

Раздел IV. Моделирование и управление

УДК 004.89 + 007.52

DOI 10.18522/2311-3103-2026-3-220-232

Ш. Гун

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Развитие интеллектуальных складских систем и автоматизации логистических процессов требует эффективных решений для распределения задач в гетерогенных многороботных комплексах, особенно при кооперативной транспортировке крупногабаритных и тяжёлых грузов. Целью работы является разработка и верификация гибридной модели идентификации и распределения кооперативных транспортных задач (КТЗ) в складской среде с учётом многокритериальной оптимизации. Дан краткий обзор публикаций по применению миварных технологий и методов машинного обучения при математическом моделировании сложных робототехнических систем. Предложен двухуровневый подход, включающий миварную систему принятия решений для автоматической идентификации КТЗ и модель распределения на основе алгоритма комбинированного аукциона. Необходимое количество роботов-транспортировщиков (РТ) определяется миварной системой принятия решений с учетом размеров и массы груза. Разработанная математическая модель распределения КТЗ направлена на повышение эффективности и надежности благодаря учету ключевых динамических факторов (гетерогенность, избыточность и путевые затраты). Имитационные эксперименты с 30 РТ и 100 задачами показали преимущество предложенного метода над базовыми стратегиями (Random, Nearest Neighbor, Greedy Capacity): при обработке 6 КТЗ снижение общей стоимости составило до 40,7%, а при 12 задачах – дополнительное снижение на 10,8% при сохранении 100% успешности. Установлена способность модели к эффективному масштабированию, проявляющаяся в дополнительном снижении затрат на 10,8% при увеличении числа задач. Результаты свидетельствуют о робастности, адаптивности и высокой практической применимости модели для интеграции в современные интеллектуальные складские системы, обеспечивающие работу с диверсифицированным ассортиментом грузов.

Мивар; миварные технологии; логический искусственный интеллект; кооперативная транспортировка; многороботные системы; распределение задач.

S. Gong

MODEL OF COOPERATIVE TRANSPORTATION TASK ALLOCATION FOR HETEROGENEOUS ROBOTIC SYSTEMS

The development of intelligent warehouse systems and the automation of logistics processes require effective solutions for task allocation in heterogeneous multi-robot complexes, particularly in the cooperative transportation of large and heavy cargo. The aim of this work is to develop and verify a hybrid model for cooperative transportation task (CTT) identification and allocation in a warehouse environment, taking into account multi-criteria optimization. A brief review of publications on the application of mivar technologies and machine learning methods in the mathematical modeling of complex robotic systems is provided. A two-level approach is proposed, including a mivar decision-making system for the automatic identification of CTT and a task allocation model based on a combined auction algorithm. The required number of transport robots (RT) is determined by the mivar decision-making system, considering the size and mass of the cargo. The developed mathematical model for CTT allocation aims to improve efficiency and reliability by accounting for key dynamic factors (heterogeneity, redundancy, and path-dependent costs). Simulation experiments with 30 transport robots and 100 tasks demonstrated the superiority of the proposed method over baseline strategies (Random, Nearest Neighbor, Greedy Capacity): when processing 6 CTT, the total cost reduction reached up to 40.7%, and with 12 tasks, an additional reduction of

10.8% was achieved while maintaining 100% success rate. The model's ability to scale efficiently was established, manifesting in an additional cost reduction of 10.8% as the number of tasks increased. The results indicate the robustness, adaptability, and high practical applicability of the model for integration into modern intelligent warehouse systems that handle a diversified range of cargo.

Mivar; mivar technologies; logical artificial intelligence; cooperative transportation; multi-robot systems; task allocation.

Введение. В последние десятилетия мировая логистическая отрасль переживает этап глубоких трансформаций, обусловленных стремительным развитием технологий автоматизации и интеллектуализации [1]. Интеллектуальная логистика и роботизированные складские системы становятся ключевыми драйверами повышения эффективности цепочек поставок, сокращения эксплуатационных издержек и обеспечения устойчивости распределительных сетей [2]. Для России, учитывающей пространственную протяжённость территории и высокие издержки транспортно-складской инфраструктуры, внедрение передовых решений в области автоматизации складского хозяйства приобретает не только экономическое, но и стратегическое значение [3]. Именно поэтому вопросы, связанные с разработкой и применением систем кооперативного управления многороботными комплексами [4], вызывают повышенный интерес академического и промышленного сообществ и обладают значительным потенциалом для практического внедрения [5].

В данном контексте особое внимание заслуживают миварные технологии логического искусственного интеллекта [6], обеспечивающие возможность формализации знаний и построения эволюционных баз данных и знаний [7]. Их применение позволяет существенно снизить вычислительную сложность [8] процессов принятия решений, а также повысить адаптивность алгоритмов к изменяющейся среде [9]. Миварные технологии уже успешно демонстрируют эффективность в таких областях, как планирование поведения мобильных роботов [10], маршрутизация в условиях ограниченной среды и предотвращение коллизий [11]. Соответственно, их интеграция в задачи распределения и управления в многоагентных складских системах открывает новые перспективы для повышения производительности интеллектуальных комплексов [12, 17, 25].

Несмотря на значительные достижения, распределение задач в гетерогенных многороботных системах остаётся одной из наиболее сложных проблем современной логистической робототехники [13]. Она связана с необходимостью решения ряда противоречивых задач:

- (1) динамичность среды, выражающаяся в непрерывном изменении очереди задач и состояний роботов (уровня заряда, местоположения и загруженности);
- (2) строгие требования реального времени, когда задержки в принятии решений напрямую приводят к снижению пропускной способности системы [14];
- (3) многокритериальная оптимизация, предполагающая поиск баланса между скоростью маршрутизации, издержками формирования команды, энергетической эффективностью и надёжностью распределения;
- (4) координация в условиях ограниченных ресурсов, когда возникает необходимость предотвращения конфликтов за транспортные пути и зарядные станции, что влечёт за собой сложные комбинаторные расчёты [15].

Для преодоления этих вызовов мировое научное сообщество предлагает широкий спектр подходов [16]. Значительное распространение получили алгоритмы, основанные на оптимизационных аукционных моделях [17], а также методы многоагентного обучения с подкреплением [18] и алгоритмы с использованием глубоких сверточных архитектур [19], включая генетические и роевые оптимизаторы [20]. Российские исследователи также внесли существенный вклад в данную область [21–23], развивая миварные технологии логического искусственного интеллекта и предлагая оригинальные методы распределённого принятия решений [24]. Однако кооперативные транспортные задачи (КТЗ), возникающие при необходимости перемещения крупногабаритных и тяжёлых грузов, остаются исследованными недостаточно.

