

24. Chuvikov D.A. Modeli i algoritmy rekonstruktsii i ekspertizy avariynykh sobytii dorozhno-transportnykh proissheshtviy: spetsial'nost' 05.13.01 "Sistemnyy analiz, upravlenie i obrabotka informatsii (po otraslyam)": diss. ... kand. tekhn. nauk [Models and algorithms for reconstruction and examination of emergency events of road traffic accidents: specialty 05.13.01 "System analysis, management and processing of information (by industry)": cand. of eng. sc. diss.]. Moscow, 2017, 318 p. EDN YUPHFQ.
25. Gun Sh. Mivarnaya sistema prinyatiya resheniy po optimizatsionnomu raspredeleniyu грузов dlya grupp skladskikh robotov [Mivar decision-making system for optimized cargo distribution for groups of warehouse robots], *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information technology], 2025, Vol. 13, No. 3 (50). DOI 10.26102/2310-6018/2025.50.3.047. EDN WJJQXB.

Гун Шэншо – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана; e-mail: hiteyeb@163.com; г. Москва, Россия; тел.: +79269656719; кафедра системы обработки информации и управления; аспирант.

Gong Shengshuo – Bauman Moscow State Technical University; e-mail: hiteyeb@163.com; Moscow, Russia; phone: +79269656719; the Department of Information Processing and Management; postgraduate student.

УДК 517.95

DOI 10.18522/2311-3103-2026-3-232-243

А.Г. Езаова, Л.В. Канукоева, Г.В. Куповых

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССАМИ В ГАЗОВЫХ И ЖИДКИХ СРЕДАХ

Приведены результаты исследования внутренней краевой задачи для уравнения смешанного гипербола-параболического типа, характеризующегося наличием кратных характеристик. Область, в которой рассматривается уравнение, является конечной и односвязной, состоящей из двух частей: гиперболической и параболической. Это разделение области обусловлено спецификой рассматриваемого уравнения. Граница между гиперболической и параболической областями представляет собой линию вырождения, где происходит переход от гиперболического к параболическому типу уравнения. Ключевой особенностью поставленной задачи является краевое условие, заданное в гиперболической части области. Это условие содержит связывает между собой значения искомой функции в точках, принадлежащим характеристикам области, что придает задаче значительную сложность. Цель работы – доказательство теоремы существования и единственности решения поставленной краевой задачи. Доказательство проводится для различных случаев, определяемых дискриминантом кубического характеристического уравнения, связанного с уравнением в частных производных. Различные значения дискриминанта указывают на различные качественные свойства решений и требуют индивидуального подхода в доказательстве. Для доказательства единственности решения используется метод интегралов энергии. Этот метод позволяет установить определенные энергетические неравенства, связывающие решение с заданными функциями и их точечными значениями в краевом условии. Полученные неравенства накладывают ограничения на допустимые значения параметров задачи, гарантируя единственность решения. Нарушение этих ограничений может привести к некорректности задачи или к отсутствию единственного решения. Вопрос существования решения исследуется путем сведения задачи к эквивалентной системе функциональных соотношений, связывающих следы искомого решения и его производной на линии вырождения. Эти следы рассматриваются отдельно для гиперболической и параболической частей области. Дальнейшее исследование сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Важно отметить, что ядро этого интегрального уравнения имеет слабую особенность, а правая часть непрерывна. Безусловная разрешимость этого интегрального уравнения, а следовательно, и существование решения исходной задачи, выводится из ранее доказанной единственности решения. Это существенный момент, демонстрирующий тесную связь между существованием и единственностью решения.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода; функция Грина; уравнение смешанного типа; существование решения; единственность решения.

A.G. Ezaova, L.V. Kanukoeva, G.V. Kupovykh

APPLICATION OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM IN PROCESS CONTROL IN GASEOUS AND LIQUID ENVIRONMENTS

The paper presents the results of a study of the internal boundary value problem for a mixed hyperbolic-parabolic equation characterized by the presence of multiple characteristics. The domain in which the equation is considered is finite and simply connected, consisting of two parts: hyperbolic and parabolic. This division of the domain is determined by the specific nature of the equation under consideration. The boundary between the hyperbolic and parabolic regions is a degeneracy line, where the transition from a hyperbolic to a parabolic equation occurs. A key feature of the problem is the boundary condition specified in the hyperbolic part of the region. This condition relates the values of the desired function at points belonging to the characteristics of the region, which adds significant complexity to the problem. The purpose of this work is to prove the existence and uniqueness theorem for the given boundary value problem. The proof is conducted for various cases determined by the discriminant of the cubic characteristic equation associated with the partial differential equation. Different values of the discriminant indicate different qualitative properties of the solutions and require an individual approach to the proof. To prove the uniqueness of a solution, the energy integral method is used. This method allows one to establish certain energy inequalities that relate the solution to the given functions and their point values in the boundary condition. The resulting inequalities impose constraints on the permissible values of the problem parameters, guaranteeing the uniqueness of the solution. Violating these constraints may lead to the problem being ill-posed or to the absence of a unique solution. The question of the existence of a solution is investigated by reducing the problem to an equivalent system of functional relations linking the traces of the desired solution and its derivative on the degeneracy line. These traces are considered separately for the hyperbolic and parabolic parts of the domain. Further investigation reduces to solving a Fredholm integral equation of the second kind. It is important to note that the kernel of this integral equation has a weak singularity, while the right-hand side is continuous. The unconditional solvability of this integral equation, and therefore the existence of a solution to the original problem, is deduced from the previously proven uniqueness of the solution. This is a significant point, demonstrating the close connection between the existence and uniqueness of a solution.

