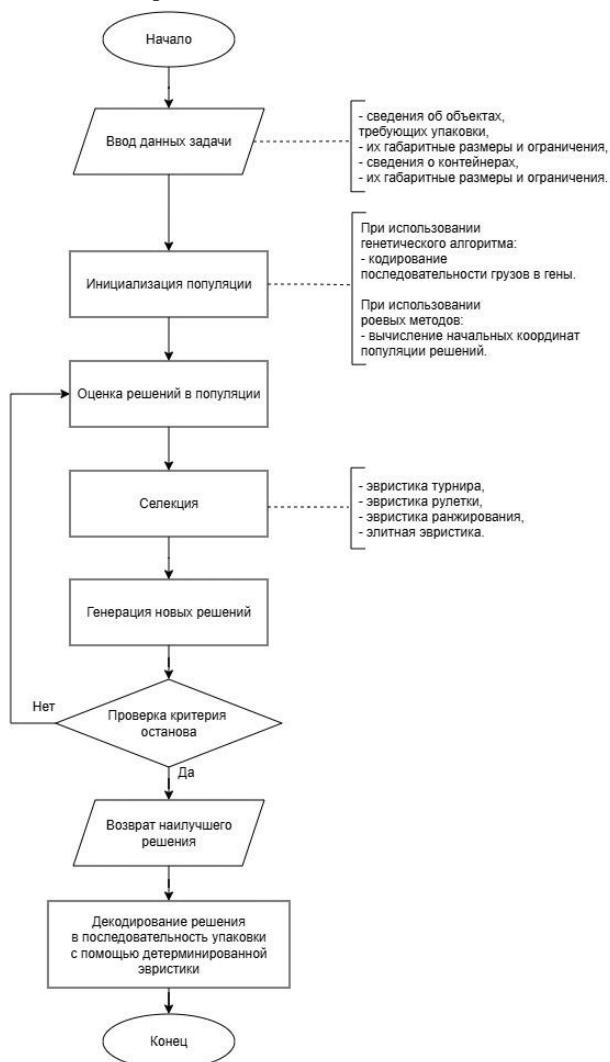


Рис. 1. Обобщенная схема метаэвристического алгоритма для решения задачи трехмерной упаковки

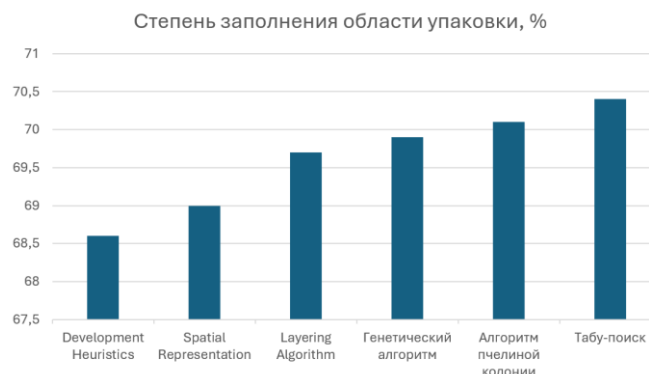


Рис. 2. Средние показатели результатов сравнительного анализа метаэвристических алгоритмов по результатам 15 тестов Loh и Nee

Полученные результаты тестов показывают, что метаэвристические алгоритмы в целом позволяют получить результаты, более близкие к оптимальным по количеству размещенных грузов и проценту заполнения области упаковки, чем эвристические методы. Это подтверждает, что для решения NP-трудной задачи трехмерной упаковки целесообразно разрабатывать методы, основанные на метаэвристических подходах.

