

15. Maslov E.A. Korporativnaya informatsionnaya Sistema v sisteme korporativnogo upravleniya [Corporate information system in corporate governance], *Teoriya i praktika sovremennoy nauki* [Theory and Practice of Modern Science], 2024, No. 5 (107), pp. 108-110. EDN DCHXBR.
16. Kuzina D.A. Biznes-analitika i povyshenie effektivnosti vnedreniya ERP-sistemy organizatsii [Business analytics and improving the efficiency of ERP system implementation], *Razvitie regional'noy innovatsionnoy sistemy na osnove importooperezheniya i zadelov intellektual'noy sobstvennosti: Sb. materialov Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, Samara, 21 noyabrya 2024 goda* [Development of Regional Innovation Systems Based on Import Substitution and Intellectual Property: Proceedings of the International Scientific-Practical Conference, Samara, November 21, 2024]. Samara: OOO "Samarama", 2024, pp. 215-233. EDN VWYZGA.
17. Bel'mas S.M. Razrabotka i vnedrenie ERP-sistem [Development and Implementation of ERP Systems], *Shumpeterovskie chteniya* [Schumpeterian Readings.], 2018, Vol. 1, pp. 48-60. EDN ZCTJJR.
18. Kopan' A.O., Velikanova L.O. Informatizatsiya proizvodstvennogo planirovaniya: tipovye moduli proizvodstvennogo planirovaniya [Informatization of production planning: standard modules], *Tsifrovizatsiya ekonomiki: napravleniya, metody, instrumenty: Sb. materialov II vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, Krasnodar, 20–24 yanvarya 2020 goda* [Digitalization of the Economy: Directions, Methods, Tools: Proceedings of the II All-Russian Scientific-Practical Conference, Krasnodar, January 20–24, 2020]. Krasnodar: Kubanskiy gosudarstvennyy agrarnyy universitet imeni I.T. Trubilina, 2020, pp. 281-283. EDN GMFIYM.
19. Doronkin V.G., El'tsov V.V. VAZ i VUZ. Istoricheskie paralleli. Opyt realizatsii strategii razvitiya 2020 [VAZ and higher education: historical parallels. Experience in implementing the 2020 development strategy], *Inzhenernoe obrazovanie* [Engineering Education], 2016, No. 19, pp. 116-121. EDN WWULZT.
20. Dadyan E.G. Konfigurirovanie i modelirovanie v sisteme "1S: Predpriyatie": uchebnik [Configuration and modeling in the 1c:enterprise system: textbook]. Moscow: Izdatel'skiy dom "Vuzovskiy uchebnik", 2018. – 417 s. – (Vysshee obrazovanie: Magistratura (FU)). ISBN 978-5-9558-0581-8. DOI 10.12737/textbook\_5a0c1bcccc76f5.69529307. EDN YMGIJS.

**Зорькин Дмитрий Юрьевич** – Волгоградский государственный технический университет; e-mail: mosh285@gmail.com; г. Волгоград, Россия; преподаватель кафедры ПМ.

**Богнюков Александр Алексеевич** – Волгоградский государственный технический университет; e-mail: bognyukov@gmail.com; г. Волгоград, Россия; студент.

**Кожанова Татьяна Евгеньевна** – Волгоградский государственный технический университет; e-mail: mitina.te@yandex.ru; г. Волгоград, Россия; старший преподаватель кафедры ПМ.

**Zorkin Dmitry Yuryevich** – Volgograd State Technical University; e-mail: mosh285@gmail.com; Volgograd, Russia; teacher of PM Department.

**Bognyukov Alexander Alekseevich** – Volgograd State Technical University; e-mail: bognyukov@gmail.com; Volgograd, Russia; student.

**Kozhanova Tatiana Evgenievna** – Volgograd State Technical University; e-mail: mitina.te@yandex.ru; Volgograd, Russia; senior lecturer at the Department of PM.

УДК 621.373+519.622

DOI 10.18522/2311-3103-2026-1-112-122

**А.М. Пилипенко**

### **ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ С РАЗЛИЧНОЙ ДИНАМИКОЙ**

*Обеспечение точности и устойчивости компьютерного моделирования радиоэлектронных устройств является важной задачей при их проектировании. Наибольшие трудности при компьютерном моделировании радиоэлектронных устройств возникают в случае анализа автоколебательных цепей, поскольку математические модели таких цепей могут быть жесткими и осциллирующими одновременно. Целью данной работы является обоснование эффективного численного метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющего более высокую точность*

анализа во временной области различных видов автоколебательных цепей по сравнению с известными методами. Предлагаемый метод является гибридным методом и базируется на известных методах Гира и трапеций, использующихся в пакетах схемотехнического моделирования радиоэлектронных устройств. Для оценки точности предлагаемого метода и известных методов использовалась обобщенная модель автоколебательной цепи, для которой было определено аналитическое решение в установившемся режиме работы. Точность численного решения определялась на основе анализа погрешностей оценки основных параметров колебательного процесса – амплитуды и частоты колебаний. Сравнительный анализ погрешностей оценки амплитуды и частоты колебаний автогенераторов в различных режимах работы показывает высокую эффективность предлагаемого гибридного метода как для анализа генераторов гармонических колебаний, так и для анализа генераторов релаксационных колебаний. Дальнейшее повышение точности гибридного метода возможно за счет применения неявных методов Рунге-Кутты высокого порядка точности, а именно подклассов Радо IIA и Лобатто IIIA, которые обладают L- и P-устойчивостью соответственно. Следует отметить, что с ростом порядка точности неявных методов Рунге-Кутты возрастает вычислительная трудоемкость данных методов, но для подклассов Радо IIA и Лобатто IIIA рост вычислительной трудоемкости будет минимальным.