Научная новизна представленной работы заключается в разработке гибридного подхода, объединяющего алгоритм идентификации КТЗ на основе миварных технологий и модель принятия решений, основанную на комбинированном аукционе с многокритериальной функцией стоимости. Предложенная модель обеспечивает автоматическую

классификацию задач и формирование команд роботов-транспортёров (РТ) с учётом баланса между структурой команды и оптимальностью маршрутов, что позволяет достичь высокой эффективности при решении задач «несколько РТ – один груз».

Целью настоящего исследования является создание и экспериментальная проверка модели распределения и управления КТЗ в интеллектуальных складских системах, способной обеспечить надёжное выполнение операций по транспортировке крупногабаритных и тяжёлых грузов при одновременном снижении совокупных издержек по сравнению с традиционными методами.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Осуществить формализацию задачи идентификации и распределения КТЗ, определив модель принятия решений, ограничения и многокритериальную функцию стоимости.
2. Разработать алгоритм автоматической идентификации задач на основе миварных правил, обеспечивающий классификацию и вычисление необходимого количества РТ.
3. Построить модель принятия решений на основе комбинированного аукциона, позволяющую формировать оптимальные команды РТ для КТЗ с учётом совокупной стоимости.
4. Разработать специальное математическое и алгоритмическое обеспечения модели принятия решений.
5. Провести имитационные эксперименты для сопоставления эффективности предложенного метода с базовыми стратегиями и проанализировать результаты экспериментов, подтвердив адаптивность, надёжность и преимущество предложенного метода при решении задач различного масштаба.

Постановка задачи и описание системы. Рассматривается интеллектуальная складская система, включающая три группы роботов: однородную группу роботов-погрузчиков (РП), разнородную группу роботов-транспортёров (РТ) и однородную группу роботов-разгрузчиков (РР). В систему также входят погрузочная платформа за пределами склада, многоярусные стеллажи внутри склада и станции зарядки. Состояние системы является полностью наблюдаемым: известны актуальные состояния всех роботов (включая номер робота, положение, уровень заряда, грузоподъёмность, размеры грузового ящика и т.д.) и динамическая очередь задач $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Каждая задача на размещение груза T_j описывается набором атрибутов: $T_j = \{Loc_{pickup_j}, Loc_{destination_j}, Dimension_j, Weight_j, Priority_j\}$.

Ключевая проблема принятия решений заключается в эффективном распределении задач из T среди соответствующих групп роботов. В предыдущих работах [17, 25] были подробно описаны режимы совместной работы трех роботов РП, РТ и РР, также предложено решение для задачи распределения в рамках парадигмы «один РТ – один груз», где один РТ перемещает один груз за один раз. Данный раздел расширяет предложенный подход для решения проблемы кооперативной транспортировки, когда задача T_j превышает физические возможности любого отдельного РТ. Планирование совместных действий роботов погрузки и разгрузки осуществляется по установленным правилам; в настоящей работе основное внимание уделяется принятию решений о кооперации на транспортном этапе.

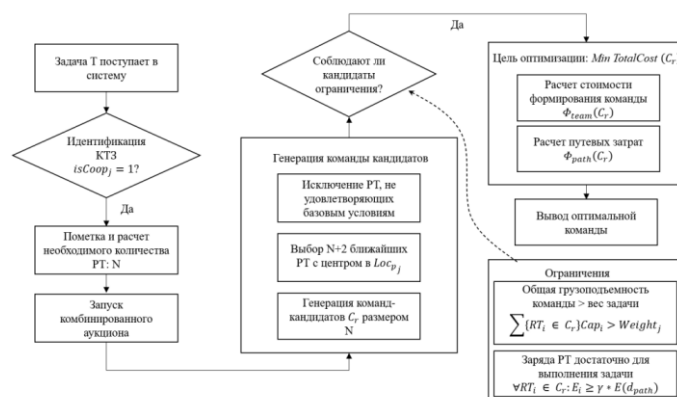


Рис. 1. Процесс принятия решений модели распределения КТЗ

Алгоритм идентификации КТЗ. Как показано на рис. 1, предложенная в данной статье модель распределения КТЗ использует модульную архитектуру и состоит из двух ключевых взаимосвязанных компонентов, формирующих замкнутый цикл принятия решений – от идентификации задачи до исполнения. Первым компонентом системы является миварная система предварительной классификации задач. Данная система выполняет функцию фильтра: перед помещением задачи в очередь на распределение система анализирует её атрибуты и относит к одномандатным или кооперативным. В рамках данной работы основное внимание уделяется классификации КТЗ. Основное назначение правил – определить, является ли задача T_j КТЗ. В случае положительного решения задача маркируется и вычисляется количество необходимых РТ. Миварный подход к выполнению данной задачи выглядит следующим образом:

1. если размеры груза больше размеров грузового ящика РТ $l_j \geq l_{max} \cup w_j \geq w_{max}$, то нужна кооперативная транспортировка, $isCoop_j = 1$;
2. если масса груза больше максимальной грузоподъемности РТ $m_j \geq m_{max}$, то нужна кооперативная транспортировка, $isCoop_j = 1$;
3. если $l_j < l_{max} \cap w_j < w_{max} \cap m_j < m_{max}$, то не нужна кооперативная транспортировка, $isCoop_j = 0$;
4. если $isCoop_j = 0$, то включают эту задачу в группу, ее обрабатывают другим подходом.
5. если $isCoop_j = 1$, то по длинам груза и РТ можно рассчитать необходимое количество РТ в зависимости от длины $n_{length_j} = \left\lfloor \frac{l_j}{l_{max}} \right\rfloor$;
6. если $isCoop_j = 1$, то по ширинам груза и РТ можно рассчитать необходимое количество РТ в зависимости от ширины $n_{width_j} = \left\lfloor \frac{w_j}{w_{max}} \right\rfloor$;
7. если $isCoop_j = 1$, то по массам груза и РТ можно рассчитать необходимое количество РТ в зависимости от массы $n_{weight_j} = \left\lfloor \frac{m_j}{m_{max}} \right\rfloor$;
8. если известны n_{length_j} , n_{width_j} и n_{weight_j} , можно рассчитать необходимое количество РТ для задачи T_j : $N_j = \max(n_{length_j}, n_{width_j}, n_{weight_j}, 2)$.