Заключение. Таким образом, в ходе проведенного сравнительного анализа были рассмотрены основные типы алгоритмов решения задачи трехмерной упаковки, выделены их особенности, преимущества и недостатки. Проведенный анализ показал, что биоинспирированные методы, как правило, могут эффективно применяться для решения NP-сложных и NP-трудных задач, в частности задачи трехмерной упаковки, поскольку позволяют избегать ловушек локального экстремума и получать наборы квазиоптимальных решений за полиномиальное время. Кроме того, было показано, что методы машинного обучения также могут применяться для решения современных задач упаковки, поскольку позволяют получить допустимое решение за приемлемое время. В результате сравнительного анализа применения различных типов метаэвристических алгоритмов была разработана обобщенная схема применения данной категории методов для эффективного решения трехмерной упаковки, что позволит в дальнейшем определить наиболее перспективное направление решения поставленной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Liang K., Shan M., Liu H., et al. Intelligent optimization of e-commerce order packing using deep reinforcement learning with heuristic strategies // Applied Soft Computing. – 2025. – Issue 179.
2. Xiong H., Ding K., Ding W., et al. Towards reliable robot packing system based on deep reinforcement learning // Advanced Engineering Informatics. – 2023. – Issue 57.
3. Yang J., Liang K., Liu H., et al. Optimizing e-commerce warehousing through open dimension management in a three-dimensional bin packing system // PeerJ Computer Science. – 2023. – Issue 9. – URL: <https://peerj.com/articles/cs-1613/>.
4. Alpert Charles J., Mehta Dinesh P., Sapatnekar Sachin S. Handbook of algorithms for physical design automation. – CRC Press, New York, USA, 2009.
5. Гладков Л.А., Кравченко Ю.А., Курейчик В.В., Родзин С.И. Интеллектуальные системы: модели и методы метаэвристической оптимизации: монография. – Чебоксары: Среда, 2024.
6. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. – М.: Физматлит, 2025.
7. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. – М.: МГТУ им. Баумана, 2014.
8. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М., Сороколетов П.В. Биоинспирированные методы в оптимизации. – М.: Физматлит, 2009.
9. Liu H., Zhou L., Yang J., et al. The 3D bin packing problem for multiple boxes and irregular items based on deep Q-network // Applied Intelligence. – 2023. – Issue 53. – P. 23398-23425.
10. Wu H., Leung S.C.H., Si Y. Three-stage heuristic algorithm for three-dimensional irregular packing problem // Applied Mathematical Modelling. – 2017. – Issue 41. – P. 431-444.