*Численный метод; обыкновенное дифференциальное уравнение; автогенератор; гармоническое колебание; релаксационное колебание; погрешность моделирования.*

**A.M. Pilipenko**

#### **APPLICATION OF HYBRID METHODS FOR NUMERICAL SOLVING OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ANALYSIS OF SELF-OSCILLATING CIRCUITS WITH VARIOUS DYNAMICS**

*Ensuring the accuracy and stability of computer simulation of electronic devices is an important problem in their design. The greatest difficulties in simulation of electronic devices arise in the case of the analysis of self-oscillating circuits, since mathematical models of such circuits can be stiff and oscillating at the same time. The aim of this work is to develop an efficient numerical method for solving ordinary differential equations that provides higher accuracy of time domain analysis for various types of autogenerators compared to existing methods. The proposed method is a hybrid method and is based on the well-known Gear and trapezoidal methods used in simulators of electronic circuits. To evaluate the accuracy of the proposed method and known methods a generalized model of a self-oscillating circuit was used for which an analytical solution was determined in the steady-state operating mode. The accuracy of the numerical solution was determined based on the analysis of errors in estimating the main parameters of the oscillatory process – the amplitude and frequency of oscillations. A comparative analysis of errors in estimating the amplitude and frequency of oscillations in autogenerators demonstrates the high efficiency of the proposed hybrid method for analyzing both harmonic oscillators and relaxation oscillators. A further increase in the accuracy of the hybrid method is possible using implicit Runge-Kutta methods (Rado IIA and Lobatto IIIA subclasses), which have L- and P-stability, respectively. It should be noted that with an increase in the order of accuracy of implicit Runge-Kutta methods, the computational complexity of these methods increases, but for the Rado IIA and Lobatto IIIA subclasses the increase in computational complexity will be minimal.*

*Numerical method; ordinary differential equation; autogenerator; harmonic oscillation; relaxation oscillation; simulation error.*

**Введение.** В современных пакетах схемотехнического моделирования (SPICE-симуляторах), в том числе отечественных, для автоматизированного анализа цепей во временной области используются методы Гира и метод трапеций [1, 2]. Указанные методы имеют минимальную вычислительную сложность среди неявных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Методы Гира обладают L-устойчивостью и могут использоваться для анализа жестких систем, постоянные времени которых отличаются на порядок и более. Метод трапеций является P-устойчивым и обеспечивает максимальную точность анализа осциллирующих систем, процессы в которых близки к гармоническим колебаниям [3].

Несмотря на перечисленные выше достоинства методов Гира и трапеций в настоящее время продолжается разработка более эффективных методов численного решения ОДУ, в том числе применительно к задачам радиоэлектроники [4–6]. Действительно, из-

вестные методы имеют ряд недостатков, которые представлены, например, в работах [7–9]. Наибольшие трудности при использовании методов Гира и трапеций возникают при анализе автоколебательных цепей.

На рис. 1 и 2 представлены результаты численного анализа во временной области различных видов автогенераторов, полученные в работе [9]. Схемы анализируемых автогенераторов были описаны в работе [10] и адаптированы для симулятора Multisim в работе [9].

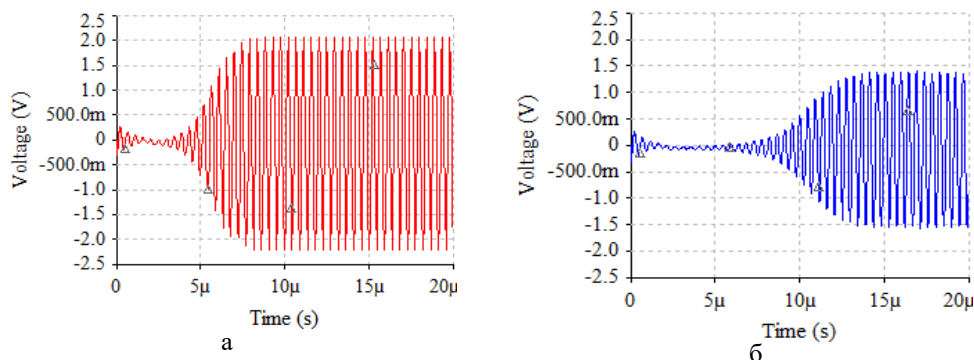


Рис. 1. Результаты численного анализа генератора гармонических колебаний, полученные методами трапеций (а) и Гира (б) [9]

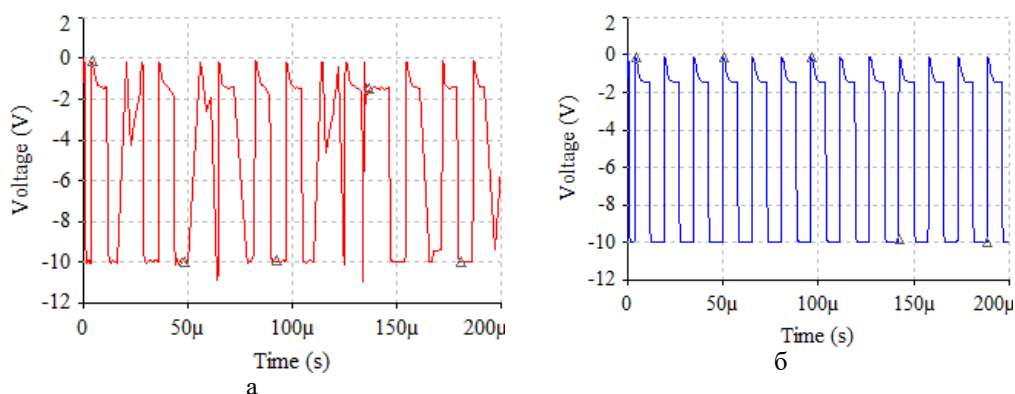


Рис. 2. Результаты численного анализа генератора релаксационных колебаний, полученные методами трапеций (а) и Гира (б) [9]