Fredholm integral equation of the second kind; Green's function; mixed-type equation; existence of a solution; uniqueness of a solution.

Введение. Теория нелокальных краевых задач охватывает обширный и активно развивающийся раздел современной теории математической физики и дифференциальных уравнений. В отличие от классических (локальных) задач, где условия задаются в каждой точке границы области, нелокальные задачи связывают значения искомой функции или ее производных в разных точках границы или даже внутри области. Интерес к нелокальным задачам возник очень давно. Основой для систематических исследований считается работа А.В. Бицадзе и А.А. Самарского 1969 года, посвященная нахождению периодических решений для эллиптических уравнений [1]. Однако потребность в таких задачах возникла раньше – в прикладных областях, таких как: газовая динамика, моделирование физических процессов и т.д. Вклад в эту теорию внесли многие известные математики, среди которых особо выделяются монографии А.Л. Скубачевского [2, 3] и А.М. Нахушева [4, 5], заложившие фундамент современных исследований. Из зарубежных авторов можно отметить например Ahmad B., Ntouyas S.K. [6]. В своей монографии автор рассматривает нелокальные задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка. Elloe P.W., Henderson J. [7] в своей монографии раскрывает вопросы существования и единственности нелокальных краевых задач, а также применяют эти результаты к различным уравнениям и динамическим уравнениям на временных шкалах.

В представленной работе исследуется влияние различных параметров задачи на корректность постановки задачи. Полученные результаты позволяют сделать выводы о чувствительности решения к изменениям в краевых условиях и параметрах уравнения. В частности, определенные ограничения на коэффициенты уравнения гарантирующие корректность и устойчивость решения к малым возмущениям входных данных. Подробное исследование этих зависимостей является важной частью работы и позволяет глубже понять природу рассматриваемой задачи и ее решений.

Краевые задачи для смешанных уравнений гиперболо-параболического типа применяются для описания физических процессов с переходом от волновых эффектов (параболическая часть уравнений) к диффузионным (гиперболическая часть). Такого типа математические модели применяются в газодинамике, расчете звуковых полей, при изучении нестационарных процессов с потерей энергии, в задачах управления параметрами систем и т.д. [8, 9]

Задачи рассматриваемого типа могут возникать при управлении процессами в трубопроводах высокого давления (газовых и жидкостных средах). При строительстве магистральных трубопроводах газа или нефти могут возникать аварии или гидроудар). Гидроудар может возникать даже при резком закрытии задвижки или при остановке насоса. При этом кинетическая энергия движущейся жидкости преобразуется в энергию давления, которая в свою очередь порождает ударную волну распространяющуюся по трубе со скоростью звука в рассматриваемой среде. Такие процессы моделируются с помощью гиперболо-параболических уравнений. Причем параболическая часть описывает диссипацию энергии, вязкость, теплопотери; а гиперболическая часть – фронт ударной волны – распространение волн давления. Датчик в начале трубы считывает волну, а исполнительный механизм в середине трубы должен сработать с учетом того, что отраженная волна придет через какое-то время.

Уравнения с нелокальными условиями позволяют рассчитывать этот исполнительный механизм, таким образом, чтобы он «запоминал» начальный импульс и гасил его в точке максимума интерференции волн.

Постановка задачи. Рассмотрим смешанное уравнение второго порядка вида

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y + a(x, y)U_x + b(x, y)U, & y > 0, \\ y^{2m+1}U_{xx} + y^2U_{yy} + \alpha yU_y + \beta U, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где α и β – действительные постоянные, $m = \text{const} > 0$.

В зависимости от знака переменной y уравнение меняет тип: в области $y < 0$ оно принадлежит гиперболическому типу, тогда как на линии $y = 0$ наблюдается вырождение как типа, так и порядка уравнения.

В работе А.В. Бицадзе [8] для случая $\beta \equiv 0$ впервые было показано, что наличие линии вырождения порядка при $\alpha = (1-2m)/2$, $(1-2m)/2 < \alpha < 1$ существенно изменяет структуру решения. Автором предложены модифицированные постановки задачи Коши, учитывающие указанное вырождение. Для значений $\alpha = (1-2m)/2$, $(1-2m)/2 < \alpha < 1$ вопросы корректности нелокальных краевых задач со смещением исследовались в работах [8–12]. Дальнейшее обобщение этих результатов на случай когда α меньше $(1-2m)/2$, больше или равна единице выполнено В.А. Елеевым [13].