11. Nascimento O.X.D., de Queiroz T.A., Junqueira L., et al. Practical constraints in the container loading problem: Comprehensive formulations and exact algorithm // *Computers & Operations Research*. – 2021. – Issue 128.
12. Ocloo V.E. A new mathematical model for a 3D container packing problem. – Brandenburg: Brandenburg University of Technology, 2020.
13. Chen C.S., Lee S.M., Shen Q.S. An analytical model for the container loading problem // *European Journal of Operational Research*. – 1995. – Issue 80, No. 1. – P. 68-76.
14. Junqueira J., Morabito R., Yamashita D.S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints // *Computers & Operations Research*. – Issue 39, No. 1. – P. 74-85.
15. Ramos A.G., Silva E., Oliveira J.F. A new load balance methodology for container loading problem in road transportation // *European Journal of Operational Research*. – 2018. – Issue 266, No. 3. – P. 1140-1152.
16. Hasan J., Kaabi J., Harrath Y. Multi-objective 3D bin-packing problem // *Proceedings of the 8th International Conference on Modeling Simulation and Applied Optimization (ICMSAO)*. – 2019. – P. 1-5.
17. Costa M.D.G., Captivo M.E. Weight distribution in container loading: A case study // *International Transactions in Operational Research*. – 2016. – Issue 23. – P. 239-263.
18. Gzara F., Elhedhli S., Yildiz B.C. The pallet loading problem: Three-dimensional bin packing with practical constraints // *European Journal of Operational Research*. – 2020. – Issue 287, No. 3. – P. 1062-1074.
19. Júnior R.R., Yanasse H.H., Morabito R., et al. A hybrid approach for a multi-compartment container loading problem // *Expert Systems with Applications*. – 2019. – Issue 137. – P. 471-492.
20. Araújo O.C.B.D., and V.A. Armentano. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem // *Pesquisa Operacional*. – 2007. – Issue 27, No. 2. – P. 311-331.
21. Zhu W., Lim A. A new iterative-doubling Greedy-Lookahead algorithm for the single container loading problem // *European Journal of Operational Research*. – 2012. – Issue 222, No. 3. – P. 408-417.
22. Fanslau T., Bortfeldt A. A tree search algorithm for solving the container loading problem // *INFORMS Journal on Computing*. – 2009. – Issue 22, No. 2. – P. 222-235.
23. Da Silva E.F., Leao A.A.S., Toledo F.M.B., et al. A matheuristic framework for the three-dimensional single large object placement problem with practical constraints // *Computers & Operations Research*. – 2020. – Issue 124.
24. Toffolo T.A.M., Esprit E., Wauters T. A two-dimensional heuristic decomposition approach to a three-dimensional multiple container loading problem // *European Journal of Operational Research*. – 2017. – Issue 257, No. 2. – P. 526-538.
25. Liu S., Tan W., Xu Z., et al. A tree search algorithm for the container loading problem // *Computers & Industrial Engineering*. – 2014. – Issue 75. – P. 20-30.
26. Chien C.-F., Deng J.-F. A container packing support system for determining and visualizing container packing patterns // *Decision Support Systems*. – 2004. – Issue 37, No. 1. – P. 23-24.
27. Zhao H., She Q., Zhu C. Online 3D bin packing with constrained deep reinforcement learning // *Proceedings of AAAI Technical Track on Application Domains*. – Issue 35, No. 1. – P. 741-749.
28. Hu H., Zhang X., Yan X. et al. Solving a new 3D bin packing problem with deep reinforcement learning method // *arXiv*. – 2017. – arXiv:1708.05930
29. Duan L., Hu H., Qian Y. et al. A multi-task selected learning approach for solving 3D flexible bin packing problem // *arXiv*. – 2018. – arXiv:1804.06896.
30. Hu R., Xu J., Chen B. TAP-Net: Transport-and-pack using reinforcement learning // *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. – 2020. – Issue 39, No. 6. – P. 1-15.
31. Laterre A., Fu Y., Jabri M.K., et al. Ranked reward: Enabling self-play reinforcement learning for combinatorial optimization // *arXiv*. – 2018. – arXiv:1807.01672.
32. Liu D. On solving multiobjective bin packing problems using evolutionary particle swarm optimization // *European Journal of Operational Research*. – 2008. – Issue 190, No. 2. – P. 357-382.
33. Олейник А.С., Полупанова Е.Е. Решение задачи трёхмерной упаковки алгоритмом последовательной гибридизации // *Прикладная математика: современные проблемы математики, информатики и моделирования: Матер. III всероссийской научно-практической конференции молодых ученых, Краснодар, 21–24 апреля 2021 года. Т. I*. – 2021. – С. 183-188.
34. Wu B., Lin Jg., Dong M. Artificial Bee Colony Algorithm for Three-Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem // *Proceedings of 20th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*. – 2013. – P. 815-825.
35. Rajesh Kanna S.K., Udaiyakumar K.C. A Complete Framework For Multi-Constrained 3 D Bin Packing Optimization Using Firefly Algorithm // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2017. – Issue 114. – P. 267-282. – URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-Complete-Framework-For-Multi-Constrained-3-D-Bin-Kanna-Udaiyakumar/badaf2002a67581a1574a2e82e55deb65a611a6f>.