Из рис. 1 видно, что использование методов Гира для анализа генераторов гармонических колебаний приводит к получению колебания, у которого установившееся значение амплитуды отличается примерно в 2 раза от истинного значения. Следует отметить, что метод Гира также может приводить к затухающему численному решению при численном анализе генераторов гармонических колебаний. В свою очередь, как следует из рис. 2, использование метода трапеций для анализа генераторов релаксационных колебаний приводит к искажению решения и появлению паразитных колебаний.

Целью данной работы является обоснование гибридного метода численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, обеспечивающего высокую точность и устойчивость моделирования во временной области автогенераторов гармонических и релаксационных колебаний.

В соответствии с поставленной целью в работе решаются следующие задачи:

- ♦ описание обобщенной модели автоколебательной цепи и методики тестирования численных методов;

- ♦ обоснование разностной схемы гибридного метода на основе методов Гира и трапеций;
- ♦ сравнительный анализ точности известных численных методов и гибридных методов.

**1. Обобщенная модель автоколебательной цепи.** Для количественной оценки точности численных методов тестовая задача должна иметь аналитическое решение. В данной работе в качестве тестовой задачи используется обобщенная модель автоколебательной цепи, предложенная в работе [7], для которой было определено точное решение в стационарном режиме, а также найдены установившиеся значения амплитуд и частот с пятнадцатью точными значащими цифрами для случаев гармонических и релаксационных колебаний [9]. Эквивалентная схема рассматриваемой автоколебательной цепи показана на рис. 3.

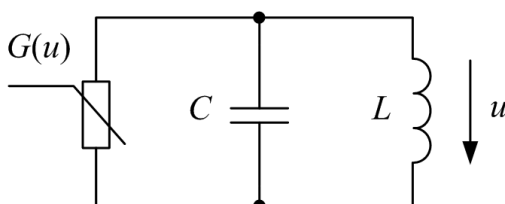


Рис. 3. Схемная модель автоколебательной цепи

В схемной модели на рис. 3 обозначены линейные элементы контура  $L$  и  $C$ , а также нелинейная проводимость, которая описывается следующим выражением [9]

$$G(u) = \begin{cases} G_1, & u < -U_0, u > U_0; \\ -G_0, & -U_0 \leq u \leq U_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u$  – напряжение на выходе цепи;  $G_0$  и  $G_1$  – модули дифференциальной проводимости при  $G(u) \leq 0$  и  $G(u) > 0$ ;  $\pm U_0$  – напряжения переключения  $G(u)$ .

Математическая модель автоколебательной цепи, показанной на рис. 3, представляет собой нелинейную систему ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{f(u)}{C} - \frac{i}{C}; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{u}{L}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $i$  – ток индуктивности;  $f(u)$  – вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейной проводимости [7].

Точное стационарное решение системы ОДУ (2) и методика его получения для случая, когда дифференциальная проводимость  $G(u) = df/du$  описывается выражением (1), представлены в работах [7, 8]. Представленная выше модель автоколебательной цепи позволяет устанавливать требуемый режим работы автогенератора путем изменения параметров  $G_0$ ,  $G_1$  и  $\sigma = \sqrt{C/L}$ , кроме того, для представленной модели можно определить установившиеся значения амплитуды  $A_{m0}$  и частоты  $\omega_0$  колебаний с точностью до последнего знака разрядной сетки компьютера. В частности, при  $L = 1$  Гн и  $C = 1$  Ф получены следующие значения амплитуды и частоты [9]:

- ♦ для режима гармонических колебаний  $\sigma/G_0 = \sigma/G_1 = 100$   
 $A_{m0} = 2,475416990116814$  В,  $\omega_0 = 0,99999565970188$  рад/с;
- ♦ для режима релаксационных колебаний  $\sigma/G_0 = 0,25$ ,  $\sigma/G_1 = 0,01$   
 $A_{m0} = 1,084334602144661$  В,  $\omega_0 = 0,345968425746775$  рад/с.

Результаты компьютерного моделирования рассматриваемой автоколебательной цепи в симуляторе Multisim, представленные на рис. 4 и 5 [9], подтверждают низкую эффективность метода Гира для анализа осциллирующих систем, а метода трапеций – для жестких систем.

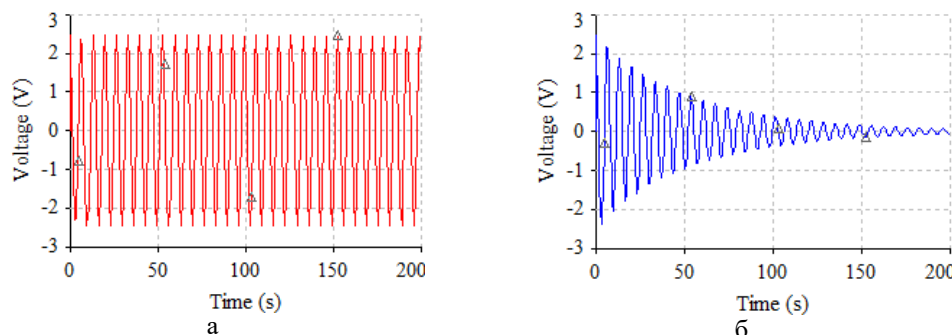


Рис. 4. Результаты численного анализа автоколебательной цепи в режиме гармонических колебаний, полученные методами трапеций (а) и Гира (б) [9]