Модель принятия решений о распределении КТЗ. Вторым компонентом выступает модель принятия решений о распределении КТЗ на основе комбинированного аукциона. Для задачи T_j , помеченной $isCoop_j = 1$ и требующей участия нескольких РТ, модель инициирует алгоритм комбинированного аукциона. В данной модели участниками выступают не отдельные роботы, а кандидатные команды, состоящие из нескольких гетерогенных РТ: $C_r = \{RT_1, \dots, RT_i, \dots, RT_n\}$. Для оценки общей стоимости выполнения задачи каждой командой используется функция $TotalCost(C_r)$ (подробности приведены в математической модели ниже). Команда C_r^* с наименьшей общей стоимостью становится победителем аукциона.

Сначала система исключает всех РТ, не удовлетворяющих базовым условиям (низкий заряд батареи или занятость). Затем вокруг места загрузки груза P_j выбираются K_j ближайших РТ ($K_j = N_j + 2$), формируя «группу ближайших РТ» $Group_j$. Для $Group_j$ генерируются все возможные комбинации размера N_j , каждая из которых представляет команду-кандидат C_r .

T_j обозначает транспортную задачу и включает параметры: Loc_{pickup_j} (место загрузки), $Loc_{destination_j}$ (место назначения), $Priority_j$ (приоритет), N_j (требуемое количество РТ). Граф $Graph$ представляет карту склада, веса рёбер которого соответствуют длинам путей.

В этом шаге цель состоит в выборе оптимальной команды РТ C_r для задачи T_j , которая минимизирует общую ожидаемую стоимость выполнения задачи. Целевая функция комплексно учитывает стоимость формирования команды и перемещения:

$$TotalCost(C_r) = \alpha * \Phi_{team}(C_r) + \beta * \Phi_{path}(C_r), \quad (1)$$

где α и β – весовые коэффициенты, регулирующие относительную важность двух типов затрат; $\Phi_{team}(C_r)$ представляет стоимость команды, количественно оценивающую внутренние свойства C_r :

$$\Phi_{team}(C_r) = \omega_1 * Redundancy + \omega_2 * Heterogeneity, \quad (2)$$

где

Redundancy (избыточность): $10 * (\sum \{RT_i \in C_r\} (Cap_i - Weight_j)) / Weight_j$. Штрафует неэффективные ситуации, когда совокупная грузоподъёмность команды существенно превышает требуемую, стимулируя соответствие возможностей задаче;

Heterogeneity (гетерогенность): $10 * \sigma_{speed}^2(C_r)$. Данная компонента отражает дисперсию максимальных скоростей РТ в команде. Штрафует большие различия в производительности, которые могут усложнять синхронное управление;

ω_1, ω_2 – нормированные весовые коэффициенты, балансирующие вклад и размерности обоих слагаемых.

$\Phi_{path}(C_r)$ отражает путевые затраты на перемещение:

$$\Phi_{path}(C_r, P_c) = \frac{1}{N_j} * \sum \left(\{RT_i \in C_r\} d(Loc_{RT_i}, Loc_{p_j}) \right) + d(Loc_{p_j}, Loc_{d_j}), \quad (3)$$

где

$d(A, B)$ – длина кратчайшего пути между точками А и В на графе Graph, рассчитанная с использованием алгоритма A*; первое слагаемое является средним расстоянием от членов команды C_r до точки загрузки груза, минимизация этого слагаемого сокращает общее время сбора; второе слагаемое – расстояние от точки забора до пункта назначения, его минимизация повышает эффективность этапа транспортировки.

Оптимизация проводится при следующих ограничениях:

$$\sum \{RT_i \in C_r\} Cap_i > Weight_j \quad (4)$$

(ограничение по совокупной грузоподъёмности)

$$\forall RT_i \in C_r: E_i \geq \gamma * E(d_{path}) \quad (5)$$

(ограничение по энергии)

Ограничение (4) гарантирует, что команда обладает достаточной грузоподъёмностью для выполнения задачи. Ограничение (5) гарантирует, что у каждого РТ в команде будет достаточно энергии для перемещения от его текущего местоположения к месту сбора, затем к месту назначения и, наконец, возвращения к зарядной станции.

Экспериментальная обстановка и конфигурация параметров. Для проверки эффективности предложенной модели определения и распределения КТЗ была разработана серия имитационных экспериментов. Моделирование проводилось в среде Python 3.9 на стандартной карте сеточного типа размером 100×100 м для точного расчёта расстояний.

В имитационной среде были размещены четыре погрузочные платформы за пределами склада и одна зарядная станция в центре. Робототехнический комплекс был представлен 30 разнородными РТ. Их ключевые параметры (максимальная грузоподъёмность, скорость и т.д.) варьировались для проверки работы модели в гетерогенной среде, имитируя реальные аналоги.

На вход системы подавалась очередь из 100 последовательных задач на размещение груза. Каждая задача T_j определяется кортежем атрибутов $\{Loc_{pickup_j}, Loc_{destination_j}, Dimension_j, Weight_j, Priority_j\}$. Параметры задач генерировались случайным образом в заданных диапазонах с обязательным включением задач, превышающих возможности одного РТ.

Коэффициенты в формуле (1) были установлены следующим образом: $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$ (большой вес на оптимизацию пути). В формуле (2): $\omega_1 = 0.7$, $\omega_2 = 0.3$ (согласованность команды важнее однородности). Коэффициент безопасности уровня заряда γ установлен на 1.2 для обеспечения 20% запаса. Выбор $K_j = N_j + 2$ обеспечивает баланс

между вычислительной сложностью и качеством распределения: достаточно кандидатов для многокритериальной оптимизации состава команды, но не слишком много, чтобы избежать экспоненциального роста комбинаций. Это повышает адаптивность к динамическим изменениям.

Методы сравнения и метрики оценки. Для всесторонней оценки производительности предложенного метода (Our Method, далее – OM) были выбраны три базовых алгоритма для сравнения:

- ◆ Случайный (Random): Случайный выбор N РТ, удовлетворяющих ограничениям.
- ◆ Ближайший сосед (Nearest Neighbor -- далее NN): Выбор N ближайших к точке загрузки РТ.
- ◆ Жадный по грузоподъемности (Greedy Capacity -- далее GC): Выбор N РТ с наибольшей грузоподъемностью.

Оценочные метрики включают:

- ◆ Среднюю стоимость команды $\Phi_{team}(C_r)$.
- ◆ Среднюю стоимость пути $\Phi_{path}(C_r)$.
- ◆ Среднюю общую стоимость $TotalCost(C_r)$.
- ◆ Коэффициент успешного выполнения задач.

Результаты и анализы. Для системной проверки эффективности предложенной модели распределения КТЗ была первоначально построена соответствующая миварная система принятия решений на платформе КЭСМИ, основанная на ранее заданных правилах. Ключевой функцией данной системы является автоматическая идентификация задач, требующих кооперативной транспортировки, из входной очереди и точный расчет необходимого количества РТ для каждой задачи. На рис. 2 представлена полная вычислительная процедура данной системы принятия решений, включая ключевые этапы определения необходимости кооперации и расчета требуемого количества РТ.