36. Zhao Ch., Jliang L., Teo K. A hybrid chaos firefly algorithm for three-dimensional irregular packing problem // *Journal of Industrial and Management Optimization*. – 2020. – Issue 13. – P. 1-21. – URL: https://www.researchgate.net/publication/328761857_A_hybrid_chaos_firefly_algorithm_for_three-dimensional_irregular_packing_problem.
37. Gherboudj A. African Buffalo Optimization for One Dimensional Bin Packing Problem // *International Journal of Swarm Intelligence Research*. – 2019. – Issue 10, No. 4. – P. 38-52. – URL: <https://www.igi-global.com/gateway/article/234698>.
38. Layeb A., Benayad Z. A novel firefly algorithm based ant colony optimization for solving combinatorial optimization problems // *International Journal of Computer Science and Applications*. – 2014. – Issue 11. – P. 19-37. – URL: https://www.researchgate.net/publication/268215316_A_novel_firefly_algorithm_based_ant_colony_optimization_for_solving_combinatorial_optimization_problems.
39. Montiel-Arrieta L.J., Barragan-Vite I., Seck-Tuoh-Mora J.C., et al. Minimizing the total waste in the one-dimensional cutting stock problem with the African buffalo optimization algorithm // *PeerJ Computer Science*. – 2023. – Issue 9. – DOI: 10.7717/peerj-cs.1728. – URL: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/38192486/>.
40. Wang P., Rao Y., Luo Q. An Effective Discrete Grey Wolf Optimization Algorithm for Solving the Packing Problem // *IEEE Access*. – 2020. – DOI:10.1109/ACCESS.2020.3004380. – URL: https://www.researchgate.net/publication/342402646_An_Effective_Discrete_Grey_Wolf_Optimization_Algorithm_for_Solving_the_Packing_Problem.
41. Kang K., Moon I., Wang H. A hybrid genetic algorithm with a new packing strategy for the three-dimensional bin packing problem // *Applied Mathematics and Computation*. – 2012. – No. 219. – P. 1287-1299.
42. Wang X., Gong L., Zhao H., Li B., Tian M. A 3D Offline Packing Algorithm considering Cargo Orientation and Stability // *International Journal of Distributed Sensor Networks*. – 2023.
43. Arora J.S. Introduction to Optimum Design. – 3 ed. – Iowa City, 2012. – URL: [https://mu.menofia.edu.eg/PrtlFiles/Staff/1045/Portal/Files/Introduction%20to%20Optimum%20Design,%203rd%20Ed\(3\).pdf](https://mu.menofia.edu.eg/PrtlFiles/Staff/1045/Portal/Files/Introduction%20to%20Optimum%20Design,%203rd%20Ed(3).pdf).
44. Zhang D.-F., Chen Sh.-D., Liu Y.-J. An improved heuristic recursive strategy based on genetic algorithm for the strip rectangular packing problem // *Acta Automatica Sinica*. – 2007. – No. 33.
45. Goncalves J.F., Resende M.G.C. A biased random key genetic algorithm for 2D and 3D bin packing problems // *International Journal of Production Economics*. – 2013. – Issue 145, No. 2. – P. 500-510.
46. Olsson J., Larsson T., Quttineh N.-H. Automating the planning of container loading for atlas copco: Coping with real-life stacking and stability constraints // *European Journal of Operational Research*. – Issue 280, No. 3. – P. 1018-1034.
47. Xiang X. Yu C., Xu H., et al. Optimization of heterogeneous container loading problem with adaptive genetic algorithm // *Complexity*. – 2018. – Issue 6. – P. 1-12.
48. Ananno A.A., Ribeiro L. A Multi-Heuristic Algorithm for Multi-Container 3-D Bin Packing Problem Optimization Using Real World Constraints // *IEEE Access*. – 2024. – Issue 12. – P. 42105-42130.
49. Yang Y., Wu Z., Hao X., et al. Two-layer heuristic for the three-dimensional bin design and packing problem // *Engineering Optimization*. – 2023. – DOI: 10.1080/0305215X.2023.2269868.
50. Phongmoo S., Leksakul K., Charoenchai N., et al. Artificial Bee Colony Algorithm with Pareto-Based Approach for Multi-Objective Three-Dimensional Single Container Loading Problems / S. Phongmoo, // *Applied Sciences*. – 2023. – Issue 13, No. 11. – DOI:10.3390/app13116601. – URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/13/11/6601>.
51. Loh T., Nee A. A Packing Algorithm for Hexahedral Boxes // *Proceedings of the Conference of Industrial Automation*. – 1992. – P. 115-126.