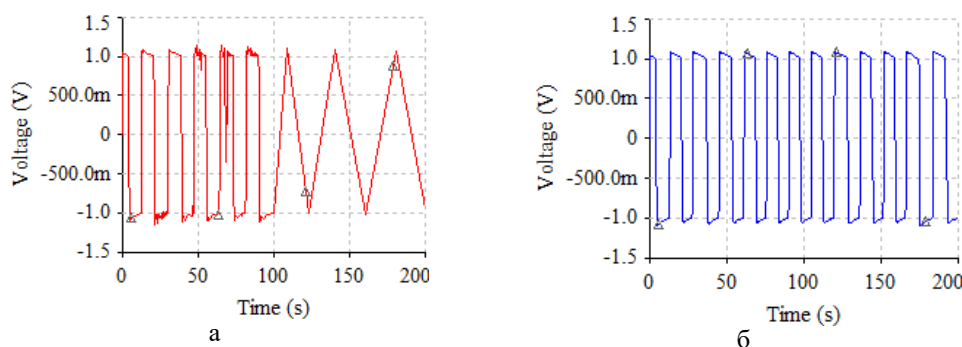


Рис. 5. Результаты численного анализа автоколебательной цепи в режиме релаксационных колебаний, полученные методами трапеций (а) и Гира (б) [9]

**2. Разностные схемы численных методов решения ОДУ для SPICE-симуляторов.** Рассмотрим численные методы, используемые в SPICE-симуляторах, для решения систем ОДУ вида

$$dx/dt = f(x, t), \quad x(0) = x_0,$$

где  $x$  – вектор неизвестных переменных,  $f(x, t)$  – вектор функция, определяющаяся схемой цепи [11].

Методы Гира 1-го и 2-го порядков (*BDF1* и *BDF2*) описываются следующими уравнениями (разностными схемами) [12]:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1}, t_{n+1}); \quad (3)$$

$$x_{n+2} = \frac{4}{3}x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}hf(x_{n+2}, t_{n+2}). \quad (4)$$

где  $x_{n+2}$ ,  $x_{n+1}$ ,  $x_n$  – приближенные решения системы ОДУ при  $t_{n+2} = t_n + 2h$ ,  $t_{n+1} = t_n + h$ ,  $t_n = nh$  соответственно;  $h$  – шаг интегрирования;  $n = 0, 1, 2, \dots$

Разностная схема метода трапеций (*TR*) имеет вид [13]:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[f(x_n, t_n) + f(x_{n+1}, t_{n+1})]. \quad (5)$$

Следует отметить, что метод Гира 1-го порядка является простейшим неявным методом численного интегрирования ОДУ, также называемым неявным методом Эйлера.

Для преодоления описанных выше недостатков методов Гира (3), (4) и метода трапеций (5) в данной работе для анализа автоколебательных цепей предлагается применять гибридный метод (*HM*), впервые представленный в работе [14], который показал высокую эффективность численного анализа линейных моделей как осциллирующих систем, так и жестких. Гибридный метод представляет собой комбинацию метода Гира 1-го порядка и метода трапеций:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+\alpha} = \mathbf{x}_n + \alpha h \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha}); \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+\alpha} + \frac{(1-\alpha)h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha})], \end{cases} \quad (6)$$

где  $\mathbf{x}_{n+\alpha}$  – приближенное решение системы ОДУ при  $t_{n+\alpha} = t_n + \alpha h$ ;  $0 \leq \alpha \leq 1$  – весовой коэффициент.

В гибридном методе каждый шаг интегрирования включает в себя два частичных шага, соотношение между которыми определяется весовым коэффициентом  $\alpha$ , который представляет собой функцию  $\alpha^*(h)$ , зависящую от шага интегрирования и удовлетворяющую следующим условиям:

$\alpha^*(h) = 1$  при максимальном шаге интегрирования  $h = h_{\max}$ , тогда в разностной схеме гибридного метода наибольший вес будет иметь L-устойчивый метод, обладающий наименьшей погрешностью при больших шагах;

$\alpha^*(h) = 0$  при шаге интегрирования  $h \rightarrow 0$ , тогда в разностной схеме гибридного метода наибольший вес будет иметь R-устойчивый метод, обладающий наименьшей погрешностью при малых шагах.

Аналитические выражения для функции  $\alpha^*(h)$  представлены в работах [15–17]. В данной работе используется функция позволяющая учесть жесткости задачи  $m$  для минимизации погрешности численного решения [17]:

$$\alpha = \alpha^*(h) = 1 - [1 - (h/h_{\max})]^m, \quad (7)$$

где  $m \approx \lg(\tau_{\max}/\tau_{\min})$ ;  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальная и минимальная постоянные времени цепи.

График функции (7) показан на рис. 6, из которого следует, что с увеличением жесткости задачи коэффициент  $\alpha$  будет быстрее приближаться к единице, при этом в гибридном методе наибольший вес будет иметь L-устойчивый метод.