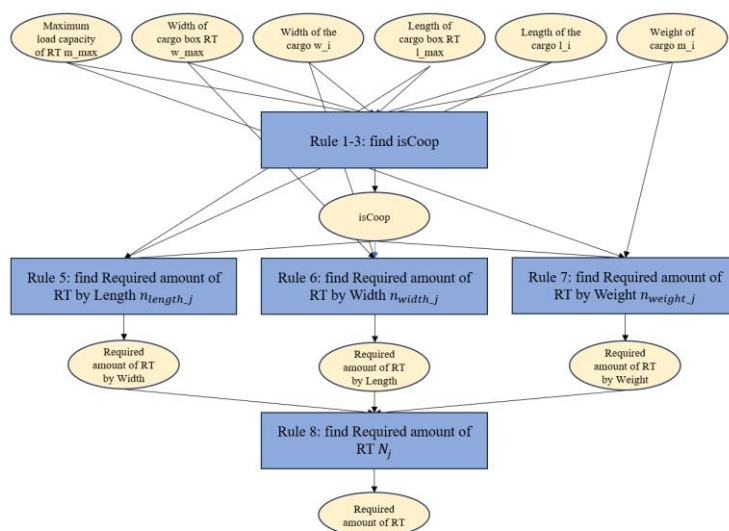


Рис. 2. Граф решений об идентификации задачи

В сценарии первого эксперимента система успешно идентифицировала 6 задач, требующих кооперативной транспортировки, из очереди задач. Применение предложенной модели распределения к этим задачам для формирования команд РТ дало схему распределения, представленную на рис. 3. Визуализация результатов показывает, что наш метод формирует команды РТ с рациональным пространственным распределением и высокой степенью соответствия возможностей, при этом пути сбора команд демонстрируют хорошие геометрические свойства.

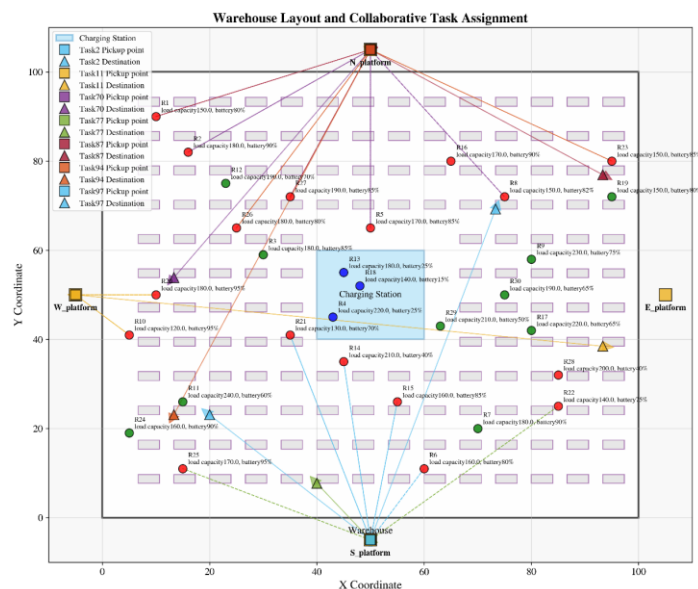


Рис. 3. Схема распределения КТЗ (для 6 КТЗ)

Для количественной оценки преимуществ в производительности были сравнены показатели затрат и успешности выполнения для четырех методов, результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение показателей затрат для различных методов (для 6 КТЗ)

Методы	Средняя стоимость команды	Средняя стоимость пути	Средняя общая стоимость	Показатель успешности
Our Method (OM)	72.51	98.15	80.20	100%
Random	104.42	126.65	111.09	100%
Nearest Neighbor (NN)	88.30	87.14	87.95	100%
Greedy Capacity (GC)	142.25	119.04	135.29	100%

Результаты показывают, что метод ОМ достиг наилучших значений как по стоимости команды (72.51), так и по общей стоимости (80.20), что объясняется способностью его алгоритма многокритериальной оптимизации эффективно балансировать гетерогенность и избыточность команды. Особенно важно отметить, что хотя метод NN имеет небольшое преимущество по стоимости пути (87.14), его более высокая стоимость команды (88.30) приводит к тому, что общая стоимость (87.95) остается выше, чем у ОМ. Это явление подтверждает ограниченность подхода, оптимизирующего только расстояние пути и игнорирующего характеристики команды.

В сценарии второго эксперимента использовался новый набор из 100 задач. Система успешно идентифицировала 12 задач, требующих кооперативной транспортировки, из очереди задач. Результаты данного эксперимента представлены на рис. 4 и табл. 2.

Во втором эксперименте с 12 КТЗ предложенный метод вновь продемонстрировал всестороннее преимущество. Он сохранил самые низкие показатели по двум ключевым метрикам: средней общей стоимости (71.54) и стоимости команды (62.32), что доказывает способность метода эффективно формировать команды даже в сценарии с множеством задач. Примечательно, что хотя метод GC сохранил 100% успешность распределения задач, его стоимость команды (119.24) оказалась самой высокой. Это указывает на то, что когда РТ большой грузоподъемности распределены редко или их состояние неоптимально, данная стратегия вынуждена выбирать РТ, возможности которых значительно превышают требование, что приводит к значительным потерям ресурсов. Метод NN показал

наилучший результат по стоимости пути (76.45), но высокая стоимость команды (84.58) помешала достижению оптимальной общей стоимости. Особого внимания заслуживает снижение показателя успешности методов Random и NN до 91.7%, что при увеличении масштаба задачи и ужесточении системных ограничений простая стратегия не может гарантировать, что всегда будет найдено приемлемое решение.