REFERENCES

1. Liang K., Shan M., Liu H., et al. Intelligent optimization of e-commerce order packing using deep reinforcement learning with heuristic strategies, *Applied Soft Computing*, 2025, Issue 179.
2. Xiong H., Ding K., Ding W., et al. Towards reliable robot packing system based on deep reinforcement learning, *Advanced Engineering Informatics*, 2023, Issue 57.
3. Yang J., Liang K., Liu H., et al. Optimizing e-commerce warehousing through open dimension management in a three-dimensional bin packing system, *PeerJ Computer Science*, 2023, Issue 9. Available at: <https://peerj.com/articles/cs-1613/>.
4. Alpert Charles J., Mehta Dinesh P., Sapatnekar Sachin S. Handbook of algorithms for physical design automation. CRC Press, New York, USA, 2009.
5. Gladkov L.A., Kravchenko Yu.A., Kureychik V.V., Rodzin S.I. Интеллектуальные системы: модели и методы метаэвристической оптимизации: монография [Intelligent systems: models and methods of metaheuristic optimization: monograph]. Cheboksary: Sreda, 2024.

6. Gladkov L.A., Kureychik V.V., Kureychik V.M. Geneticheskie algoritmy [Genetic algorithms]. Moscow: Fizmatlit, 2025.
7. Karpenko A.P. Sovremennye algoritmy poiskovoy optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennyye prirodoy [Modern search engine optimization algorithms. algorithms inspired by nature]. Moscow: MGTU im. Bauman, 2014.
8. Gladkov L.A., Kureychik V.V., Kureychik V.M., Sorokoletov P.V. Bioinspirirovannyye metody v optimizatsii [Bioinspired methods in optimization]. Moscow: Fizmatlit, 2009.
9. Liu H., Zhou L., Yang J., et al. The 3D bin packing problem for multiple boxes and irregular items based on deep Q-network, *Applied Intelligence*, 2023, Issue 53, pp. 23398-23425.
10. Wu H., Leung S.C.H., Si Y. Three-stage heuristic algorithm for three-dimensional irregular packing problem, *Applied Mathematical Modelling*, 2017, Issue 41, pp. 431-444.
11. Nascimento O.X.D., de Queiroz T.A., Junqueira L., et al. Practical constraints in the container loading problem: Comprehensive formulations and exact algorithm, *Computers & Operations Research*, 2021, Issue 128.
12. Ocloo V.E. A new mathematical model for a 3D container packing problem. Brandenburg: Brandenburg University of Technology, 2020.
13. Chen C.S., Lee S.M., Shen Q.S. An analytical model for the container loading problem, *European Journal of Operational Research*, 1995, Issue 80, No. 1, pp. 68-76.
14. Junqueira J., Morabito R., Yamashita D.S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints, *Computers & Operations Research*, Issue 39, No. 1, pp. 74-85.
15. Ramos A.G., Silva E., Oliveira J.F. A new load balance methodology for container loading problem in road transportation, *European Journal of Operational Research*, 2018, Issue 266, No. 3, pp. 1140-1152.
16. Hasan J., Kaabi J., Harrath Y. Multi-objective 3D bin-packing problem, *Proceedings of the 8th International Conference on Modeling Simulation and Applied Optimization (ICMSAO)*, 2019, pp. 1-5.