В статье [14, 15] рассмотрено уравнение (1) при $y < 0$, $\beta \neq 0$. Изучены корректные постановки задачи Коши в гиперболической подобласти, а также задачи типа Трикоми в смешанной области. Установлено, что коэффициент при младших производных и степень вырождения порядка уравнения оказывают существенное влияние на корректность указанных задач.

Рассмотрим область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, которая состоит из двух подобластей: Ω_1 – параболическая часть, ограниченная отрезками AB , BB_0 , B_0A_0 и A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = h$, $x = 0$ при $y > 0$, и Ω_2 гиперболическая часть, ограниченная характеристиками

$$AC: \quad x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0,$$

$$BC: \quad x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1,$$

уравнения (1) при $y < 0$, а I – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти регулярное в $\Omega \setminus \{y=0\}$ и непрерывное в $\bar{\Omega} \setminus \bar{I}$ решение $U(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$(\alpha_1 U_x + \beta_1 U)|_{x=0} = \mu_1(y), \quad (\alpha_2 U_x + \beta_2 U)|_{x=1} = \mu_2(y), \quad (2)$$

$$h_1(x)U[\Theta_0(x)] + h_2(x)U[\Theta_1(x)] = h_3(x), \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (3)$$

причем

$$\lim_{y \rightarrow +0} U(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\delta U(x, y) = \tau(x), \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\delta+\alpha} \left(U_y(x, y) - \frac{\delta}{y} U(x, y) \right) = \nu(x),$$

где $2\delta = 1 - \alpha - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – постоянные, $h_1(x), h_2(x), h_3(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$, $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ точки пересечения характеристик, выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками AC и BC соответственно

$$\Theta_0(x) = \frac{x}{2} - i \left[\frac{2m+1}{4} x \right]^{\frac{2}{2m+1}},$$

$$\Theta_1(x) = \frac{1+x}{2} - i \left[\frac{2m+1}{4} (1-x) \right]^{\frac{2}{2m+1}}.$$

Для краткости записей введем обозначения:

$$\delta_0 = 2\delta/(2m+1),$$

$$\delta_1 = [2(1-\alpha-\delta) - 2m-1]/(2m+1),$$

$$f(x) = h_3(x) - h_1(x)n_3(x) - h_2(x)m_3(x).$$

Основные результаты. Решение $U(x, y)$, удовлетворяющее условию (4), представимо в виде [16-16]

$$U(x, y) = \frac{(-y)^\delta}{2} \left\{ \tau \left[x - \frac{2}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} \right] + \tau \left[x + \frac{2}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} \right] \right\} -$$

$$- \frac{2(-y)^{1-\alpha-\delta}}{2m+1} \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2(1-2t)}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} \right] dt, \quad (5)$$

если $2\sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta} = 2m+1$.

Учитывая значения $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ в равенстве (5), получим

$$U[\Theta_0(x)] = n_1(x)\tau(x) + n_2(x) \int_0^x \nu(t) dt + n_3(x), \quad (6)$$

$$U[\Theta_1(x)] = m_1(x)\tau(x) + m_2(x) \int_x^1 \nu(t) dt + m_3(x), \quad (7)$$

где

$$n_1(x) = c_1 x^{\delta_0}, \quad n_2(x) = c_2 x^{\delta_1}, \quad n_3(x) = c_1 x^{\delta_0} \tau(0),$$

$$m_1(x) = c_1 (1-x)^{\delta_0}, \quad m_2(x) = c_2 (1-x)^{\delta_1},$$

$$m_3(x) = c_1 (1-x)^{\delta_0} \tau(1), \quad \delta_0 = 2\delta/(2m+1),$$

$$\delta_1 = [2(1-\alpha-\delta) - 2m-1]/(2m+1),$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2m+1}{4} \right]^{\delta_0}, \quad c_2 = -\frac{2}{2m+1} \left[\frac{2m+1}{4} \right]^{\delta_1}.$$

Подставляя (6), (7) в краевое условие (3), после несложных преобразований получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части области Ω на линию $y = 0$ вида

$$p(x)\tau(x) + q(x)\int_0^x \nu(t)dt + g(x)\int_x^1 \nu(t)dt = f(x), \quad (8)$$

где

$$p(x) = h_1(x)n_1(x) + h_2(x)m_1(x), \quad q(x) = h_1(x)n_2(x), \\ g(x) = h_2(x)m_2(x), \quad f(x) = h_3(x) - h_1(x)n_3(x) - h_2(x)m_3(x).$$

Будем исследовать разрешимость интегрального уравнения (8) относительно $\nu(x)$ для различных случаев задания коэффициентов.

