

Гушанский Сергей Михайлович – Южный федеральный университет; e-mail: smgushanskiy@sfnedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 88634371656; кафедра вычислительной техники; к.т.н.; доцент.

Потапов Виктор Сергеевич – e-mail: vpotapov@sfnedu.ru;.: 88634371656; кафедра вычислительной техники; ассистент.

Gushanskiy Sergey Mikhailovich – Southern Federal University; e-mail: smgushanskiy@sfnedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371656; the department of computer engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.

Potapov Victor Sergeevich – e-mail: vpotapov@sfnedu.ru; phone: +78634371656; the department of computer engineering; assistant.

УДК 517.444

DOI 10.18522/2311-3103-2023-6-57-66

Е.Ю. Кисловский, А.В. Шандыбин, В.Н. Таран

ПРОЕКЦИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ В ПОЛИНОМЫ ВОЛЬТЕРРА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Данная статья касается проблем моделирования нелинейных систем с памятью. Целью работы является преобразование в операторный вид нелинейного дифференциального уравнения Риккати. Приводится краткий обзор подходов в моделировании нелинейных динамических систем. Используя модель в виде функционального ряда Вольтерра, в работе решаются задачи проецирования исходного уравнения в дифференциальные уравнения с ядрами Вольтерра и решения полученных уравнений. Приведено краткое описание метода проецирования в гиперпространство с применением функциональной производной Фреше. Показано, что результат проецирования есть дифференциальные уравнения с решениями в виде ядер Вольтерра. Линейное ядро есть решение обыкновенного дифференциального уравнения, а ядра выше первого порядка находятся путем решения дифференциальных уравнений в частных производных по переменным временной области. В работе рассматривается модель только с первыми двумя ядрами ряда. Особое внимание уделяется уравнению с билинейным ядром. Его поиск аналитическими методами более сложен относительно уравнения с линейным ядром, ввиду чего, в работе предпринята попытка расчета численным методом. Дано подробное описание разработанного алгоритма расчета билинейного ядра методом конечных элементов. Применяя данный метод, общая операторная модель будет иметь полуаналитическую структуру в виде суммы сверток с аналитическим линейным ядром и конечно-элементным билинейным ядром. Разработана операторная модель для слабо нелинейной системы. Для верификации данной модели проведено имитационное моделирование. Вычислительный эксперимент заключался в получении переходной характеристики на типовой сигнал управления в виде функции Хевисайда. Используя дискретный аналог операции свертки, были рассчитаны отклики линеаризованной и предложенной операторной модели. Полученные переходные характеристики сравнивались с эталонным решением, в качестве которого было принято решение исходного нелинейного уравнения методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Показано, что разработанная операторная модель дает отклик ближе к эталонному, что подтверждается результатами расчетов соответствующих невязок.

Дифференциальное уравнение Риккати; ряд Вольтерра; функциональная производная Фреше; метод конечных элементов; имитационное моделирование.

E.Yu. Kislovskiy, A.V. Shandybin, V.N. Taran

PROJECTION OF THE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION RICCATI INTO VOLTERRA POLYNOMIALS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

This paper concerns the problems of modeling nonlinear causal systems. The aim of the paper is to transform the nonlinear Riccati differential equation into operator form. The brief review of approaches to modeling nonlinear dynamic systems is provided. Problems of projection the original equation into differential equations with Volterra kernels and solving the resulting equations are solved for Volterra series model. A short description of the method of projection into hyperspace using the Frechet functional derivative is given. The result of projection is differential equations with solutions in the form of Volterra kernels is shown. The linear kernel is a solution to an ordinary differential equation, and kernels higher than first order are found by solving partial differential equations with respect to time domain variables. The model with only the first two kernels of the series is considered. Attention is paid to the equation with a bilinear kernel. Search of such kernel by analytical methods is more complicated compared to the equation with a linear kernel, which is why this work attempts to calculate it using a numerical method. The detailed description of the developed algorithm for calculating the bilinear kernel using the finite element method is given. Using this method, the general operator model will the semi-analytic structure in the form of a sum of convolutions with the analytical linear kernel and the finite element bilinear kernel. An operator model for the weakly nonlinear system has been developed. The simulation modeling was done for verify the operator model. The computational experiment consisted of obtaining the transient response by test signal in the form of the Heaviside function. The responses of the linearized and proposed operator model were calculated using discrete convolution. The obtained characteristics were compared with the fourth-order Runge-Kutta solution as a reference solution of the basic equation. The developed operator model gives a response closer to the reference response, which is confirmed by the results of residual calculations.

