

С.И. Носков, А.П. Медведев, И.Д. Кириллов

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СМЕШАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ
ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОДНОРОДНОЙ ВЛОЖЕННОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ
РЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ТИПА**

Статья посвящена разработке алгоритма идентификации параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии первого типа – модели, востребованной при анализе сложных систем, поведение которых не удаётся адекватно описать гладкими функциями. В обзорной части работы систематизированы современные публикации, иллюстрирующие применение кусочно-линейных форм в самых разных предметных областях: от моделирования энергопотребления и нелинейных систем управления до задач обработки изображений, восстановления генетических сетей и фильтрации геофизических данных. Новизна исследования заключается в том, что впервые для данного класса моделей предложен алгоритм идентификации, основанный на методе смешанного оценивания (МСО), позволяющий гибко комбинировать два различных критерия качества. Показано, что благодаря введению дополнительных булевых переменных и вспомогательных ограничений исходная оптимизационная задача сводится к стандартной задаче линейно-булева программирования, что позволяет применять для её решения доступные численные методы. Эффективность разработанного алгоритма продемонстрирована на реальных данных горно-металлургической компании «Норникель» за 2010–2024 годы. В качестве зависимой переменной используется выручка, в качестве предикторов – объёмы добычи никеля, палладия, меди и платины. Построены две альтернативные модели – классическим методом наименьших модулей и предлагаемым методом смешанного оценивания. Сравнительный анализ показывает, что вторая модель имеет несколько более высокую среднюю процентную ошибку, однако существенно выигрывает в величине максимальной ошибки на контрольной подвыборке, что делает её предпочтительной в условиях, где критичны выбросы. Полученные результаты подтверждают практическую ценность МСО для построения интерпретируемых и устойчивых регрессионных зависимостей.

Идентификация параметров; однородная вложенная кусочно-линейная регрессия; методы наименьших модулей и смешанного оценивания; задача линейно-булева программирования; горно-металлургическая компания «Норникель».

S.I. Noskov, A.P. Medvedev, I.D. Kirillov

**APPLICATION OF THE MIXED PARAMETER ESTIMATION METHOD
IN THE CONSTRUCTION OF A HOMOGENEOUS NESTED PIECEWISE LINEAR
REGRESSION OF THE FIRST TYPE**

The paper is devoted to the development of an algorithm for identifying the parameters of a homogeneous nested piecewise linear regression of the first type – a model that is in demand when analyzing complex systems whose behavior cannot be adequately described by smooth functions. The review part of the work systematizes modern publications illustrating the use of piecewise linear forms in various subject areas: from modeling energy consumption and nonlinear control systems to image processing, reconstruction of genetic networks, and filtering of geophysical data. The novelty of the study lies in the fact that for the first time for this class of models an identification algorithm based on the mixed estimation method (MEM) is proposed, which allows flexible combination of two different quality criteria. It is shown that by introducing additional Boolean variables and auxiliary constraints, the original optimization problem is reduced to a standard linear Boolean programming problem, which makes it possible to use available numerical methods for its solution. The effectiveness of the developed algorithm is demonstrated on real data of the mining and metallurgical company Norilsk Nickel for 2010–2024. The dependent variable is revenue, and the predictors are the production volumes of nickel, palladium, copper and platinum. Two alternative models are constructed – using the classical least absolute deviations method and the proposed mixed estimation method. A comparative analysis shows that the second model has a slightly higher average percentage error, but significantly outperforms in the magnitude of the maximum error on the control subsample, which makes it preferable in conditions where outliers are critical. The results obtained confirm the practical value of MEM for constructing interpretable and robust regression dependencies.

Identification of parameters; homogeneous nested piecewise linear regression; methods of least modules and mixed estimation; linear Boolean programming problem; mining and metallurgical company Norilsk Nickel.