Пусть имеет место случай $q(x) \neq 0$, $g(x) = 0$, т.е. уравнение (8) имеет вид

$$p(x)\tau(x) + q(x)\int_0^x \nu(t)dt = f(x). \quad (9)$$

Обозначим

$$z_0(x) = p(x)/q(x), \quad z_1(x) = f(x)/q(x), \quad (10)$$

тогда равенство (8) принимает вид

$$\int_0^x \nu(t)dt = -z_0(x)\tau(x) + z_1(x). \quad (11)$$

Теорема. Задача имеет не более одного решения, если выполнены условия:

$$h_1(x)x^{\delta_0} + h_2(x)(1-x)^{\delta_0} \neq 0; \quad a_x(x, y) - 2b(x, y) - 2 > 0, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_1; \\ [\alpha_2 a(1, y) - 2\beta_2]/\alpha_2 \leq 0, \quad [\alpha_1 a(0, y) - 2\beta_1]/\alpha_1 \geq 0; \\ b(x, 0) - \frac{1}{2}a'(x, 0) \leq 0, \\ x(1-x)h_1\left(\frac{h_2}{h_1}\right)' - \delta_1 h_2 = 0, \quad h_1(x) \neq 0.$$

Доказательство единственности. Переходя к пределу при $y \rightarrow +0$ в уравнении (1), из параболической части будем иметь

$$\nu(x) = \tau''(x) + a(x, 0)\tau'(x) + b(x, 0)\tau(x). \quad (12)$$

Из (12) интегрированием по частям, и с учетом однородных граничных условий (2), получим соотношение

$$I_1 = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = \int_0^1 \tau''(x)\tau(x)dx + \int_0^1 a(x, 0)\tau'(x)\tau(x)dx + \int_0^1 b(x, 0)\tau^2(x)dx = \\ = \frac{\alpha_2 a(1, 0) - 2\beta_2}{2\alpha_2} \tau^2(1) + \frac{2\beta_1 - \alpha_1 a(0, 0)}{2\alpha_1} \tau^2(0) - \\ - \int_0^1 \tau'^2(x)dx + \int_0^1 \left(b(x, 0) - \frac{1}{2}a'(x, 0) \right) \tau^2(x)dx. \quad (13)$$

В силу условий, наложенных на $a, b, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$, замечаем, что

$$I_1 \leq 0. \quad (14)$$

Покажем теперь, что из гиперболической части Ω_2 имеет место неравенство

$$I_1 = \int_0^1 \tau(x) \nu(x) dx \geq 0. \quad (15)$$

Действительно, из равенства (11), после дифференцирования, имеем

$$\nu(x) = -(z_0(x)\tau'(x) + z_0'(x)\tau(x)). \quad (16)$$

Умножая (16) на $\tau(x)$, а затем интегрируя по частям от 0 до 1 с учетом условия

$$x(1-x)h_1 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)' - \delta_1 h_2 = 0,$$

получим

$$I_1 = \int_0^1 \tau(x) \nu(x) dx = \frac{1}{2} z_0(0) \tau^2(0) - \frac{1}{2} z_0(1) \tau^2(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 z_0'(x) \tau^2(x) dx. \quad (17)$$

В силу условий на $z_0(x)$, замечаем, что $I_1 \geq 0$. Сравнивая равенства (14), (15) приходим к заключению, что $I_1 = 0$, следовательно

$$\tau(x) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

В области Ω_1 рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} U(U_{xx} + a(x, y)U_x + b(x, y)U - U_y) &= \frac{\partial}{\partial x}(UU_x + \frac{a}{2}U^2) - \\ &- \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U^2}{2}\right) + \left(b(x, y) - \frac{1}{2}a_x(x, y)\right)U^2 - U_x^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Проинтегрировав тождество (18) по области Ω_1 , и применив формулу Грина, получим равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} U^2 dx + 2U \left(U_x + \frac{1}{2} a(x, y)U \right) dy - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (a_x(x, y) - 2b(x, y)) U^2 dx dy - \int_{\Omega_1} U_x^2 dx dy, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\gamma = AB \cup BB_1 \cup B_1A_1 \cup A_1A$, а AB, BB_1, B_1A_1, A_1A отрезки прямых $y=0, x=1, y=h, x=0$ соответственно. Учитывая в (19) однородные граничные условия (2) и $\tau(x) \equiv 0$, получим

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} \int_0^1 U^2(x, h) dx + \frac{1}{2} \int_0^h \frac{\alpha_2 a(1, y) - 2\beta_2}{\alpha_2} U^2(1, y) dy + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^h \frac{2\beta_1 - \alpha_1 a(0, y)}{\alpha_1} U^2(0, y) dy - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} [a_x(x, y) - 2b(x, y)] U^2(x, y) dx dy - \int_{\Omega_1} U_x^2(x, y) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Равенство (20) имеет место тогда и только тогда, когда

$$U(x, h) = 0, \quad \forall x \in A_1B_1; \quad U(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega_1}.$$

Отсюда следует, что $U(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_1$. При $\tau(x) = 0$ из равенства (16) имеем $v(x) = 0$. Тогда $U(x, y) \equiv 0$ в Ω_2 как решение видоизмененной задачи Коши с нулевыми данными.