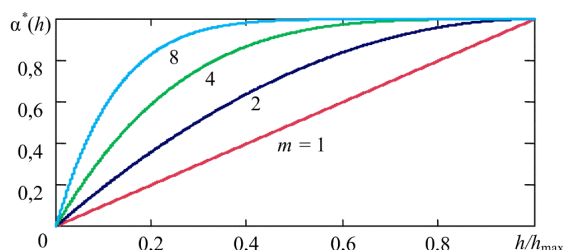


Рис. 6. Зависимости весового коэффициента гибридного метода от нормированного шага интегрирования при различной жесткости задачи

**3. Сравнительный анализ точности численных методов.** Для количественной оценки точности представленных выше численных методов была использована методика, описанная в работе [4]. В соответствии с данной методикой были определены зависимости относительных погрешностей расчета амплитуды  $\epsilon_A$  и частоты  $\epsilon_\omega$  генерируемых колебаний от шага интегрирования:

$$\epsilon_A = |A_{mk} - A_{m0}|/A_{m0}; \quad \epsilon_\omega = |\omega_k - \omega_0|/\omega_0,$$

где  $A_{mk}$  и  $\omega_k$  – оценки амплитуды и частоты колебаний, полученные численными методами.

Зависимости  $\epsilon_A$  и  $\epsilon_\omega$  от шага интегрирования, полученные в различных режимах работы для обобщенной модели автоколебательной цепи представлены на рис. 7 и 8.

Из рис. 7 видно, что в режиме гармонических колебаний гибридный метод обеспечивает примерно такую же точность, как и R-устойчивый метод трапеций, а погрешности оценки амплитуды и частоты с помощью гибридного метода оказываются значительно меньше, чем у L-устойчивых методов Гира. В частности, для случаев, когда значения отношений шага интегрирования к периоду колебаний составляют  $h/T = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  и  $10^{-3}$  погрешности гибридного метода будут меньше аналогичных погрешностей метода Гира 2-го порядка примерно в 200, 500 и 30 раз соответственно при оценке амплитуды и примерно в 3, 3,5 и 4 раза соответственно при оценке частоты.

Из рис. 8 видно, что в режиме релаксационных колебаний гибридный метод обеспечивает более высокую точность, чем Р-устойчивый метод трапеций и чем L-устойчивый метод Гира, как при оценке амплитуды, так и при оценке частоты. В частности, для случаев, когда значения отношений  $h/T = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  и  $10^{-3}$  погрешности гибридного метода будут меньше аналогичных погрешностей метода Гира 2-го порядка примерно в 4, 8 и 40 раз соответственно при оценке амплитуды и примерно в 8, 12 и 6 раз соответственно при оценке частоты, а также меньше аналогичных погрешностей метода трапеций примерно в 10, 20 и 4 раза соответственно при оценке амплитуды и примерно в 10, 3 и 1,5 раза соответственно при оценке частоты.

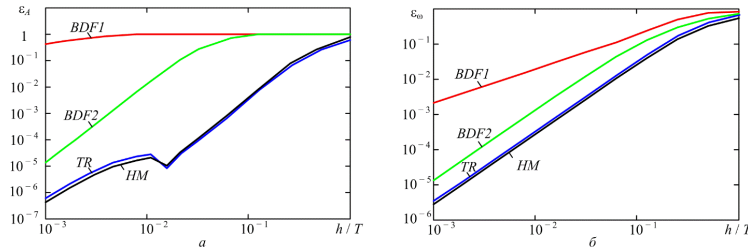


Рис. 7. Относительные погрешности оценки амплитуды (а) и частоты (б) колебаний при численном анализе во временной области автоколебательной цепи в режиме гармонических колебаний

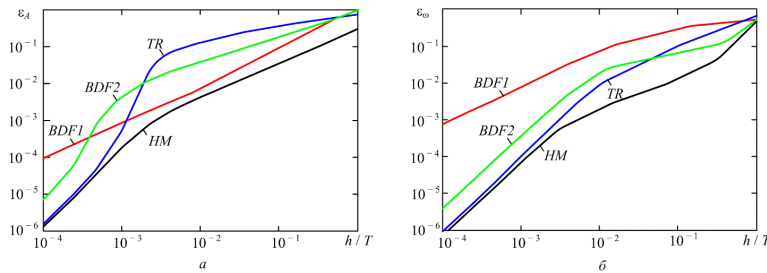


Рис. 8. Относительные погрешности оценки амплитуды (а) и частоты (б) колебаний при численном анализе во временной области автоколебательной цепи в режиме релаксационных колебаний

**4. Перспективы развития гибридных методов численного решения ОДУ.** Дальнейшее повышение точности и устойчивости гибридных методов возможно за счет применения различных классов неявных методов Рунге-Кутты (IRKM) высокого порядка точности.

Разностная схема метода Рунге-Кутты в общем случае описывается следующими уравнениями [18]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{f}(\mathbf{X}_i, t_n + c_i h); \\ \mathbf{X}_i &= \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(\mathbf{X}_j, t_n + c_j h), \quad 1 \leq i \leq s, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\mathbf{X}_i$  – приближенное решения системы ОДУ в момент времени  $t_n + c_i h$ ;  $s$  – число стадий метода;  $0 \leq c_i \leq 1$ ,  $a_{ij}, b_i$  – вещественные коэффициенты.

Коэффициенты методов Рунге-Кутты представляют в виде таблицы Бутчера:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array} = \begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \tag{9}$$

Наименьшую погрешность численного решения и максимальную L-устойчивость при заданном порядке точности позволяют обеспечить полностью неявные методы Рунге-Кутты (*FIRKM*), разностные схемы которых описаны в работе [19]. Однако данные методы имеют наибольшую вычислительную трудоемкость среди всех неявных методов, поскольку для реализации *FIRKM* порядка  $p$  требуется  $s = p$  стадий решения системы уравнений (8). Кроме того, *FIRKM* не обладают Р-устойчивостью.