Введение. Характер функционирования исследуемого объекта часто предполагает при его анализе методами математического моделирования возможность использования наряду с гладкими различными кусочно-линейными модельными форм. Так, в работе [1] исследуется, как меняется потребление электроэнергии в жилых помещениях по мере увеличения доходов в Китае. При этом вместо обычно применяемых линейных или квадратичных двойных логарифмических моделей с наложением предварительных ограничений на нечеткую взаимосвязь между потреблением электроэнергии и доходом используется уменьшенная кусочно-линейная модель, которая является самоадаптируемой, очень гибкой и обходит эту проблему. В исследовании [2] рассматривается новая задача комбинаторной оптимизации, связанная с линейными системами (MIN PFS), которая заключается в разбиении системы на минимальное число допустимых подсистем. MIN PFS позволяет формализовать фундаментальную задачу оценки кусочно-линейной модели, что является привлекательной альтернативой при моделировании широкого спектра нелинейных явлений. В [3] представлена нелинейная модель прогнозирующего управления, основанная на модели Винера с кусочно-линейным коэффициентом усиления. Этот подход сохраняет все свойства классической линейной модели прогнозирующего управления и упрощает выполнение вычислений благодаря канонической структуре этого нелинейного коэффициента. Обсуждаются некоторые рекомендации по определению номинальной модели, а также границ ее неопределенности. В статье [4] представлен основанный на использовании кусочно-линейной модели новый метод повышения резкости изображений с помехами. При этом повышается резкость по краям изображения и уменьшается шум. В работе [5] рассматривается задача подгонки выпуклой кусочно-линейной функции к заданным многомерным данным. Описан метод ее решения, представляющий собой вариацию алгоритма кластеризации с использованием k -средних.

В статье [6] разрабатывается несколько формулировок задач нелинейного программирования со смешанными целыми числами, использующих многомерные кусочно-линейные модели для аппроксимации нелинейных функций областями, объединенными в гиперкубы и симплексы. В исследовании [7] представлено несколько альтернативных вариантов выбора и комбинирования моделей, которые позволяют получить непрерывную кусочно-линейную регрессионную модель из крупномасштабных наборов данных с использованием алгоритма обучения, основанного на так называемых линейных шарнирах. Работа [8] посвящена описанию нового алгоритма построения автоматической кусочно-линейной регрессии, который предполагает повышение интерпретируемости модели, а также учитывает нелинейные взаимосвязи и возможные условия взаимодействия предикторов. В [9] моделируется активность генов с помощью кусочно-линейных дифференциальных уравнений, формируемых путем встраивания логической коммутационной сети в само уравнение. При этом генерируются непрерывные нелинейные уравнения с заменой разрывов ступенчатой функции в кусочно-линейных уравнениях сигмоидальными управляющими функциями. В [10] показано, что кусочно-дифференцируемые функции могут быть локально аппроксимированы кусочно-линейной моделью, основанной на паре точек выборки данных. Доказано, что расхождение между функцией и моделью в любой точке имеет билинейный порядок. При реализации процедуры кусочной линеаризации использован обобщенный метод Ньютона.

Следует также отметить следующие интересные работы, касающиеся применения кусочно-линейных модельных форм при исследовании сложных систем: [11] (кусочно-линейная аппроксимация пространства параметров модели для восстановления диаграммы динамической системы), [12] (алгоритм фильтрации шумов, основанный на двумерных скользящих локальных кусочно-линейных моделях), [13] (применение кусочно-линейного стохастического отображения при моделировании электрической активности уединенного нейрона), [14] (алгоритмы построения кусочно-линейных аппроксимационных моделей для обработки геомагнитных наблюдений), [15] (применение кусочно-линейной функции при оценке технической готовности транспортного средства), [16] (кусочно-линейные модели зависимости качества воды от физико-химических параметров источника водоснабжения).

Целью настоящей работы является разработка алгоритма идентификации параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии (ОВКЛР) первого типа с помощью метода смешанного оценивания (МСО).

Разработка однородной вложенной кусочно-линейной регрессионной модели на основе использования метода смешанного оценивания. В работах [17, 18] наряду с некоторыми другими вложенными регрессионными формами введена однородная вложенная кусочно-линейная регрессия первого типа, имеющая вид:

$$y_k = \min\{\min_{i \in I^1}\{a_i^1 x_{ki}\}, \dots, \min_{i \in I^G}\{a_i^G x_{ki}\}\} + \varepsilon_k, k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Здесь k – номер наблюдения, y – зависимая переменная, $x_i, i = \overline{1, m}$ – независимые переменные, $a_i^j, j = \overline{1, G}$ – идентифицируемые параметры, $\varepsilon_k, k = \overline{1, n}$ – ошибки приближения, n – длина выборки данных. Множества $I^i, i = \overline{1, G}$ являются подмножествами множества индексов $\{1, 2, \dots, m\}$ и могут иметь непустые пересечения. Все переменные и ошибки в модели (1) детерминированы.