Доказательство существования. Переходя к доказательству существования решения задачи, исключим $v(x)$ из (12) и (16) и учтем граничные условия (2). В результате приходим к следующей задаче относительно $\tau(x)$

$$\tau''(x) + a_1(x)\tau'(x) + b_1(x)\tau(x) = z_1'(x), \quad (21)$$

$$\alpha_1\tau'(0) + \beta_1\tau(0) = \mu_1(0), \quad \alpha_2\tau'(1) + \beta_2\tau(1) = \mu_2(0), \quad (22)$$

где

$$a_1(x) = a(x, 0) + z_0(x),$$

$$b_1(x) = b(x, 0) + z_0'(x).$$

Задача (21), (22) заменой

$$\tau(x) = V(x) + w(x) = V(x) + \frac{\mu_1(0)\beta_2 - \mu_2(0)\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - (\alpha_2 + \beta_2)\beta_1}x + \frac{\mu_2(0)\alpha_1 - (\alpha_2 + \beta_2)\mu_1(0)}{\alpha_1\beta_2 - (\alpha_2 + \beta_2)\beta_1},$$

приводится к виду

$$V''(x) + a_1(x)V'(x) + b_1(x)V(x) = z_2(x), \quad (23)$$

$$\alpha_1V'(0) + \beta_1V(0) = 0, \quad (24)$$

$$\alpha_2V'(1) + \beta_2V(1) = 0, \quad (25)$$

где

$$z_2(x) = -a_1(x)w'(x) - b_1(x)w(x) + z_1'(x).$$

Единственное решение задачи (23)–(25) задается формулой

$$V(x) = \int_0^1 G(x, t)z_2(t)dt,$$

где $G(x, t)$ – функция Грина задачи (23)–(25).

Таким образом, с учетом введенной замены, решение задачи (21), (22) принимает вид

$$\tau(x) = \int_0^1 G(x, t)z_2(t)dt + w(x). \quad (26)$$

После нахождения $\tau(x)$ из равенства (12) или (16) находим $v(x)$. Следовательно, решение поставленной задачи в области Ω_2 задается формулой (5), а в области Ω_1 приходим к задаче (1), (2) и $U(x, 0) = \tau(x)$.

Уравнение (1) при $y > 0$ заменой

$$U(x, y) = z(x, y)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x a(t, y)dt\right), \quad (27)$$

приводится к виду

$$z_{xx} - z_y + c(x, y)z = 0, \quad (28)$$

где

$$4c(x, y) = -2a_x(x, y) - a^2(x, y) + 4b(x, y) + 2\int_0^x a_y(t, y)dt.$$

Краевые условия, при такой замене, принимают вид

$$\alpha_1 z_x(0, y) + \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{2} a(0, y) \right) z(0, y) = \mu_1(y), \quad (29)$$

$$\alpha_2 z_x(1, y) + \left(\beta_2 - \frac{\alpha_2}{2} a(1, y) \right) z(1, y) = \mu_2(y) \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^1 a(t, y) dt \right) = \mu_2^*(y), \quad (30)$$

причем

$$z(x, 0) = \tau(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^1 a(t, 0) dt \right) = \tau^*(x), \quad (31)$$

где $\tau(x)$ определяется по формуле (26).

Известно [15, 19–21], что основная интегральная формула, дающая представление произвольных решений уравнения теплопроводности $W_{xx} - W_y = 0$, с начальным условием $W(x, 0) = \varphi_0(x)$ в области Ω_1 , имеет вид

$$\begin{aligned} W(x, y) = & \int_0^1 W(\xi, 0) G(\xi, 0; x, y) d\xi + \\ & + \int_0^y \left[\frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} G(\xi, \eta; x, y) - W(\xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} d\eta - \\ & - \int_0^y \left[\frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} G(\xi, \eta; x, y) - W(\xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} d\eta, \end{aligned} \quad (32)$$

где $G(\xi, \eta; x, y)$ – функция Грина соответствующей краевой задачи. Например, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, т. е. при первой краевой задаче, равенство (32) принимает вид

$$\begin{aligned} z(x, y) = & \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \mu_1(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y G_\xi(x, y; 1, \eta) \mu_2^*(\eta) d\eta + \int_0^1 G(x, y; \xi, 0) \tau^*(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (33)$$

где функция Грина, в этом случае, имеет вид

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}.$$

Решение задачи

$$\begin{aligned} z_{xx} - z_y &= f(x, y), \\ z(0, y) &= 0, \quad z(1, y) = 0, \quad z(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

имеет вид

$$z(x, y) = - \int_0^y \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (34)$$

В связи с этим, решение задачи (28) – (31) будем искать в виде суммы двух функций

$$z(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y),$$

где $z_1(x, y)$ – решение задачи

$$z_{1xx} - z_{1y} = 0,$$

$$z_1(0, y) = \mu_1(y), \quad z_1(1, y) = \mu_2^*(y), \quad z_1(x, 0) = \tau^*(x),$$

которое определяется по формуле (33), а $z_2(x, y)$ – решение задачи

$$z_{2xx} - z_{2y} + c(x, y)z_2 = -c(x, y)z_1(x, y), \quad (35)$$

$$z_2(0, y) = 0, \quad z_2(1, y) = 0, \quad z_2(x, 0) = 0. \quad (36)$$

В силу равенств (33), (34), для определения функции $z_2(x, y)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} z_2(x, y) = & \int_0^y \int_0^1 c(\xi, \eta) z_1(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \int_0^y \int_0^1 c(\xi, \eta) z_2(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (37)$$

которое однозначно разрешимо в силу единственности решения задачи.