Для понижения вычислительной трудоемкости неявных методов Рунге-Кутты при сохранении порядка точности в работе [20] предлагается использовать подклассы *IRKM* – методы Радо-IIА и Лобатто-IIIА. Методы Радо-IIА являются L-устойчивыми и требуют  $s = (p + 1)/2$  вычислительных стадий, а методы Лобатто-IIIА обеспечивают Р-устойчивость и для них достаточно  $s = p/2$  вычислительных стадий.

Таблицы Бутчера методов Радо-IIА 1-го, 3-го и 5-го порядков:

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{4 - \sqrt{6}}{10}$	$\frac{88 - 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4 + \sqrt{6}}{10}$	$\frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88 + 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$1$	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$1$	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

Таблицы Бутчера методов Лобатто-IIIА 2-го, 4-го и 6-го порядков:

$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{10}$	$\frac{11 + \sqrt{5}}{120}$	$\frac{25 - \sqrt{5}}{120}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5 + \sqrt{5}}{10}$	$\frac{11 - \sqrt{5}}{120}$	$\frac{25 + 13\sqrt{5}}{120}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

Следует отметить, что метод Гира 1-го порядка представляет собой метод Радо IIА 1-го порядка, а метод трапеций – метод Лобатто IIIА 2-го порядка. Таким образом, разностную схему гибридного метода высокого порядка точности можно получить путем замены в разностной схеме (6) выражения для первого частичного шага  $\mathbf{x}_{n+\alpha}$  обобщенной разностной схемой метода Радо IIА, а выражения для второго частичного шага  $\mathbf{x}_{n+1}$  – обобщенной разностной схемой метода Лобатто IIIА:

$$\begin{cases} \mathbf{XR}_i = \mathbf{x}_n + ah \sum_{j=1}^{sr} ar_{ij} \mathbf{f}(\mathbf{XR}_j, t_n + cr_j ah), \\ \mathbf{x}_{n+\alpha} = \mathbf{x}_n + ah \sum_{i=1}^{sr} br_i \mathbf{f}(\mathbf{XR}_i, t_n + cr_i ah); \\ \mathbf{XL}_i = \mathbf{x}_{n+\alpha} + (1 - \alpha)h \sum_{j=1}^{sl} al_{ij} \mathbf{f}(\mathbf{XL}_j, t_n + cl_j(1 - \alpha)h), \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+\alpha} + (1 - \alpha)h \sum_{i=1}^{sl} bl_i \mathbf{f}(\mathbf{XL}_i, t_n + cl_i(1 - \alpha)h), \end{cases} \quad (10)$$

где  $ar_{ij}$ ,  $br_i$ ,  $cr_i$  и  $al_{ij}$ ,  $bl_i$ ,  $cl_i$  – коэффициенты методов Радо IIА и Лобатто IIIА, представленные в таблицах Бутчера;  $sr$  и  $sl$  – число стадий в методах Радо IIА и Лобатто IIIА.

**Выводы.** Предлагаемый гибридный метод позволяет обеспечить наименьшую погрешность моделирования автоколебательных цепей, как в режиме гармонических колебаний, так и в режиме релаксационных колебаний. Для получения максимальной эффективности гибридного метода важно корректно выбирать весовой коэффициент, опреде-

ляющий соотношение между частичными шагами численных методов, входящих в разностную схему гибридных методов. При повышении жесткости задачи, определяющейся отношением максимальной и минимальной постоянных времени цепи, необходимо увеличивать степень функции, описывающей весовой коэффициент примерно до значения примерно равного степени жесткости задачи.