Определим вектор $a = (a_i^j), j = \overline{1, G}, i \in I^j$.

В работе [19], в случае использования при оценивании параметров ОВКЛР (1) метода наименьших модулей (МНМ) с функцией потерь

$$J_1(a) = \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k| \quad (2)$$

предложено сводить задачу ее минимизации к задаче линейно-булева программирования (ЛБП) следующим образом.

Введем новые переменные:

$$v_{kj} = \min_{i \in I^j}\{a_i^j x_{ki}\}, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, G},$$

$$w_k = \min_{j=\overline{1, G}} v_{kj}, k = \overline{1, n}.$$

Тогда задача минимизации функции потерь (2) сводится к следующей задаче ЛБП [19]:

$$a_i^j x_{ki} - v_{kj} \leq (1 - s_{kij})M, k = \overline{1, n}, i \in I^j, j = \overline{1, G}, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I^j} s_{kij} = 1, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, G}, \quad (4)$$

$$w_k \leq v_{kj}, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, G}, \quad (5)$$

$$v_{kj} - w_k \leq (1 - r_{kj})M, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, G}, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^G r_{kj} = 1, k = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$w_k + u_k - b_k = y_k, k = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$u_k \geq 0, b_k \geq 0, k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

$$v_{kj} \geq 0, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, G}, \quad (10)$$

$$s_{kij} \in \{0, 1\}, k = \overline{1, n}, i \in I^j, j = \overline{1, G}, \quad (11)$$

$$r_{kj} \in \{0, 1\}, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, G}, \quad (12)$$

$$\delta \sum_{j=1}^G \sum_{i \in I^j} a_i^j + \sum_{k=1}^n (u_k + b_k) \rightarrow \min. \quad (13)$$

Здесь δ и M – заранее заданные малое и большое положительные числа соответственно.

Поставим задачу идентификации параметров ОВКЛР (1) несколько по-иному. Определим, в соответствии с классической монографией [20], функцию потерь общего вида:

$$J_v(a) = \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k|^v, v \geq 1.$$

Разобьем всю выборку данных на p непересекающихся подвыборок с номерами наблюдений из индексных множеств $P_s \subset \{1, 2, \dots, n\}, s = \overline{1, l}$:

$$\bigcup_{s=1}^l P_s = \{1, 2, \dots, n\}, P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j.$$

Преобразуем функцию потерь (2) в следующую:

$$J(\alpha) = \sum_{s=1}^l \sum_{k \in P_s} |\varepsilon_k|^{v_s}, \quad (14)$$

где числа $v_s \in [1, \infty]$ заданы заранее. При этом имеет место известное равенство:

$$J_\infty(\alpha) = \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k|^v = \max_{k=\overline{1,n}} |\varepsilon_k|. \quad (15)$$

Функция потерь (14) соответствует методу смешанного оценивания (МСО) параметров в регрессионном анализе (см. в частности, [21, 22]), а (15) – методу антиробастного оценивания (МАО) (см., например, [23]). Заметим, что в работе [24] описан алгоритм построения простой вложенной кусочно-линейной регрессии с помощью МСО.

Зададим значения $l = 2$, $v_1 = 1$, $v_2 = \infty$. Тогда, как и в [24], задача оценивания параметров ОВКЛР (1) с применением МСО также может быть сведена к задаче ЛБП. Для этого следует дополнить систему ограничений задачи ЛБП (3)–(13) условием

$$u_k + b_k \leq \tau, k \in P_2, \quad (16)$$

а целевую функцию (3) заменить на следующую

$$\sum_{k \in P_1} (u_k + b_k) / s + \tau + \eta \sum_{k \in P_2} (u_k + b_k) + \delta \sum_{j=1}^G \sum_{i \in I_j} a_i^j \rightarrow \min, \quad (17)$$

где s – число элементов в множестве P_1 , η – заранее заданная малая положительная константа.