Riccati differential equation; Volterra series; functional derivative Frechet; finite element method; simulation modeling.

Введение. В центре внимания данной работы нелинейная модель в виде дифференциального уравнения Риккати. Неоднородная форма такого уравнения представляет собой функционал, который может отражать динамику ряда технических систем [1–3]. Представляя эту модель подсистемой в составе более сложных систем, возникает задача приведения такой модели в операторный вид (в широком смысле). Данная задача решается либо путем линеаризации исходной модели с последовательным включением блоков статической нелинейности [4–6], либо разложением в функциональный ряд Вольтерра [1, 7–9], где весовые функции включаются параллельно. Учитывая аналитический характер нелинейности в исследуемом уравнении, второй подход более интересен, поскольку позволяет выявить связь нелинейности с параметрами системы.

Уравнение Риккати достаточно часто используется как иллюстративный пример, в том числе и в отработке методов идентификации и параметризации ядер Вольтерра [1, 3, 10–14]. Согласно методам [11, 13] ядра можно выразить подстановкой ряда в исходный функционал как выход системы и продифференцировать по аргументу функционала. Результатом таких преобразований будут дифференциальные уравнения с ядрами Вольтерра в качестве решений. Показанные решения хорошо согласуются с Фурье образами, полученными с использованием метода испытательных сигналов [1]. Такой результат можно считать приемлемым для ретроспективного использования модели, однако для оперативных приложений необходимы функции времени. Вне зависимости от того, получены ли дифференциальные уравнения или передаточные функции, поиск решений в виде аналитических функций времени для ядер выше первого порядка может оказаться весьма

сложным. В рамках данной работы предпринята попытка получить билинейное ядро, характеризующее систему, заданную дифференциальным уравнением Риккати с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Постановка задачи. Пусть функционал $F[x(t)]$ определяющий динамику системы задан дифференциальным уравнением вида:

$$T \frac{dy}{dt} = x(t) - My(t) - Ny(t)^2, \quad (1)$$

где $y(t)$ – выход системы, $x(t)$ – вход системы, T , M и N – некоторые параметры, характеризующие систему. В соответствии с поставленной целью необходимо преобразовать модель (1) в ряд интегралов сверток с весовыми функциями h_1, \dots, h_k :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t h_1(t - \tau_1)x(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t h_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k)x(\tau_1)\dots x(\tau_k)d\tau_1 \dots d\tau_k. \quad (2)$$

Руководствуясь представлениями о ряде Вольтерра как о функциональном аналоге ряда Тейлора [13, 15], справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned} y_0 + \int_0^t h_1(t - \tau_1)x(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t h_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k)x(\tau_1)\dots x(\tau_k)d\tau_1 \dots d\tau_k \equiv \\ \equiv y_0 + \frac{\delta[F[x(t)]]}{\delta x(\tau)} + \sum_{k=2}^n \frac{\delta^k F[x(t)]^{(k)}}{k! \delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2) \dots \delta x(\tau_k)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где через δ обозначен сильный дифференциал.

Условимся считать, что система причинна и стационарна. Учитывая наибольшее влияние в выходе системы сверток с одинарным и двойным интегралом, ограничимся рассмотрением лишь линейного и билинейного ядер. Для поиска этих ядер из тождества (3) используются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x(\tau)} \int_0^t h_1(t - \tau)x(\tau)d\tau \Big|_{x=0} &= \frac{\delta F[y(t)]}{\delta x(\tau)} \Big|_{x=0}, \\ \frac{\delta}{\delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2)} \int_0^t \int_0^t h_2(t - \tau_1, t - \tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \Big|_{x=0} &= \frac{1}{2!} \frac{\delta F[y(t)]}{\delta x(\tau_1) \delta x(\tau_2)} \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Однократное дифференцирование по Фреше результата подстановки (2) в (1) есть дифференциальное уравнение с решением в виде линейного ядра:

$$T \frac{dh_1}{dt} = \delta^*(t) - Mh_1(t), \quad (4)$$

где δ^* означает дельта-функцию Дирака. Последующее дифференцирование (4) дает дифференциальное уравнение в частных производных:

$$T \left(\frac{\partial h_2(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial h_2(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right) = -Mh_2(t_1, t_2) - Nh_1(t_2)h_1(t_1). \quad (5)$$