17. Costa M.D.G., Captivo M.E. Weight distribution in container loading: A case study, *International Transactions in Operational Research*, 2016, Issue 23, pp. 239-263.
18. Gzara F., Elhedhli S., Yildiz B.C. The pallet loading problem: Three-dimensional bin packing with practical constraints, *European Journal of Operational Research*, 2020, Issue 287, No. 3, pp. 1062-1074.
19. Júnior R.R., Yanasse H.H., Morabito R., et al. A hybrid approach for a multi-compartment container loading problem, *Expert Systems with Applications*, 2019, Issue 137, pp. 471-492.
20. Araújo O.C.B.D., and V.A. Armentano. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem, *Pesquisa Operacional*, 2007, Issue 27, No. 2, pp. 311-331.
21. Zhu W., Lim A. A new iterative-doubling Greedy-Lookahead algorithm for the single container loading problem, *European Journal of Operational Research*, 2012, Issue 222, No. 3, pp. 408-417.
22. Fanslau T., Bortfeldt A. A tree search algorithm for solving the container loading problem, *INFORMS Journal on Computing*, 2009, Issue 22, No. 2, pp. 222-235.
23. Da Silva E.F., Leao A.A.S., Toledo F.M.B., et al. A matheuristic framework for the three-dimensional single large object placement problem with practical constraints, *Computers & Operations Research*, 2020, Issue 124.
24. Toffolo T.A.M., Esprit E., Wauters T. A two-dimensional heuristic decomposition approach to a three-dimensional multiple container loading problem, *European Journal of Operational Research*, 2017, Issue 257, No. 2, pp. 526-538.
25. Liu S., Tan W., Xu Z., et al. A tree search algorithm for the container loading problem, *Computers & Industrial Engineering*, 2014, Issue 75, pp. 20-30.
26. Chien C.-F., Deng J.-F. A container packing support system for determining and visualizing container packing patterns, *Decision Support Systems*, 2004, Issue 37, No. 1, pp. 23-24.
27. Zhao H., She Q., Zhu C. Online 3D bin packing with constrained deep reinforcement learning, *Proceedings of AAAI Technical Track on Application Domains*, Issue 35, No. 1, pp. 741-749.
28. Hu H., Zhang X., Yan X. et al. Solving a new 3D bin packing problem with deep reinforcement learning method, *arXiv*, 2017. arXiv:1708.05930.
29. Duan L., Hu H., Qian Y. et al. A multi-task selected learning approach for solving 3D flexible bin packing problem, *arXiv*, 2018. arXiv:1804.06896.
30. Hu R., Xu J., Chen B. TAP-Net: Transport-and-pack using reinforcement learning, *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2020, Issue 39, No. 6, pp. 1-15.
31. Laterre A., Fu Y., Jabri M.K., et al. Ranked reward: Enabling self-play reinforcement learning for combinatorial optimization, *arXiv*, 2018. arXiv:1807.01672.
32. Liu D. On solving multiobjective bin packing problems using evolutionary particle swarm optimization, *European Journal of Operational Research*, 2008, Issue 190, No. 2, pp. 357-382.