Однородная вложенная кусочно-линейная модель горно-металлургической компании «Норникель». Используем описанный алгоритм для построения модели выручки горно-металлургической компании «Норникель». В качестве информационной базы моделирования привлечем статистические данные за 2010–2024 гг. (табл. 1) [25, 26]. Введем обозначения: y – выручка, млрд. руб.; x_1 – объем добычи никеля, тыс. т.; x_2 – объем добычи палладия, т.; x_3 – объем добычи меди, тыс. т.; x_4 – объем добычи платины, т.

Таблица 1

Статистические данные

Год	x_1	x_2	x_3	x_4	y
2010	295.0	87.3	378.0	21.6	388.0
2011	300.0	84.9	364.0	21.2	415.1
2012	285.0	82.8	371.0	20.2	384.5
2013	266.0	83.6	369.0	20.4	366.2
2014	274.0	85.6	368.0	20.6	456.0
2015	266.4	83.6	369.4	20.4	506.1
2016	235.7	81.4	360.2	20.0	548.8
2017	217.1	86.5	401.1	20.8	536.8
2018	218.8	84.9	473.7	20.3	728.9
2019	228.7	90.9	499.1	21.8	877.8
2020	235.7	87.9	487.2	21.6	1117.0
2021	193.0	81.4	406.8	19.9	1317.0
2022	219.0	86.8	433.0	20.2	1185.0
2023	208.6	83.7	425.4	20.7	1172.0
2024	205.0	83.7	433.0	20.7	1166.0

Примем $G = 2$, $I^1 = \{1, 4\}$, $I^2 = \{2, 3\}$ и зададим составы индексных множеств P_1 и P_2 :

$$P_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, P_2 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}.$$

Вначале построим ОВКЛР с помощью МНМ путем решения задачи ЛБП (3)–(13):

$$y_k = \min\{\min\{3.38x_{k1}, 35.9x_{k4}\}, \min\{8.58x_{k2}, 1.6x_{k3}\}\} + \varepsilon_k, k = \overline{1,15}, \quad (18)$$

$$E = 8.7\%, \tau(P_2) = 686.9.$$

Здесь E – средняя процентная ошибка:

$$E = 100\% \sum_{k=1}^{15} |\varepsilon_k| / \sum_{k=1}^{15} y_k,$$

$\tau(P_2)$ – максимальная по модулю ошибка на множестве P_2 :

$$\tau(P_2) = \max_{k \in P_2} |\varepsilon_k|.$$

Теперь построим модель (1) с помощью МСО, решив задачу ЛБП (3)–(12), (16), (17):

$$y_k = \min\{\min\{4.2x_{k1}, 60.1x_{k4}\}, \min\{14.9x_{k2}, 1.3x_{k3}\}\} + \varepsilon_k, k = \overline{1,15}, \quad (19)$$

$$E = 10.3\%, \tau(P_2) = 104.5.$$

Отметим существенное расхождение в оценках параметров моделей (18) и (19), в частности, усиление значимости объема добычи меди (x_3) при уменьшении влияния остальных предикторов. Модель (19) несколько уступает по средней процентной ошибке модели (18), но значительно ее превосходит по максимальной ошибке на второй половине выборки. Последнее обстоятельство может стать решающим при окончательном выборе модели.