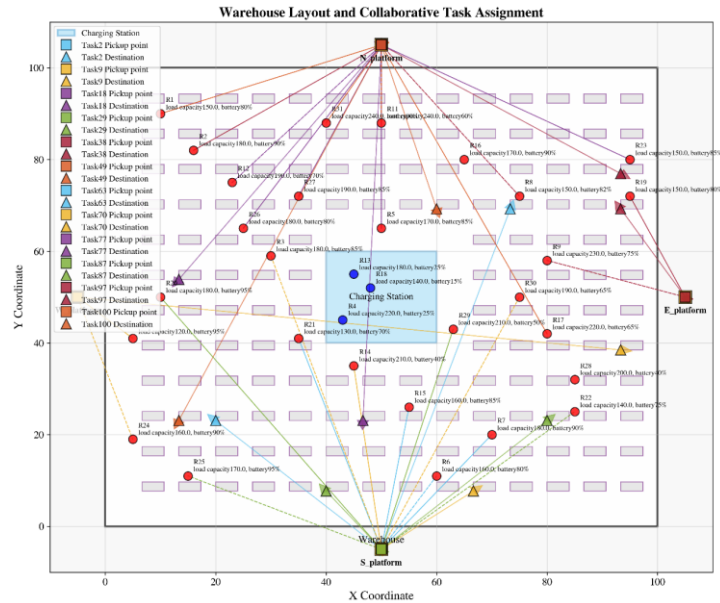


Рис. 4. Схема распределения КТЗ (для 12 КТЗ)

Таблица 2

Сравнение показателей затрат для различных методов (для 12 КТЗ)

Методы	Средняя стоимость команды	Средняя стоимость пути	Средняя общая стоимость	Показатель успешности
Our Method (OM)	62.32	93.06	71.54	100%
Random	88.52	110.58	95.14	91.7%
Nearest Neighbor (NN)	84.58	76.45	82.14	91.7%
Greedy Capacity (GC)	119.24	111.57	116.94	100%

Сравнивая результаты двух экспериментов, когда количество КТЗ составляло 6, предложенный метод сохранил лидерство с общей стоимостью 80.20, сэкономив примерно 27.8%, 8.8% и 40.7% затрат по сравнению с методами Random, NN и GC соответственно, при этом все методы достигли 100% успешности распределения. Когда масштаб задач увеличился до 12, преимущество OM стало еще более значительным: общая стоимость снизилась до 71.54, что означает экономию примерно 24.8%, 12.9% и 38.8% затрат по сравнению с другими методами, при сохранении 100% успешности, в то время как показатели успешности методов Random и NN снизились до 91.7%. Особенно примечательно, что с увеличением количества задач общая стоимость OM снизилась на 10.8%, что доказывает, что данный алгоритм оптимизации способен эффективно использовать эффект масштаба, демонстрируя превосходную адаптируемость и устойчивость. В заключение, OM не только отлично работает в маломасштабных сценариях, но и в большей степени раскрывает свои комплексные преимущества интеллектуальной многокритериальной оптимизации в средах с крупномасштабными задачами, представляя собой эффективное решение для распределения КТЗ, способное адаптироваться к потребностям различного масштаба.

Заключение. Данная статья направлена на решение ключевой проблемы распределения кооперативных транспортных задач (КТЗ) в многороботных складских системах. Путем интеграции алгоритма идентификации КТЗ на основе правил с моделью принятия решений о формировании команд, основанной на комбинированном аукционе, разработана надежная комбинированная модель, обеспечивающая эффективную обработку крупногабаритных и тяжелых грузов, превышающих индивидуальные возможности отдельного робота-транспортировщика (РТ). Результаты многочисленных имитационных экспериментов достоверно подтверждают, что по ключевым показателям (общая стоимость, стоимость формирования команд, эффективность маршрутизации и успешность выполнения задач) предложенный метод демонстрирует превосходство над различными базовыми стратегиями.

Принципиальное преимущество предложенного подхода заключается в его способности к интеллектуальному балансированию двух зачастую противоречивых требований: оптимизации качества формируемых команд и эффективности маршрутов. Экспериментальные результаты свидетельствуют, что хотя методы типа "Nearest Neighbor" демонстрируют эффективность в минимизации расстояния перемещения (стоимости пути), их неоптимальная стратегия формирования команд приводит к повышению соответствующих затрат и, как следствие, росту общей стоимости. Предложенная модель, использующая взвешенную сумму двух компонент стоимости ($\alpha=0.4$, $\beta=0.6$), обеспечивает достижение минимальной общей стоимости. Полученные результаты указывают на недостаточность одномерной оптимизации и критическую важность кооперативной оптимизации для достижения общей эффективности системы. Кроме того, в условиях увеличения масштаба задач (12 КТЗ) предложенная модель сохраняет 100% успешность распределения при снижении данного показателя для простых стратегий, что подчеркивает ее повышенную надежность и устойчивость в условиях возрастающей нагрузки и ужесточения ограничений. Наблюдаемое снижение общей стоимости при увеличении количества задач свидетельствует о способности алгоритма эффективно использовать эффект масштаба для формирования более эффективных команд.

Практическая значимость исследования заключается в разработке решений для современных систем интеллектуального складирования. Предложенная двухуровневая архитектура представляет масштабируемое решение реального времени, совместимое с существующими системами, использующими парадигму "один РТ – один груз". Первый уровень гарантирует активацию аукционного алгоритма только в случаях действительной необходимости, повышая тем самым реактивность системы. Возможность динамического формирования оптимальных команд для обработки крупногабаритных грузов непосредственно повышает пропускную способность и гибкость склада, обеспечивая работу с диверсифицированным ассортиментом без необходимости специализированного оснащения для каждого потенциального случая крупномасштабной транспортировки.

Таким образом, настоящее исследование вносит существенный вклад в область многороботного распределения задач, предлагая и валидируя новую и эффективную модель для решения проблемы "несколько РТ – один груз" в складской системе. Разработанная модель на основе комбинированного аукциона и многокритериальной функции стоимости обеспечивает генерацию кооперативных команд, пространственно эффективных и соответствующих физическим требованиям задач. Перспективные направления дальнейших исследований включают разработку алгоритмов динамической адаптивной корректировки весов α и β на основе реального состояния системы (уровня загрузки и средней энергообеспеченности роботов), а также интеграцию неопределенностей реального окружения (погрешностей локализации и непредвиденных задержек) в модель стоимости, что представляет собой ключевой шаг к практическому применению.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Adil A. A., Sakhrieh S., Mounsef J., & Maalouf N. A multi-robot collaborative manipulation framework for dynamic and obstacle-dense environments: integration of deep learning for real-time task execution // *Frontiers in robotics and AI*. – 2025. – 12. – 1585544. – <https://doi.org/10.3389/frobt.2025.1585544>.
2. Choi B., Kim M., & Kim H. An Optimization Framework for Allocating and Scheduling Multiple Tasks of Multiple Logistics Robots // *Mathematics*. – 2025. – 13 (11). – 1770. – <https://doi.org/10.3390/math13111770>.

3. Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Аналитический обзор подходов к распределению задач в группах мобильных роботов на основе технологий мягких вычислений // Информатика и автоматизация. – 2022. – Т. 21, № 4. – С. 729-757. – DOI 10.15622/ia.21.4.4. – EDN AGHDGF.
4. Shin H.S., Li T., Lee H.-In, Tsourdos A. Sample greedy based task allocation for multiple robot systems // Swarm Intelligence. – 2022. – Vol. 16, No. 3. – P. 233-260. – DOI 10.1007/s11721-022-00213-0. – EDN UBPLT.
5. Chu J., Tian Y., Yue Qi., Huang Y. Task allocation and path planning for multi-robot systems in intelligent warehousing // Xibei Gongye Daxue Xuebao. – 2024. – Vol. 42, No. 5. – P. 929-938. – DOI 10.1051/jnwpu/20244250929. – EDN NJUGUE.
6. Варламов О.О. Создание Больших Знаний и расширение областей применения миварных технологий логического искусственного интеллекта // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2023. – № 4 (32). – С. 30-41. – DOI 10.25729/ESI.2023.32.4.003. – EDN THBEWN.
7. Varlamov O., Aladin D. A New Generation of Rules-based Approach: Mivar-based Intelligent Planning of Robot Actions (MIPRA) and Brains for Autonomous Robots // Machine Intelligence Research. – 2024. – Vol. 21, No. 5. – P. 919-940. – DOI 10.1007/s11633-023-1473-1. – EDN TSPUOP.
8. Варламов О.О. Эволюционные базы данных и знаний для адаптивного синтеза интеллектуальных систем. Миварное информационное пространство. – М.: Научно-техническое издательство "Радио и связь", 2002. – 286 с. – ISBN 5-256-01650-4. – EDN RWTCP.
9. Qiujie S., Shengshuo G., Kotsenko A.A., Varlamov O.O. Algorithm for Dynamic Robot Trajectory Planning Based on Semantic Object Detection Using a Mivar Expert System // 2025 7th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), Moscow, Russian Federation, 2025. – P. 1-5. – doi: 10.1109/REEPE63962.2025.10971158.
10. Коценко А.А. О миварной системе принятия решений для планирования трехмерных маршрутов роботов с учетом препятствий // Искусственный интеллект в автоматизированных системах управления и обработки данных: Сб. статей II Всероссийской научной конференции, Москва, 27–28 апреля 2023 года. – М.: Издательский дом КДУ, Добросвет, 2023. – С. 445-449. – EDN ZWEHRE.
11. Диане С.А.К., Исхаков А.Ю., Исхакова А.О. Алгоритм сетецентрического управления движением группы мобильных роботов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10, № 1 (36). – DOI 10.26102/2310-6018/2022.36.1.026. – EDN GLILDW.
12. Подопригорова Н.С., Козырев С.А., Подопригорова С.С. [и др.]. Разработка миварной экспертной системы для выбора алгоритма консенсуса распределённых реестров // Проблемы искусственного интеллекта. – 2024. – № 4 (35). – С. 126-138. – DOI 10.24412/2413-7383-2024-4-126-138. – EDN AVXOTO.
13. Налигацкий Е.С., Писклов А.Д., Калимуллин Л.А. Современные методы внедрения логистических роботов на российских предприятиях // Интеграция, эволюция, модернизация: пути развития науки и образования: Сб. статей по итогам Международной научно-практической конференции, Воронеж, 14 июня 2025 года. – Стерлитамак: Общество с ограниченной ответственностью "Агентство международных исследований", 2025. – С. 178-186. – EDN SYNOFX.
14. Григорьева Е.Д., Ушаков В.А. Модель и алгоритм решения транспортно-логистической задачи своевременной доставки грузов с использованием группировки робототехнических комплексов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2025. – № 2 (244). – С. 151-161. – DOI 10.18522/2311-3103-2025-2-151-161. – EDN DNPJER.
15. Генералова К.Е. Роботизированная автоматизация как современный метод развития логистики // Транспорт и логистика: актуальные вопросы, проектные решения и инновационные достижения: Матер. Всероссийской научно-практической конференции, Красноярск, 23 октября 2020 года. – Красноярск: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева", 2020. – С. 170-173. – EDN OGKGCQ.
16. Sharma K., Doriya R. Coordination of multi-robot path planning for warehouse application using smart approach for identifying destinations // Intelligent Service Robotics. – 2021. – Vol. 14, No. 2. – P. 313-325. – DOI 10.1007/s11370-021-00363-w. – EDN ORAADB.
17. Гун Ш. Миварная система принятия решений для распределения и перевозки грузов командой складских роботов // Системы управления и информационные технологии. – 2025. – № 2 (100). – С. 23-29. – EDN XZHHBF.
18. Дубенко Ю.В. Аналитический обзор проблем многоагентного обучения с подкреплением // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2020. – Т. 17, № 6 (192). – С. 48-56. – DOI 10.14489/vkit.2020.06.pp.048-056. – EDN SJPXIZ.
19. Астапова М.А. Интеллектуальное управление робототехническими средствами в задаче сегментации нор грызунов с использованием глубоких сверточных архитектур // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2025. – № 2 (244). – С. 19-30. – DOI 10.18522/2311-3103-2025-2-19-30. – EDN ZJOGJN.

20. Orr Ja., Dutta A. Multi-Agent Deep Reinforcement Learning for Multi-Robot Applications: A Survey // *Sensors*. – 2023. – Vol. 23, No. 7. – P. 3625. – DOI 10.3390/s23073625. – EDN AHGHYH.
21. Shen Q., Gong Sh., Kotsenko A.A., Varlamov O.O. Algorithm for dynamic robot trajectory planning based on semantic object detection using a mivar expert system // 7th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), Moscow, 08–10 апреля 2025 года. – IEEE: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2025. – DOI 10.1109/REEPE63962.2025.10971158. – EDN NAXJHW.
22. Болучевская О.А., Милошенко О.В. Вопросы современного применения роботов // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. – 2013. – № 3 (3). – С. 12. – EDN RTWAON.
23. Соколов С.М., Богуславский А.А. Методика и практика повышения автономности наземных робототехнических комплексов // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2025. – № 2 (244). – С. 129-140. – DOI 10.18522/2311-3103-2025-2-129-140. – EDN JWTEEF.
24. Чувилов Д.А. Модели и алгоритмы реконструкции и экспертизы аварийных событий дорожно-транспортных происшествий: специальность 05.13.01 "Системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям)": дисс. ... канд. техн. наук. – М., 2017. – 318 с. – EDN YURHFQ.
25. Гун И.И. Миварная система принятия решений по оптимизационному распределению грузов для групп складских роботов // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. – 2025. – Т. 13, № 3 (50). – DOI 10.26102/2310-6018/2025.50.3.047. – EDN WJJQXB.