Дальнейшее повышение точности и устойчивости гибридного метода возможно за счет применения неявных методов Рунге-Кутты высокого порядка. Однако применение неявных методов Рунге-Кутты высокого порядка может приводить к существенному повышению вычислительной сложности гибридного метода, получаемого на их основе, поэтому необходимо проводить дополнительные исследования эффективности при разработке новых гибридных методов с учетом вычислительной трудоемкости.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Энгельхард М., Ревенко А.* SPICE Differentiation. Различия в реализациях симуляторов SPICE // Компоненты и технологии. – 2015. – № 7 (168). – С. 82-88.
2. *Прикота А.* Программа SimOne. Современные средства схемотехнического моделирования // Электроника НТБ. – 2011. – № 2. – С. 142-146.
3. *Petzold L.R., Jay L.O., Yen J.* Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations // Acta Numerica. – 1997. – P. 437-483.
4. *Guglielmi N., Hairer E.* Applying Stiff Integrators for Ordinary Differential Equations and Delay Differential Equations to Problems with Distributed Delays // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2025. – Vol. 47, No. 1. – DOI: 10.1137/24M1632413.
5. *Жук Д.М., Кожевников Д.Ю., Маничев В.Б.* Проблемы разработки математического ядра для программ моделирования динамики технических систем // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). – 2020. – № 4. – С. 31-38. – DOI: 10.31114/2078-7707-2020-4-31-38.
6. *Bernardini A., Maffezzoni P., Sarti A.* Linear Multistep Discretization Methods With Variable Step-Size in Nonlinear Wave Digital Structures for Virtual Analog Modeling // IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. – 2019. – Vol. 27, No. 11. – P. 1763-1776. – DOI: 10.1109/TASLP.2019.2931759.
7. *Пилипенко А.М., Бирюков В.Н.* Исследование эффективности современных численных методов при анализе автоколебательных цепей // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – № 8. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/aug13/9/text.html> (дата обращения 24.08.2025).
8. *Пилипенко А.М., Бирюков В.Н.* Оценка точности численного анализа релаксационного генератора // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – № 11. – С. 7. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/6/text.html> (дата обращения 24.08.2025).
9. *Пилипенко А.М., Агабекян А.В.* Модель автоколебательной цепи для тестирования методов численного анализа переходных процессов в SPICE-симуляторах // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2022. – № 3(227). – С. 243-254. – DOI: 10.18522/2311-3103-2022-3-243-254.
10. *Бирюков В.Н.* Руководство к лабораторным работам по курсу «Основы автоматизированного анализа цепей». – Вып. 3. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 27 с.
11. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: основы теории и алгоритмы решений: учеб. пособие. – М.: Вузовская книга, 2012. – 188 с.
12. *Gear C.W.* Algorithm 407: DIFSUB for Solution of Ordinary Differential Equation // Communications of the ACM. – 1971. – Vol. 14, No. 4. – P. 185-190.
13. *Чуа Л.О. Пен-Мин Л.* Машинный анализ электронных схем: алгоритмы и вычислительные методы: пер. с англ. Е.С. Виленкина и др. / под ред. В.Н. Ильина. – М.: Энергия, 1980. – 640 с.
14. *Pilipenko A.M., Biryukov V.N.* Development and testing of high accuracy hybrid methods for time-domain simulation of electronic circuits and systems // Proceedings of 2017 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs. – 2017. – P. 8110124. – DOI 10.1109/EWDTs.2017.8110124.
15. *Бирюков В.Н., Пилипенко А.М.* Численный анализ жестких узкополосных систем // Радиосистемы. – 2002. – № 2 (62). – С. 36-38.
16. *Пилипенко А.М., Бирюков В.Н.* Гибридные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений жестких и/или колебательных цепей // Радиотехника. – 2011. – № 1. – С. 11-15.
17. *Пилипенко А.М.* Гибридные методы высокого порядка точности для численного анализа во временной области жестких и колебательных цепей // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2017. – № 3 (18). – <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=367> (дата обращения: 24.08.2025).

18. Хайпер Э. Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: пер. со второго англ. изд. Е.Л. Старостина и др. / под ред. С.С. Филиппова. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
19. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
20. Maffezzoni P., Codecasa L., D'Amore D. Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods // IEEE Transactions. Circuits and Systems. – 2007. – Vol. 54, No. 2. – P. 391-400.

#### REFERENCES

1. Engel'khard M., Revenko A. SPICE Differentiation. Razlichiya v realizatsiyakh simulyatorov SPICE [SPICE Differentiation. Differences in SPICE Simulator Implementations], *Komponenty i tekhnologii* [Components and Technologies], 2015, No. 7 (168), pp. 82-88.
2. Prikota A. Programma SimOne. Sovremennye sredstva skhemotekhnicheskogo modelirovaniya [SimOne Program. Modern Means of Circuit Simulation], *Elektronika NTB* [Electronics Science Technology Business], 2011, No. 2, pp. 142-146.
3. Petzold L.R., Jay L.O., Yen J. Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations, *Acta Numerica*, 1997, pp. 437-483.
4. Guglielmi N., Hairer E. Applying Stiff Integrators for Ordinary Differential Equations and Delay Differential Equations to Problems with Distributed Delays, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2025, Vol. 47, No. 1. DOI: 10.1137/24M1632413.
5. Zhuk D.M., Kozhevnikov D.Yu., Manichev V.B. Problemy razrabotki matematicheskogo yadra dlya programm modelirovaniya dinamiki tekhnicheskikh sistem [Problems of developing a mathematical kernel for programs for modeling the dynamics of technical systems], *Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem (MES)* [Problems of developing promising micro- and nanoelectronic systems (MES)], 2020, No. 4, pp. 31-38. DOI: 10.31114/2078-7707-2020-4-31-38.
6. Bernardini A., Maffezzoni P., Sarti A. Linear Multistep Discretization Methods With Variable Step-Size in Nonlinear Wave Digital Structures for Virtual Analog Modeling, *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2019, Vol. 27, No. 11, pp. 1763-1776. DOI: 10.1109/TASLP.2019.2931759.
7. Pilipenko A.M., Biryukov V.N. Issledovanie effektivnosti sovremennykh chislennykh metodov pri analize avtokolebatel'nykh tsepey [Study of the efficiency of modern numerical methods in the analysis of self-oscillating circuits], *Zhurnal radioelektroniki* [Journal of Radio Electronics], 2013, No. 8. Available at: <http://jre.cplire.ru/jre/aug13/9/text.html> (accessed 24 August 2025).
8. Pilipenko A.M., Biryukov V.N. Otsenka tochnosti chislennogo analiza relaksatsionnogo generatora [Estimation of the accuracy of numerical analysis of a relaxation oscillator], *Zhurnal radioelektroniki* [Zhurnal Radioelektroniki], 2013, No. 11, pp. 7. Available at: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/6/text.html> (accessed 24 August 2025).
9. Pilipenko A.M., Agabekyan A.V. Model' avtokolebatel'noy tsepi dlya testirovaniya metodov chislennogo analiza perekhodnykh protsessov v SPICE-simulyatorakh [Model of a self-oscillating circuit for testing methods of numerical analysis of transient processes in SPICE simulators], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2022, No. 3 (227), pp. 243-254. DOI: 10.18522/2311-3103-2022-3-243-254.
10. Biryukov V.N. Rukovodstvo k laboratornym rabotam po kursu «Osnovy avtomatizirovannogo analiza tsepey» [Laboratory Manual for the Course "Fundamentals of automated circuit analysis"], Issue 3. Taganrog: Izd-vo TRTU, 2001, 27 p.
11. Panteleev A.V., Yakimova A.S., Bosov A.V. Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya: osnovy teorii i algoritmy resheniy: ucheb. posobie [Ordinary differential equations: fundamentals of theory and solution algorithms: textbook]. Moscow: Vuzovskaya kniga, 2012, 188 p.
12. Gear C.W. Algorithm 407: DIFSUB for Solution of Ordinary Differential Equation, *Communications of the ACM*, 1971, Vol. 14, No. 4, p. 185-190.
13. Chua L.O., Pen-Min L. Mashinnyy analiz elektronnykh skhem: algoritmy i vychislitel'nye metody [Machine analysis of electronic circuits: algorithms and computational methods]: transl. from Engl. by E.S. Vilenkina i dr., ed. by V.N. Il'ina. Moscow: Energiya, 1980, 640 p.
14. Pilipenko A.M., Biryukov V.N. Development and testing of high accuracy hybrid methods for time-domain simulation of electronic circuits and systems, *Proceedings of 2017 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTS*, 2017, pp. 8110124. DOI 10.1109/EWDTS.2017.8110124.
15. Biryukov V.N., Pilipenko A.M. Chislennyy analiz zhestkikh uzkopolosnykh sistem [Numerical analysis of rigid narrowband systems], *Radiosistemy* [Radio Systems], 2002, No. 2 (62), pp. 36-38.