Заключение. В работе предложен алгоритмический способ идентификации параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии первого типа на основе использования метода смешанного оценивания. Этот способ предполагает сведение поставленной оптимизационной задачи к задаче линейно-булева программирования. Построены два альтернативных варианта модели данного класса для горно-металлургической компании «Норникель» – методами наименьших модулей и смешанного оценивания, для каждого из которых рассчитаны значения двух критериев адекватности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Liu Y., Gao Y., Hao X., Liao H. The Relationship between Residential Electricity Consumption and Income: A Piecewise Linear Model with Panel Data // *Energies*. – 2016. – Vol. 9, No. 10. – P. 831. – DOI: 10.3390/en9100831.
2. Amaldi E., Mattavelli M. The MIN PFS problem and piecewise linear model estimation // *Discrete Applied Mathematics*. – 2002. – Vol. 118, Issues 1–2. – P. 115–143. – DOI: 10.1016/S0166-218X(01)00260-8.
3. Cervantes A.L., Agamennoni O.E., Figueroa J.L. A nonlinear model predictive control system based on Wiener piecewise linear models // *Journal of Process Control*. – 2003. – Vol. 13, No. 7. – P. 655–666. – DOI: 10.1016/S0959-1524(02)00121-X.
4. Russo F. Piecewise Linear Model-Based Image Enhancement // *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. – 2004. – Article No. 983173. – DOI: 10.1155/S1110865704404041.
5. Magnani A., Boyd S.P. Convex piecewise-linear fitting // *Optimization and Engineering*. – 2009. – Vol. 10. – P. 1–17. – DOI: 10.1007/s11081-008-9045-3.
6. Silva T.L., Camponogara E.A. Computational analysis of multidimensional piecewise-linear models with applications to oil production optimization // *European Journal of Operational Research*. – 2014. – Vol. 232, No. 3. – P. 630–642. – DOI: 10.1016/j.ejor.2013.07.040.
7. Moreno-Carbonell S., Sánchez-Úbeda F. Piecewise Linear Regression Model Ensemble for Large-Scale Curve Fitting // *Algorithms*. – 2024. – Vol. 17, No. 4. – 147 p.
8. von Ottenbreit M., De Bin R. Automatic piecewise linear regression // *Computational Statistics*. – 2024. – Vol. 39. – P. 1867–1907.
9. Shahrear P., Glass L., Wilds R., Edwards R. Dynamics in piecewise linear and continuous models of complex switching networks // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2015. – Vol. 110. – P. 33–39.
10. Griewank A., Streubel T., Lehmann L., Radons M., Hasenfelder R. Piecewise linear secant approximation via algorithmic piecewise differentiation // *Optimization Methods and Software*. – 2018. – Vol. 33, Issues 4–6.
11. Бозатиков Е.В., Битюцкая Л.А., Бормонтов Е.Н., Хухрянский М.Ю. Реконструкция бифуркационной диаграммы нелинейной динамической системы по стационарным и нестационарным временным рядам // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. – 2006. – № 2. – С. 24–35.

12. Гетманов В.Г., Гвишиани А.Д., Сидоров и др. Фильтрация наблюдений угловых распределений мюонных потоков от годоскопа «Ураган» // Ядерная физика и инжиниринг. – 2017. – Т. 8, № 6. – С. 506-512.
13. Андреев К.В., Красичков Л.В. Моделирование электрической активности нейрона с помощью кусочно-непрерывных отображений // Письма в Журнал технической физики. – 2003. – Т. 29, № 3. – С. 46-52.
14. Гетманов В.Г. Локальные и сплайновые аппроксимации в цифровой обработке геомагнитных наблюдений // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19, № 4 (68). – С. 26-42.
15. Егоров С.Я., Салих Х.С., Затонский А.В. Имитационная модель технической готовности крупного автопарка // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2020. – Т. 20, № 2. – С. 14-25.
16. Бубыр Д.С. Система раннего предупреждения о нарушении показателей качества питьевой воды // Программные продукты и системы. – 2015. – № 2. – С. 119-123.
17. Носков С.И. Подход к формализации вложенной кусочно-линейной регрессии // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2023. – № 1-2 (76). – С. 218-220.
18. Носков С.И. Некоторые формы вложенной кусочно-линейной регрессии // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 3. – С. 467-469.
19. Носков С.И., Белинская С.И. Вычисление оценок параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2023. – Т. 50, № 4. – С. 115-120.
20. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
21. Носков С.И. О методе смешанного оценивания параметров линейной регрессии // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. – 2019. – № 1 (2). – С. 41-45.
22. Носков С.И. Метод смешанного оценивания параметров линейной регрессии: особенности применения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2021. – № 1. – С. 126-132.
23. Носков С.И. Метод антиробастного оценивания параметров линейной регрессии: число максимальных по модулю ошибок аппроксимации // Южно-Сибирский научный вестник. – 2020. – № 1 (29). – С. 51-54.
24. Носков С.И., Знайдюк А.Н. Вычисление параметров простой формы вложенной кусочно-линейной регрессии методом смешанного оценивания // Вестник кибернетики. – 2024. – Т. 23, № 1. – С. 54-59.
25. Норникель: финансовая отчетность // Официальный сайт ПАО «ГМК «Норильский никель». – Режим доступа: <https://nornickel.ru/investors/disclosure/financials/#accordion-2014> (дата обращения: 15.11.2025).
26. ГМК Норникель (GMKN): годовая финансовая отчетность МСФО // Информационный портал Smart-Lab. – Режим доступа: <https://smart-lab.ru/q/GMKN/f/y> (дата обращения: 15.11.2025).