Обращая (37) через резольвенту $R(x, y; \xi, \eta)$ ядра $c(\xi, \eta)G(x, y; \xi, \eta)$, получим

$$\begin{aligned} z_2(x, y) = & \int_0^y \int_0^1 c(\xi, \eta) z_1(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \int_0^y \int_0^1 R(x, y; \xi, \eta) \int_0^{\eta_1} \int_0^1 c(\xi, \eta) z_1(\xi_1, \eta_1) G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\xi d\eta d\xi_1 d\eta_1. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (28)-(31), при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, найдено, а в силу равенства (27), найдено и решение поставленной задачи. Опираясь на свойства функции Грина третьей краевой задачи [21, 23], аналогичным образом можно найти решение задачи (28)-(31) при $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$; $\beta_1, \beta_2 \neq 1$, а следовательно и решение задачи.

Случай, когда в уравнении (8) $q(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $q(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $q(x) \neq g(x)$.

Обозначая через $v_1(x) = \int_0^x v(t) dt$ первообразную функции $v(x)$, уравнение (8) запишем в виде [21–23]

$$p(x)\tau(x) + [q(x) - g(x)]v_1(x) + g(x)v_1(1) = f(x), \quad (38)$$

$$v_1(0) = 0. \quad (39)$$

Из равенства (38), получаем

$$v_1(x) = f_1(x) + p_1(x)\tau(x) + g_1(x)v_1(1), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f(x)}{\bar{q}(x)}, \quad p_1(x) = -\frac{p(x)}{\bar{q}(x)}, \\ g_1(x) &= -\frac{g(x)}{\bar{q}(x)}, \quad \bar{q}(x) = q(x) - g(x). \end{aligned}$$

Учитывая (39), из равенства (40) при $x = 0$, находим

$$v_1(1) = -\frac{f_1(0) + p_1(0)\tau(0)}{g_1(0)}. \quad (41)$$

Таким образом, из равенства (40) будем иметь

$$v(x) = f_1'(x) + (p_1(x)\tau(x))' + g_1'(x)v_1(1), \quad (42)$$

где $v_1(1)$ определяется из формулы (42).

Учитывая (42) в (12) снова приходим к задаче (21), (22), которая имеет единственное решение.

Заключение. Работа представляет собой значительный вклад в теорию уравнений смешанного типа, раскрывая сложные математические аспекты и предоставляя доказательства существования и единственности решения в широком классе случаев. Анализ различных сценариев, связанных с дискриминантом характеристического уравнения, позволяет получить полную картину поведения решений и их зависимость от параметров задачи. Основным результатом работы является сформулированная и доказанная теорема о существовании и единственности решения поставленной задачи для различных случаев задания коэффициентов уравнения. При доказательстве теоремы используются метод интегралов энергии и сведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Показано влияние различных параметров задачи и свойств заданных функций на корректность постановки задачи. Доказательство теоремы проводится методом интегральных преобразований.

Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции $\tau(x)$, безусловная разрешимость которого в требуемом классе функций заключается из единственности решения задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лузин Н.Н. Интегральное исчисление: учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1961. – 424 с.
2. Скубачевский А.Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 120-131.
3. Скубачевский А.Л. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения и приложения. – Basel: Birkhäuser, 1997. – 293 с. – (Operator Theory: Advances and Applications; Vol. 91). – ISBN 3-7643-5404-6.
4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных / отв. ред. Т.Ш. Кальменов. – М.: Наука, 2006. – 287 с. – ISBN 5-02-034076-6-1-3-7.
5. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232 с. – ISBN 978-5-02-037977-0.
6. Ahmad B., Ntouyas S.K. Nonlocal nonlinear fractional-order boundary value problems. – Singapore: World Scientific, 2021. – 578 p. – ISBN 978-981-123-040-0.
7. Eloe P.W., Henderson J. Nonlinear interpolation and boundary value problems. – Singapore: World Scientific, 2016. – 236 p. – (Trends in Abstract and Applied Analysis; Vol. 2). – ISBN 978-981-4733-47-2.
8. Езаова А.Г., Канукоева Л.В., Кунижес Б.И., Куповых Г.В. Нелокальная внутренне-краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 4-10.
9. Езаова А.Г., Канукоева Л.В., Куповых Г.В. Нелокальная краевая задача для одного смешанного уравнения третьего порядка // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2021. – № 3. – С. 19-25.
10. Бжухатлов Х.Г. Краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения и сингулярные интегральные уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1971. – 7, № 1. – С. 3-14.
11. Бжухатлов Х.Г., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183, № 2. – С. 261-264.
12. Кумыкова С.К. Краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения в характеристическом двуугольнике // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 79-91.
13. Елеев В.А. О краевых задачах для смешанного уравнения третьего порядка // Украинский математический журнал. – 1995. – Т. 47, № 1. – С. 20-29.
14. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гипербола-параболического типа // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 5. – С. 707-716.