16. Pilipenko A.M., Biryukov V.N. Gibridnye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy zhestkikh i/ili kolebatel'nykh tsepey [Hybrid methods for solving ordinary differential equations of rigid and/or oscillatory circuits], *Radiotekhnika* [Radio Engineering], 2011, No. 1, pp. 11-15.
17. Pilipenko A.M. Gibridnye metody vysokogo poriyadka tochnosti dlya chislennogo analiza vo vremennoy oblasti zhestkikh i kolebatel'nykh tsepey [Hybrid methods of high order of accuracy for numerical analysis in the time domain of rigid and oscillatory circuits], *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, Optimization and Information Technology], 2017, No. 3 (18). Available at: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=367> (accessed 24 August 2025).
18. Khayrer E., Vanner G. Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy: Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi [Solution of ordinary differential equations: Stiff and differential-algebraic problems], transl. from the second Engl. ed. by E.L. Starostina i dr., ed. by S.S. Filippova. Moscow: Mir, 1999, 685 p.
19. Rakitskiy Yu.V., Ustinov S.M., Chernorutskiy I.G. Chislennyye metody resheniya zhestkikh system [Numerical methods for solving stiff systems]. Moscow: Nauka, 1979, 208 p.
20. Maffezzoni P., Codecasa L., D'Amore D. Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods, *IEEE Transactions. Circuits and Systems*, 2007, Vol. 54, No. 2, pp. 391-400.

**Пилипенко Александр Михайлович** – Южный федеральный университет; e-mail: ampilipenko@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +78634371632; кафедра теоретических основ радиотехники; зав. кафедрой; к.т.н.; доцент.

**Pilipenko Alexandr Mikhailovich** – Southern Federal University; e-mail: ampilipenko@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371632; the Department of Fundamentals of Radio Engineering; head of the department; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 004.89 + 004.042

DOI 10.18522/2311-3103-2026-1-122-147

**В.В. Гапочка, Е.Е. Полупанова**

### **ОБЗОР ТЕХНОЛОГИЙ СЕМАНТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИНТЕГРАЦИИ ГЕТЕРОГЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ В СИСТЕМАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

*Современные системы поддержки принятия решений (СППР) работают с потоками данных из IoT-сенсоров, баз данных, текстовых сообщений и социальных медиа, представленных в различных форматах и обладающих неодинаковыми смысловыми моделями и качеством. Отсутствие семантически согласованной интеграции приводит к неоднозначной интерпретации сущностей, дублированию и потере контекста, что снижает качество и оперативность решений. Цель работы – систематизировать методы семантического анализа и интеграции гетерогенных информационных потоков для СППР, выявить их преимущества, ограничения и области применения. Исследование выполнено в форме аналитического обзора публикаций 2018–2025 гг. по семантической интероперабельности, онтологиям и знаниевым графам, многоисточниковому слиянию данных, федеративному доступу и потоковой обработке. Показано, что обеспечение семантической совместимости достигается за счёт онтологий и знаниевых графов, задающих общие сущности и идентификаторы и обеспечивающих гибкость схемы интеграции. Для режимов реального времени наиболее результативны гибридные решения, сочетающие семантический слой с алгоритмами слияния и учётом доверия к источникам; в прикладных кейсах отмечаются улучшения точности порядка 15–20% и сокращение времени отклика до 70–80% при использовании многоисточниковых моделей. Для неструктурированных потоков ключевую роль играют NLP и машинное обучение, обеспечивающие извлечение сущностей и отношений и семантическое обогащение данных. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании СППР в доменах умного города, промышленности и здравоохранения. Кроме того, работа подчеркивает важность стандартов, таких как SHACL для валидации и SPARQL для запросов, которые усиливают практическую применимость семантических подходов. Перспективы включают автоматизацию ontology alignment для снижения трудозатрат и интеграцию с ИИ для динамической адаптации к новым источникам данных.*

*Семантическая интеграция данных; гетерогенные информационные потоки; система поддержки принятия решений; онтология; знаниевый граф; семантическая интероперабельность; слияние данных; федерация данных; обработка потоков; интернет вещей.*