REFERENCES

1. Liu Y., Gao Y., Hao X., Liao H. The Relationship between Residential Electricity Consumption and Income: A Piecewise Linear Model with Panel Data, *Energies*, 2016, Vol. 9, No. 10, pp. 831. DOI: 10.3390/en9100831.
2. Amaldi E., Mattavelli M. The MIN PFS problem and piecewise linear model estimation, *Discrete Applied Mathematics*, 2002, Vol. 118, Issues 1–2, pp. 115-143. DOI: 10.1016/S0166-218X(01)00260-8.
3. Cervantes A.L., Agamennoni O.E., Figueroa J.L. A nonlinear model predictive control system based on Wiener piecewise linear models, *Journal of Process Control*, 2003, Vol. 13, No. 7, pp. 655-666. DOI: 10.1016/S0959-1524(02)00121-X.
4. Russo F. Piecewise Linear Model-Based Image Enhancement, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2004, Article No. 983173. DOI: 10.1155/S1110865704404041.
5. Magnani A., Boyd S.P. Convex piecewise-linear fitting, *Optimization and Engineering*, 2009, Vol. 10, pp. 1-17. DOI: 10.1007/s11081-008-9045-3.
6. Silva T.L., Camponogara E.A. Computational analysis of multidimensional piecewise-linear models with applications to oil production optimization, *European Journal of Operational Research*, 2014, Vol. 232, No. 3, pp. 630-642. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.07.040.
7. Moreno-Carbonell S., Sánchez-Úbeda F. Piecewise Linear Regression Model Ensemble for Large-Scale Curve Fitting, *Algorithms*, 2024, Vol. 17, No. 4, 147 p.
8. von Ottenbreit M., De Bin R. Automatic piecewise linear regression, *Computational Statistics*, 2024, Vol. 39, pp. 1867-1907.
9. Shahrear P., Glass L., Wilds R., Edwards R. Dynamics in piecewise linear and continuous models of complex switching networks, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2015, Vol. 110, pp. 33-39.