15. Озаров И. Об одной краевой задаче со смещением для обобщенного уравнения Трикоми // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 2. – С. 339-344.
16. Жегалов В.И. К задачам со смещением для уравнений смешанного типа // Тр. семинара по краевым задачам. – Казань: КФУ, 1980. – Вып. 17. – С. 63-73.
17. Blum E.K. The solutions of the Euler-Poisson-Darboux equation for negative values of the parameter // Duke Mathematical Journal. – 1954. – Vol. 21, No. 2. – P. 257-269. – DOI: 10.1215/S0012-7094-54-02126-2.
18. Бицадзе А.В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа // В кн.: Механика сплошных сред и родственные проблемы анализа. – М., 1972. – С. 42-47.
19. Кароль И.Л. К теории уравнений смешанного типа // ДАН СССР. – 1953. – Т. 88, № 3. – С. 397-400.
20. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.
21. Сопуев А., Кожобеков К.Г. Краевые задачи для уравнений смешанного параболического типа третьего порядка с младшими членами с характеристической линией изменения типа // Тр. Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». – Ташкент, 2004. – Т. 1. – С. 14-16.
22. Нагорный А.М. Краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного типа третьего порядка. Дифференциальные уравнения и их приложения к механике. – Ташкент: Фан, 1985. – С. 55-66.
23. Cattabriga L. Su alcuni problemi per equazioni differenziali di tipo composito // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. – Padova: Università di Padova, 1957. – Vol. 27. – P. 221-258.

REFERENCES

1. Luzin N.N. Integral'noe ischislenie: ucheb. posobie dlya vuzov [Integral Calculus: a textbook for universities]. Moscow: Vysshaya shkola, 1961, 424 p.
2. Skubachevskiy A.L. Model'nye nelokal'nye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v dvugrannykh uglakh [Model nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles], *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1990, Vol. 26, No. 1, pp. 120-131.
3. Skubachevskiy A.L. Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya i prilozheniya [Elliptic functional differential equations and applications]. Basel: Birkhäuser, 1997, 293 p. (Operator Theory: Advances and Applications; Vol. 91). ISBN 3-7643-5404-6.
4. Nakhushiev A.M. Zadachi so smeshcheniem dlya uravneniy v chastnykh [Problems with shift for partial equations], ed. by T.Sh. Kal'menov. Moscow: Nauka, 2006, 287 p. ISBN 5-02-034076-6-1-3-7.
5. Nakhushiev A.M. Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniye [Loaded equations and their applications]. Moscow: Nauka, 2012, 232 p. ISBN 978-5-02-037977-0.
6. Ahmad B., Ntouyas S.K. Nonlocal nonlinear fractional-order boundary value problems. Singapore: World Scientific, 2021, 578 p. ISBN 978-981-123-040-0.
7. Eloe P.W., Henderson J. Nonlinear interpolation and boundary value problems. Singapore: World Scientific, 2016, 236 p. (Trends in Abstract and Applied Analysis; Vol. 2). ISBN 978-981-4733-47-2.
8. Ezaova A.G., Kanukoeva L.V., Kunizhev B.I., Kupovykh G.V. Nelokal'naya vnutrenne-kraevaya zadacha dlya smeshannogo uravneniya tret'ego poryadka [Nonlocal interior boundary value problem for a mixed third-order equation], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [News of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region], 2021, No. 2, pp. 4-10.
9. Ezaova A.G., Kanukoeva L.V., Kupovykh G.V. Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya odnogo smeshannogo uravneniya tret'ego poryadka [Nonlocal boundary value problem for one mixed third-order equation], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [News of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region], 2021, No. 3, pp. 19-25.
10. Bzhikhatlov Kh.G. Kraevaya zadacha dlya odnogo vyrozhdaiushchegosya giperbolicheskogo uravneniya i singulyarnyye integral'nye uravneniya tret'ego poryadka [Boundary value problem for one degenerate hyperbolic equation and singular integral equations of the third order], *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1971, 7, No. 1, pp. 3-14.
11. Bzhikhatlov Kh.G., Nakhushiev A.M. Ob odnoy kraevoy zadache dlya uravneniya smeshannogo parabola-giperbolicheskogo tipa [On a boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type], *DAN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1968, Vol. 183, No. 2, pp. 261-264.
12. Kumykova S.K. Kraevaya zadacha dlya odnogo vyrozhdaiushchegosya giperbolicheskogo uravneniya v kharakteristicheskoy dvuugol'nike [Boundary value problem for one degenerate hyperbolic equation in the characteristic digon], *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1979, Vol. 15, No. 1, pp. 79-91.