33. Oleynik A.S., Polupanova E.E. Reshenie zadachi trekhmernoy upakovki algoritmom posledovatel'noy gibridizatsii [Solution of the three-dimensional packing problem using the sequential hybridization algorithm], *Prikladnaya matematika: sovremennye problemy matematiki, informatiki i modelirovaniya: Mater. III vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii molodykh uchenykh, Krasnodar, 21–24 aprelya 2021 goda* [Applied Mathematics: Modern Problems of Mathematics, Computer Science and Modeling: Proceedings of the III All-Russian Scientific and Practical Conference of Young Scientists, Krasnodar, April 21–24, 2021]. Vol. I, 2021, pp. 183-188.
34. Wu B., Lin Jg., Dong M. Artificial Bee Colony Algorithm for Three-Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem, *Proceedings of 20th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, 2013, pp. 815-825.
35. Rajesh Kanna S.K., Udaiyakumar K.C. A Complete Framework For Multi-Constrained 3 D Bin Packing Optimization Using Firefly Algorithm, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2017, Issue 114, pp. 267-282. Available at: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-Complete-Framework-For-Multi-Constrained-3-D-Bin-Kanna-Udaiyakumar/badaf2002a67581a1574a2e82e55deb65a611a6f>.
36. Zhao Ch., Jjiang L., Teo K. A hybrid chaos firefly algorithm for three-dimensional irregular packing problem, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2020, Issue 13, pp. 1-21. Available at: https://www.researchgate.net/publication/328761857_A_hybrid_chaos_firefly_algorithm_for_three-dimensional_irregular_packing_problem.
37. Gherboudj A. African Buffalo Optimization for One Dimensional Bin Packing Problem, *International Journal of Swarm Intelligence Research*, 2019, Issue 10, No. 4, pp. 38-52. Available at: <https://www.igi-global.com/gateway/article/234698>.
38. Layeb A., Benayad Z. A novel firefly algorithm based ant colony optimization for solving combinatorial optimization problems, *International Journal of Computer Science and Applications*, 2014, Issue 11, pp. 19-37. Available at: https://www.researchgate.net/publication/268215316_A_novel_firefly_algorithm_based_ant_colony_optimization_for_solving_combinatorial_optimization_problems.
39. Montiel-Arrieta L.J., Barragan-Vite I., Seck-Tuoh-Mora J.C., et al. Minimizing the total waste in the one-dimensional cutting stock problem with the African buffalo optimization algorithm // *PeerJ Computer Science*. – 2023. – Вып. 9. – DOI:10.7717/peerj-cs.1728. Available at: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/38192486/>.
40. Wang P., Rao Y., Luo Q. An Effective Discrete Grey Wolf Optimization Algorithm for Solving the Packing Problem, *IEEE Access*, 2020. DOI:10.1109/ACCESS.2020.3004380. Available at: https://www.researchgate.net/publication/342402646_An_Effective_Discrete_Grey_Wolf_Optimization_Algorithm_for_Solving_the_Packing_Problem.
41. Kang K., Moon I., Wang H. A hybrid genetic algorithm with a new packing strategy for the three-dimensional bin packing problem, *Applied Mathematics and Computation*, 2012, No. 219, pp. 1287-1299.
42. Wang X., Gong L., Zhao H., Li B., Tian M. A 3D Offline Packing Algorithm considering Cargo Orientation and Stability, *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2023.
43. Arora J.S. Introduction to Optimum Design. 3 ed. Iowa City, 2012. Available at: [https://mu.menofia.edu.eg/PrtlFiles/Staff/1045/Portal/Files/Introduction%20to%20Optimum%20Design,%203nd%20Ed\(3\).pdf](https://mu.menofia.edu.eg/PrtlFiles/Staff/1045/Portal/Files/Introduction%20to%20Optimum%20Design,%203nd%20Ed(3).pdf).
44. Zhang D.-F., Chen Sh.-D., Liu Y.-J. An improved heuristic recursive strategy based on genetic algorithm for the strip rectangular packing problem, *Acta Automatica Sinica*, 2007, No. 33.
45. Goncalves J.F., Resende M.G.C. A biased random key genetic algorithm for 2D and 3D bin packing problems, *International Journal of Production Economics*, 2013, Issue 145, No. 2, pp. 500-510.
46. Olsson J., Larsson T., Quttineh N.-H. Automating the planning of container loading for atlas copco: Coping with real-life stacking and stability constraints, *European Journal of Operational Research*, Issue 280, No. 3, pp. 1018-1034.
47. Xiang X. Yu C., Xu H., et al. Optimization of heterogeneous container loading problem with adaptive genetic algorithm, *Complexity*, 2018, Issue 6, pp. 1-12.
48. Ananno A.A., Ribeiro L. A Multi-Heuristic Algorithm for Multi-Container 3-D Bin Packing Problem Optimization Using Real World Constraints, *IEEE Access*, 2024, Issue 12, pp. 42105-42130.
49. Yang Y., Wu Z., Hao X., et al. Two-layer heuristic for the three-dimensional bin design and packing problem, *Engineering Optimization*, 2023. DOI: 10.1080/0305215X.2023.2269868.
50. Phongmoo S., Leksakul K., Charoenchai N., et al. Artificial Bee Colony Algorithm with Pareto-Based Approach for Multi-Objective Three-Dimensional Single Container Loading Problems, *Applied Sciences*, 2023, Issue 13, No. 11. DOI: 10.3390/app13116601. Available at: <https://www.mdpi.com/2076-3417/13/11/6601>.
51. Loh T., Nee A. A Packing Algorithm for Hexahedral Boxes, *Proceedings of the Conference of Industrial Automation*, 1992, pp. 115-126.