10. Griewank A., Streubel T., Lehmann L., Radons M., Hasenfelder R. Piecewise linear secant approximation via algorithmic piecewise differentiation, *Optimization Methods and Software*, 2018, Vol. 33, Issues 4–6.
11. Bogatkov E.V., Bityutskaya L.A., Bormontov E.N., Khukhryansky M.Yu. Rekonstruktsiya bifurkatsionnoy diagrammy nelineinoy dinamicheskoy sistemy po statsionarnym i nestatsionarnym vremennym ryadam [Reconstruction of the bifurcation diagram of a nonlinear dynamical system from stationary and non-stationary time series], *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2006, No. 2, pp. 24-35.
12. Getmanov V.G., Gvishiani A.D., Sidorov i dr. Fil'tratsiya nablyudeniy uglovyykh raspredeleniy myuonnykh potokov ot godoskopa «Uragan» [Filtration of observations of angular distributions of muon fluxes from the "Uragan" hodoscope], *Yadernaya fizika i inzhiniring* [Nuclear Physics and Engineering], 2017, Vol. 8, No. 6, pp. 506-512.
13. Andreev K.V., Krasichkov L.V. Modelirovanie elektricheskoy aktivnosti neyrona s pomoshch'yu kusochno-nepreryvnykh otobrazheniy [Modeling the electrical activity of a neuron using piecewise continuous mappings], *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics Letters], 2003, Vol. 29, No. 3, pp. 46-52.
14. Getmanov V.G. Lokal'nye i splaynovye approksimatsii v tsifrovoy obrabotke geomagnitnykh nablyudeniy [Local and Spline Approximations in Digital Processing of Geomagnetic Observations], *Chebyshevskiy sbornik* [Chebyshevskii Collection], 2018, Vol. 19, No. 4 (68), pp. 26-42.
15. Egorov S.Ya., Salikh Kh.S., Zatonskiy A.V. Imitatsionnaya model' tekhnicheskoy gotovnosti krupnogo avtoparka [Simulation model of the technical readiness of a large vehicle fleet], *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika* [Bulletin of South Ural State University. Series: Computer Technologies, Control, Radio Electronics], 2020, Vol. 20, No. 2, pp. 14-25.
16. Bubyri' D.S. Sistema rannego preduprezhdeniya o narushenii pokazateley kachestva pit'evoy vody [Early warning system for drinking water quality indicators violation], *Programmnye produkty i sistemy* [Software & Systems], 2015, No. 2, pp. 119-123.
17. Noskov S.I. Podkhod k formalizatsii vlozhennoy kusochno-lineynoy regressii [An approach to formalizing nested piecewise linear regression], *Mezhdunarodnyy zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk* [International Journal of Humanities and Natural Sciences], 2023, No. 1–2 (76), pp. 218-220.
18. Noskov S.I. Nekotorye formy vlozhennoy kusochno-lineynoy regressii [Some Forms of Nested Piecewise Linear Regression], *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki* [News of the Tula State University. Technical Sciences], 2023, No. 3, pp. 467-469.
19. Noskov S.I., Belinskaya S.I. Vychislenie otsenok parametrov odnorodnoy vlozhennoy kusochno-lineynoy regressii [Calculation of parameter estimates for homogeneous nested piecewise linear regression], *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki* [Bulletin of the Dagestan State Technical University. Technical Sciences], 2023, Vol. 50, No. 4, pp. 115-120.
20. Demidenko E.Z. Lineynaya i nelineynaya regressii [Linear and Nonlinear Regression]. Moscow: Finansy i statistika, 1981, 302 p.
21. Noskov S.I. O metode smeshannogo otsenivaniya parametrov lineynoy regressii [On the method of mixed estimation of linear regression parameters], *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnyimi sistemami* [Information Technologies and Mathematical Modeling in Management of Complex Systems], 2019, No. 1 (2), pp. 41-45.
22. Noskov S.I. Metod smeshannogo otsenivaniya parametrov lineynoy regressii: osobennosti primeneniya [Method of Mixed Estimation of Linear Regression Parameters: Application Features], *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyy analiz i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies], 2021, No. 1, pp. 126-132.
23. Noskov S.I. Metod antirobastnogo otsenivaniya parametrov lineynoy regressii: chislo maksimal'nykh po modulyu oshibok approksimatsii [Method of Anti-Robust Estimation of Linear Regression Parameters: Number of Maximum Absolute Approximation Errors], *Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik* [South-Siberian Scientific Bulletin], 2020, No. 1 (29), pp. 51-54.
24. Noskov S.I., Znaydyuk A.N. Vychislenie parametrov prostoy formy vlozhennoy kusochno-lineynoy regressii metodom smeshannogo otsenivaniya [Calculation of Parameters for a Simple Form of Nested Piecewise Linear Regression by the Mixed Estimation Method], *Vestnik kibernetiki* [Cybernetic Bulletin], 2024, Vol. 23, No. 1, pp. 54-59.
25. Normikel': finansovaya otchetnost' [Normikel: Financial Statements], *Ofitsial'nyy sayt PAO «GMK «Noril'skiy nikel'»* [Official website of PJSC MMC Norilsk Nickel]. Available at: <https://normikel.ru/investors/disclosure/financials/#accordion-2014> (accessed 15 November 2025).
26. GMK Normikel' (GMKN): godovaya finansovaya otchetnost' MSFO [Norilsk Nickel (GMKN): Annual IFRS Financial Statements], *Informatsionnyy portal Smart-Lab* [Smart-Lab Information Portal]. Available at: <https://smart-lab.ru/q/GMKN/f/y> (accessed 15 November 2025).