13. Eleev V.A. O kraevykh zadachakh dlya smeshannogo uravneniya tret'ego poryadka [On boundary value problems for a mixed third-order equation], *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal* [Ukrainian Mathematical Journal], 1995, Vol. 47, No. 1, pp. 20-29.
14. Eleev V.A., Kumykova S.K. O nekotorykh kraevykh zadachakh so smeshcheniem na kharakteristikakh dlya smeshannogo uravneniya giperbolo-parabolicheskogo tipa [On some boundary value problems with a shift on the characteristics for a mixed hyperbolic-parabolic equation], *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal* [Ukrainian Mathematical Journal], 2000, Vol. 52, No. 5, pp. 707-716.
15. Ozarov I. Ob odnoy kraevoy zadache so smeshcheniem dlya obobshchennogo uravneniya Triкоми [On a boundary value problem with shift for the generalized Tricomi equation], *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1981, Vol. 17, No. 2, pp. 339-344.
16. Zhegalov V.I. K zadacham so smeshcheniem dlya uravneniy smeshannogo tipa [On problems with shift for equations of mixed type], *Tr. seminar po kraevym zadacham* [Proceedings of the seminar on boundary value problems], Kazan': KFU, 1980, Issue 17, pp. 63-73.
17. Blum E.K. The solutions of the Euler-Poisson-Darboux equation for negative values of the parameter, *Duke Mathematical Journal*, 1954, Vol. 21, No. 2, pp. 257-269. DOI: 10.1215/S0012-7094-54-02126-2.
18. Bitsadze A.V. K teorii uravneniy smeshannogo tipa, poryadok kotorykh vyrozhaetsya vdol' linii izmeneniya tipa [On the theory of equations of mixed type, the order of which degenerates along the line of change of type], *V kn.: Mekhanika sploshnykh sred i rodstvennye problemy analiza* [In the book: Continuous Media Mechanics and Related Problems of Analysis]. Moscow, 1972, pp. 42-47.
19. Karol' I.L. K teorii uravneniy smeshannogo tipa [On the theory of mixed-type equations], *DAN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1953, Vol. 88, No. 3, pp. 397-400.
20. Nakhushiev A.M. Uravneniya matematicheskoy biologii [Equations of mathematical biology]. Moscow: Vysshaya shkola, 1995, 301 p.
21. Sopuev A., Kozhabekov K.G. Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo parabologiperbolicheskogo tipa tret'ego poryadka s mladshimi chlenami s kharakteristicheskoy liniei izmeneniya tipa [Boundary value problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type of the third order with junior terms with a characteristic line of type change], *Tr. Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi i rodstvennye problemy analiza i informatiki»* [Proceedings of the International Scientific Conference "Partial Differential Equations and Related Problems of Analysis and Computer Science"]. Tashkent, 2004, Vol. 1, pp. 14-16.
22. Nagornyy A.M. Kraevye zadachi dlya nagruzhennogo uravneniya smeshannogo tipa tret'ego poryadka. Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya k mekhanike [Boundary value problems for a loaded equation of mixed type of the third order. Differential equations and their applications to mechanics]. Tashkent: Fan, 1985, pp. 55-66.
23. Cattabriga L. Su alcuni problemi per equazioni differenziali di tipo composito, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*. Padova: Università di Padova, 1957, Vol. 27, pp. 221-258.

Езаова Алена Георгиевна – Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова; e-mail: alena_ezaova@mail.ru; г. Нальчик, Россия; тел.: +79034923694; кафедра алгебры и дифференциальных уравнений; к.ф.-м.н.; доцент.

Канукоева Ляна Владимировна – Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова; e-mail: armand97a@gmail.com; г. Нальчик, Россия; тел.: +79034257520; кафедра алгебры и дифференциальных уравнений; к.ф.-м.н.; доцент.

Куповых Геннадий Владимирович – Южный федеральный университет; e-mail: kupovykh@sfnu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +78634371636; кафедра физико-математических основ инженерного образования; зав. кафедрой; д.ф.-м.н.; профессор.

Ezaova Alena Georgievna – Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov; e-mail: alena_ezaova@mail.ru; Nalchik, Russia; phone: +79034923694; +79034257520; the Department of Algebra and Differential Equations; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.

Kanukoeva Lyana Vladimirovna – Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov; e-mail: armand97a@gmail.com; Nalchik, Russia; phone: +79034257520; the Department of Algebra and Differential Equations; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.

Kupovykh Gennadiy Vladimirovich – Southern Federal University; e-mail: kupovykh@sfnu.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371636; the Department of Physical and Mathematical Foundations of Engineering Education; head of department; dr. of phys. and math. sc.; professor.