REFERENCES

1. Adil A. A., Sakhrieh S., Mounsef J., & Maalouf N. A multi-robot collaborative manipulation framework for dynamic and obstacle-dense environments: integration of deep learning for real-time task execution, *Frontiers in robotics and AI*, 2025, 12, 1585544. Available at: <https://doi.org/10.3389/frobt.2025.1585544>.
2. Choi B., Kim M., & Kim H. An Optimization Framework for Allocating and Scheduling Multiple Tasks of Multiple Logistics Robots, *Mathematics*, 2025, 13 (11), 1770. Available at: <https://doi.org/10.3390/math13111770>.
3. Darintsev O.V., Migranov A.B. Analiticheskiy obzor podkhodov k raspredeleniyu zadach v gruppakh mobil'nykh robotov na osnove tekhnologiy myagkikh vychisleniy [Analytical review of approaches to distributing tasks in groups of mobile robots based on soft computing technologies], *Informatika i avtomatizatsiya* [Informatics and Automation], 2022, Vol. 21, No. 4, pp. 729-757. DOI 10.15622/ia.21.4.4. EDN AGHDGF.
4. Shin H.S., Li T., Lee H.-In, Tsourdos A. Sample greedy based task allocation for multiple robot systems, *Swarm Intelligence*, 2022, Vol. 16, No. 3, pp. 233-260. DOI 10.1007/s11721-022-00213-0. EDN UBPOLT.
5. Chu J., Tian Y., Yue Qi., Huang Y. Task allocation and path planning for multi-robot systems in intelligent warehousing, *Xibei Gongye Daxue Xuebao*, 2024, Vol. 42, No. 5, pp. 929-938. DOI 10.1051/jnwpu/20244250929. EDN NJUGUE.
6. Varlamov O.O. Sozдание Bol'shikh Znaniy i rasshirenie oblastey primeneniya mivarnykh tekhnologiy logicheskogo iskusstvennogo intellekta [Creation of Great Knowledge and expansion of the areas of application of mivar technologies of logical artificial intelligence], *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii* [Information and Mathematical Technologies in Science and Management], 2023, No. 4 (32), pp. 30-41. DOI 10.25729/ESI.2023.32.4.003. EDN THBEWN.
7. Varlamov O., Aladin D. A New Generation of Rules-based Approach: Mivar-based Intelligent Planning of Robot Actions (MIPRA) and Brains for Autonomous Robots, *Machine Intelligence Research*, 2024, Vol. 21, No. 5, pp. 919-940. DOI 10.1007/s11633-023-1473-1. EDN TSPUOP.
8. Varlamov O.O. Evolyutsionnye bazy dannykh i znaniy dlya adaptivnogo sinteza intellektual'nykh sistem. Mivarnoe informatsionnoe prostranstvo [Evolutionary databases and knowledge bases for adaptive synthesis of intelligent systems. Mivar information space]. Moscow: Nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo "Radio i svyaz", 2002, 286 p. ISBN 5-256-01650-4. EDN RWTCOP.
9. Qiujie S., Shengshuo G., Kotsenko A.A., Varlamov O.O. Algorithm for Dynamic Robot Trajectory Planning Based on Semantic Object Detection Using a Mivar Expert System, 2025 7th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), Moscow, Russian Federation, 2025, pp. 1-5. doi: 10.1109/REEPE63962.2025.10971158.
10. Kotsenko A.A. O mivarnoy sisteme prinyatiya resheniy dlya planirovaniya trekhmernykh marshrutov robotov s uchetom prepyatstviy [On a mivar decision-making system for planning three-dimensional routes of robots taking into account obstacles], *Iskusstvennyy intellekt v avtomatizirovannykh sistemakh upravleniya i obrabotki dannykh: Sb. statey II Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii, Moskva, 27–28 aprelya 2023 goda* [Artificial Intelligence in Automated Control and Data Processing Systems: Collection of articles from the II All-Russian Scientific Conference, Moscow, April 27–28, 2023]. Moscow: Izdatel'skiy dom KDU, Dobrosvet, 2023, pp. 445-449. EDN ZWEHRE.