Носков Сергей Иванович – Иркутский государственный университет путей и сообщения; e-mail: sergey.noskov.57@mail.ru; г. Иркутск, Россия; кафедра информационных систем и защиты информации; д.т.н.; профессор.

Медведев Александр Петрович – Иркутский государственный университет путей и сообщения; e-mail: medvedeff.a.p@yandex.ru; г. Иркутск, Россия; кафедра информационных систем и защиты информации; ассистент.

Кириллов Илья Денисович – Иркутский государственный университет путей и сообщения; e-mail: iliakirillov07@gmail.com; г. Иркутск, Россия; тел.: +79247192344; студент.

Noskov Sergey Ivanovich – Irkutsk State Transport University; e-mail: sergey.noskov.57@mail.ru; Irkutsk, Russia; the Department of Information Systems and Information Security; dr. of eng. sc.; professor.

Medvedev Alexander Petrovich – Irkutsk State Transport University; e-mail: medvedeff.a.p@yandex.ru; Irkutsk, Russia; the Department of Information Systems and Informations Security; assistant.

Kirillov Ilya Denisovich – Irkutsk State Transport University; e-mail: iliakirillov07@gmail.com; Irkutsk, Russia; phone: +79247192344; student.

УДК 001.891.57, 519.876.5

DOI 10.18522/2311-3103-2026-4-109-119

Т.Р. Гамберов, Р.Н. Сафин, Э.В. Чеботарева, Т.Г. Цой, Е.А. Магид

ОЦЕНКА АЛГОРИТМА СЛЕДОВАНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА TIAGO BASE ЗА ПОЛЬЗОВАТЕЛЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ ЧЕЛОВЕКА В СИМУЛЯТОРЕ GAZEBO

Цифровые модели человека (ЦМЧ) становятся важным инструментом в области робототехники, позволяя осуществлять воспроизводимую и контролируемую проверку алгоритмов компьютерного зрения. К числу таких алгоритмов относятся обнаружение, отслеживание и следование за человеком, которые играют ключевую роль в задачах автономной навигации, планирования траектории и безопасного взаимодействия робота с людьми в общих пространствах. При этом стандартные симуляторы, как правило, ограничены по степени реалистичности виртуальных акторов, разнообразию их внешнего вида и вариативности поведения. Такие ограничения снижают достоверность получаемых результатов и затрудняют перенос алгоритмов на реальных роботов. В данной работе представлен набор настраиваемых ЦМЧ для симулятора Gazebo. Разработанные модели человека отличаются вариативностью одежды, антропометрическими параметрами и внешним обликом, а также включают библиотеку анимаций ходьбы, имитирующих различные сценарии движения человека, включая изменение скорости и направления. Для проверки эффективности предложенного подхода были проведены вычислительные эксперименты в Gazebo в реалистичной офисной среде с использованием мобильного робота TIAGo Base с дифференциальным приводом, оснащённого двухмерным лазерным сканером и монокулярной камерой. Эффективность работы алгоритма следования за пользователем с применением новых ЦМЧ оценивалась по средней пройденной дистанции и количеству случаев потери цели (количеству ложных срабатываний). Результаты показали, что предложенные ЦМЧ позволяют воспроизводить сложные условия восприятия, включая окклюзии и динамические препятствия, а также обеспечивают масштабируемую и систематическую проверку алгоритмов. Данные, полученные в результате вычислительных экспериментов, подтверждают значимость разработанных ЦМЧ для тестирования робототехнических систем, ориентированных на взаимодействие с человеком в условиях, приближённых к реальным.

Цифровые модели человека; компьютерное моделирование; компьютерное зрение; ROS; Gazebo.

T.R. Gamberov, R.N. Safin, E.V. Chebotareva, T.G. Tsoy, E.A. Magid

EVALUATING THE TIAGO BASE MOBILE ROBOT'S PERSON-FOLLOWING ALGORITHM USING REALISTIC DIGITAL HUMAN MODELS IN THE GAZEBO SIMULATOR

Digital Human Models (DHMs) are becoming an important tool in robotics, enabling reproducible and controlled validation of computer vision algorithms. Such algorithms include human detection, tracking, and following, which play a key role in autonomous navigation, trajectory planning, and safe robot-