Сорокин Михаил Максимович – Южный федеральный университет; e-mail: sorokin@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; кафедра систем автоматизированного проектирования им. Виктора Михайловича Курейчика; аспирант.

Гладков Леонид Анатольевич – Южный федеральный университет; e-mail: lagladkov@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; кафедра систем автоматизированного проектирования им. Виктора Михайловича Курейчика; профессор.

Гладкова Надежда Викторовна – Южный федеральный университет; e-mail: nvgladkova@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; кафедра систем автоматизированного проектирования им. Виктора Михайловича Курейчика; старший преподаватель.

Sorokin Mikhail Maximovich – Southern Federal University; e-mail: sorokin@sfedu.ru; Taganrog, Russia; the Department of Computer Aided Design named after V.M. Kureichik; postgraduate student.

Gladkov Leonid Anatol'evich – Southern Federal University; e-mail: lagladkov@sfedu.ru; Taganrog, Russia; the Department of Computer Aided Design named after V.M. Kureichik; professor.

Gladkova Nadezhda Viktorovna – Southern Federal University; e-mail: nvgladkova@sfedu.ru; Taganrog, Russia; the Department of Computer Aided Design named after V.M. Kureichik; senior teacher.

УДК 004.056.55

DOI 10.18522/2311-3103-2026-4-150-159

В.С. Стародубцев, Л.К. Бабенко**АЛГОРИТМЫ СНИЖЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ЗАТРАТ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ КРИПТОСИСТЕМЫ ДОМИНГО-ФЕРРЕРА**

Проведён анализ литературы по тематике полностью гомоморфного шифрования. Представлено краткое описание полностью гомоморфной криптографической системы Доминго-Феррера, основанной на задаче факторизации чисел, приведены временные характеристики этапов атаки с известным открытым текстом на данную криптосистему. Проанализированы временные характеристики операций криптосистемы, описаны методы и средства их практической реализации. Предложены новые алгоритмы реализации операций криптосистемы Доминго-Феррера, позволяющие снизить время их выполнения. Обоснование оценок временных затрат операций криптосистемы формируется на основе теоретических расчётов, а также результатов экспериментальных исследований. Целью исследования является снижение времени выполнения операций криптосистемы Доминго-Феррера посредством разработки алгоритмов их модификации, учитывающих особенности практической реализации. Основным результатом настоящей работы является снижение времени выполнения следующих операций криптосистемы Доминго-Феррера: шифрования – на 10-15%, расшифрования – в 2 раза, гомоморфного умножения – в 64 раза для цепочки из 200 умножений при использовании степени полиномов представления шифртекста $d=100$ и незначительном увеличении временных затрат на генерацию ключа. Проведённое исследование представляет собой значимый вклад в развитие полностью гомоморфной криптосистемы Доминго-Феррера, основанной на задаче факторизации целых чисел. Настоящая работа обладает практической значимостью, поскольку позволяет значительно повысить производительность гомоморфных вычислений данной криптосистемы. Полученные результаты могут стать основой для разработки эффективных (с точки зрения вычислительных затрат и обеспечения уровня безопасности) программно-аппаратных комплексов облачных вычислений, использующих полностью гомоморфную криптосистему Доминго-Феррера для обеспечения конфиденциальности обрабатываемой информации.

Информационная безопасность; гомоморфное шифрование; гомоморфная схема шифрования; полностью гомоморфное шифрование; криптосистема Доминго-Феррера; криптоанализ.

V.S. Starodubcev, L.K. Babenko**ALGORITHMS FOR REDUCING THE TIME REQUIRED TO PERFORM OPERATIONS OF THE DOMINGO-FERRER CRYPTOSYSTEM**

An analysis of the literature on the topic of fully homomorphic encryption is carried out. A brief description of the completely homomorphic Domingo-Ferrer cryptographic system based on the number factorization problem is presented, and the time characteristics of the stages of an attack with a known plaintext on this cryptosystem are given. The time characteristics of cryptosystem operations are analyzed,