11. Diane S.A.K., Iskhakov A.Yu., Iskhakova A.O. Algoritm setetsentricheskogo upravleniya dvizheniem gruppy mobil'nykh robotov [Algorithm for network-centric control of the motion of a group of mobile robots], *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and Information technology], 2022, Vol. 10, No. 1 (36). DOI 10.26102/2310-6018/2022.36.1.026. EDN GLILDW.
12. Podoprigorova N.S., Kozyrev S.A., Podoprigorova S.S. [i dr.]. Razrabotka mivarnoy ekspertnoy sistemy dlya vybora algoritma konsensusa raspredelennykh reestrov [Development of a mivar expert system for selecting a consensus algorithm for distributed ledgers], *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2024, No. 4 (35), pp. 126-138. DOI 10.24412/2413-7383-2024-4-126-138. EDN AVXOTO.
13. Naligatskiy E.S., Pisklov A.D., Kalimullin L.A. Sovremennye metody vnedreniya logisticheskikh robotov na rossiyskikh predpriyatiyakh [Modern methods of implementing logistics robots at Russian enterprises], *Integratsiya, evolyutsiya, modernizatsiya: puti razvitiya nauki i obrazovaniya: Sb. statey po itogam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, Voronezh, 14 iyunya 2025 goda* [Integration, evolution, modernization: paths of development of science and education: Collection of articles following the results of the International scientific and practical conference, Voronezh, June 14, 2025]. Sterlitamak: Obshchestvo s ogranichennoy otvetstvennost'yu "Agentstvo mezhdunarodnykh issledovaniy", 2025, pp. 178-186. EDN SYNOFX.
14. Grigor'eva E.D., Ushakov V.A. Model' i algoritm resheniya transportno-logisticheskoy zadachi svoevremennoy dostavki грузов s ispol'zovaniem gruppirovki robototekhnicheskikh kompleksov [Model and algorithm for solving the transport and logistics problem of timely delivery of goods using a group of robotic complexes], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2025, No. 2 (244), pp. 151-161. DOI 10.18522/2311-3103-2025-2-151-161. EDN DNPERJ.
15. Generalova K.E. Robotizirovannaya avtomatizatsiya kak sovremennyy metod razvitiya logistiki [Robotic automation as a modern method of logistics development], *Transport i logistika: aktual'nye voprosy, proektnye resheniya i innovatsionnye dostizheniya: Mater. Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, Krasnoyarsk, 23 oktyabrya 2020 goda* [Transport and logistics: current issues, design solutions and innovative achievements: Proceedings of the All-Russian scientific and practical conference, Krasnoyarsk, October 23, 2020]. Krasnoyarsk: Federal'noe gosudarstvennoe byudzhethoe obrazovatel'noe uchrezhdenie vysshego obrazovaniya "Sibirskiy gosudarstvennyy universitet nauki i tekhnologii imeni akademika M.F. Reshetneva", 2020, pp. 170-173. EDN OGGKCQ.
16. Sharma K., Doriya R. Coordination of multi-robot path planning for warehouse application using smart approach for identifying destinations, *Intelligent Service Robotics*, 2021, Vol. 14, No. 2, pp. 313-325. DOI 10.1007/s11370-021-00363-w. EDN ORAADB.
17. Gun Sh. Mivarnaya sistema prinyatiya resheniy dlya raspredeleniya i perevozki грузов komandoy skladskikh robotov [Mivar decision-making system for distribution and transportation of goods by a team of warehouse robots], *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technologies], 2025, No. 2 (100), pp. 23-29. EDN XZHHBF.
18. Dubenko Yu.V. Analiticheskiy obzor problem mnogoagentnogo obucheniya s podkrepleniem [Analytical review of problems of multi-agent reinforcement learning], *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Bulletin of Computer and Information Technologies], 2020, Vol. 17, No. 6 (192), pp. 48-56. DOI 10.14489/vkit.2020.06.pp.048-056. EDN SJPIXZ.
19. Astapova M.A. Intellectual'noe upravlenie robototekhnicheskimi sredstvami v zadache segmentatsii nor gryzunov s ispol'zovaniem glubokikh svertochnykh arkhitektur [Intelligent control of robotic means in the problem of segmentation of rodent burrows using deep convolutional architectures], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2025, No. 2 (244), pp. 19-30. DOI 10.18522/2311-3103-2025-2-19-30. EDN ZJOGJN.
20. Orr Ja., Dutta A. Multi-Agent Deep Reinforcement Learning for Multi-Robot Applications: A Survey, *Sensors*, 2023, Vol. 23, No. 7, pp. 3625. DOI 10.3390/s23073625. EDN AHGHYH.
21. Shen Q., Gong Sh., Kotsenko A.A., Varlamov O.O. Algorithm for dynamic robot trajectory planning based on semantic object detection using a mivar expert system, *7th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), Moscow, 08–10 aprilya 2025 goda*. IEEE: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2025. DOI 10.1109/REEPE63962.2025.10971158. EDN NAXJHW.
22. Boluchevskaya O.A., Miloshenko O.V. Voprosy sovremennogo primeneniya robotov [Issues of modern use of robots], *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, Optimization and Information Technology], 2013, No. 3 (3), pp. 12. EDN RTWAOH.
23. Sokolov S.M., Boguslavskiy A.A. Metodika i praktika povysheniya avtonomnosti nazemnykh robototekhnicheskikh kompleksov [Methodology and practice of increasing the autonomy of ground robotic systems], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2025, No. 2 (244), pp. 129-140. DOI 10.18522/2311-3103-2025-2-129-140. EDN JWTEEF.

24. Chuvikov D.A. Modeli i algoritmy rekonstruktsii i ekspertizy avariynykh sobytii dorozhno-transportnykh proissheshtviy: spetsial'nost' 05.13.01 "Sistemnyy analiz, upravlenie i obrabotka informatsii (po otraslyam)": diss. ... kand. tekhn. nauk [Models and algorithms for reconstruction and examination of emergency events of road traffic accidents: specialty 05.13.01 "System analysis, management and processing of information (by industry)": cand. of eng. sc. diss.]. Moscow, 2017, 318 p. EDN YUPHFQ.
25. Gun Sh. Mivarnaya sistema prinyatiya resheniy po optimizatsionnomu raspredeleniyu грузов dlya grupp skladskikh robotov [Mivar decision-making system for optimized cargo distribution for groups of warehouse robots], *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information technology], 2025, Vol. 13, No. 3 (50). DOI 10.26102/2310-6018/2025.50.3.047. EDN WJJQXB.

Гун Шэншо – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана; e-mail: hiteyeb@163.com; г. Москва, Россия; тел.: +79269656719; кафедра системы обработки информации и управления; аспирант.

Gong Shengshuo – Bauman Moscow State Technical University; e-mail: hiteyeb@163.com; Moscow, Russia; phone: +79269656719; the Department of Information Processing and Management; postgraduate student.

УДК 517.95

DOI 10.18522/2311-3103-2026-3-232-243

А.Г. Езаова, Л.В. Канукоева, Г.В. Куповых**ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССАМИ В ГАЗОВЫХ И ЖИДКИХ СРЕДАХ**

Приведены результаты исследования внутренней краевой задачи для уравнения смешанного гипербола-параболического типа, характеризующегося наличием кратных характеристик. Область, в которой рассматривается уравнение, является конечной и односвязной, состоящей из двух частей: гиперболической и параболической. Это разделение области обусловлено спецификой рассматриваемого уравнения. Граница между гиперболической и параболической областями представляет собой линию вырождения, где происходит переход от гиперболического к параболическому типу уравнения. Ключевой особенностью поставленной задачи является краевое условие, заданное в гиперболической части области. Это условие содержит связывает между собой значения искомой функции в точках, принадлежащим характеристикам области, что придает задаче значительную сложность. Цель работы – доказательство теоремы существования и единственности решения поставленной краевой задачи. Доказательство проводится для различных случаев, определяемых дискриминантом кубического характеристического уравнения, связанного с уравнением в частных производных. Различные значения дискриминанта указывают на различные качественные свойства решений и требуют индивидуального подхода в доказательстве. Для доказательства единственности решения используется метод интегралов энергии. Этот метод позволяет установить определенные энергетические неравенства, связывающие решение с заданными функциями и их точечными значениями в краевом условии. Полученные неравенства накладывают ограничения на допустимые значения параметров задачи, гарантируя единственность решения. Нарушение этих ограничений может привести к некорректности задачи или к отсутствию единственного решения. Вопрос существования решения исследуется путем сведения задачи к эквивалентной системе функциональных соотношений, связывающих следы искомого решения и его производной на линии вырождения. Эти следы рассматриваются отдельно для гиперболической и параболической частей области. Дальнейшее исследование сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Важно отметить, что ядро этого интегрального уравнения имеет слабую особенность, а правая часть непрерывна. Безусловная разрешимость этого интегрального уравнения, а следовательно, и существование решения исходной задачи, выводится из ранее доказанной единственности решения. Это существенный момент, демонстрирующий тесную связь между существованием и единственностью решения.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода; функция Грина; уравнение смешанного типа; существование решения; единственность решения.