Более подробно алгоритм получения (4) и (5) описан в [16]. Выражения (4), (5) можно получить методом испытательных сигналов. Так, в [1] для нелинейной электронной системы, модель которой также задана (1), получены частотные характеристики:

$$H_1(f) = \frac{1}{j2\pi fT + M},$$

$$H_2(f_1, f_2) = -\frac{NH_1(f_1)H_1(f_2)}{(j2\pi T(f_1 + f_2) + M)}.$$

Если ввести частотно-зависимые переменные p в (4) и (5), получим аналогичные передаточные функции:

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + M}, \quad (6)$$

$$W_2(p_1, p_2) = -\frac{NW_1(p_1)W_1(p_2)}{(Tp_1 + Tp_2 + M)}. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что (6) и (7) являются изображениями решений (4) и (5). Учитывая накопленный опыт в области анализа и синтеза систем управления, поиск оригинала для линейного ядра (6) несложен, чего нельзя сказать про билинейное ядро. Так, в (7) наличие символьных параметров может существенно усложнить использование известных табличных значений [17, 18] для обратного преобразования Лапласа. Более простой и универсальный способ расчета ядер во временной области заключается в поиске их численных аналогов. Таким образом, основная задача заключается в решении дифференциального уравнения (5) с использованием МКЭ.

Алгоритм расчета конечно-элементного ядра. Пусть область определения h_2 представляет собой квадрат, а в качестве граничных условий первого рода примем $h_2(t_1, t_2) = 0$ при $t_1 < 0$ или $t_2 < 0$, что следует из свойства причинности рассматриваемой системы.

Линейное ядро для (1) представляет собой аperiodическое звено:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{Tp + M}\right) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{Mt}{T}\right).$$

Перепишем (5) используя известное аналитическое решение уравнения (4):

$$T \frac{\partial h_2(t_1, t_2)}{\partial t_1} + T \frac{\partial h_2(t_1, t_2)}{\partial t_2} + Mh_2(t_1, t_2) = -\frac{N}{T^2} \exp\left(-\frac{Mt_1}{T}\right) \exp\left(-\frac{Mt_2}{T}\right). \quad (8)$$

При решении данной задачи с помощью МКЭ воспользуемся прямой формулировкой МКЭ [19]. Аппроксимируем (8) с помощью треугольных элементов, заданных уравнением:

$$h(t_1, t_2) = a + bt_1 + ct_2,$$

где a , b и c – параметры формы элемента. Вид разбиения области определения на элементы представлен на рис. 1.

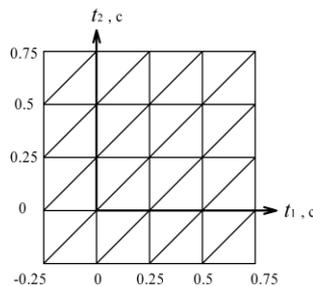


Рис. 1. Сетка конечных элементов

Отметим, что ребра элементов в квадрантах с отрицательными значениями t_1 или t_2 , допустимо делать меньше, поскольку в последующем расчете отклика системы, данные области использоваться не будут. Далее в записях верхними индексами в скобках будет указываться принадлежность одному из трех узлов рассматриваемого элемента. Положение ребер каждого треугольника задается весами: $h^{(1)}(t_1^{(1)}, t_2^{(1)})$, $h^{(2)}(t_1^{(2)}, t_2^{(2)})$ и $h^{(3)}(t_1^{(3)}, t_2^{(3)})$. Чтобы определить параметры поверхности образованной вершинами элемента составляется система уравнений:

$$\begin{cases} h^{(1)} = a + bt_1^{(1)} + ct_2^{(1)} \\ h^{(2)} = a + bt_1^{(2)} + ct_2^{(2)} \\ h^{(3)} = a + bt_1^{(3)} + ct_2^{(3)} \end{cases}$$

Символьное решение этой системы дает связь параметров формы с неизвестными значениями весовых функций в узлах:

$$\begin{aligned} a(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}) &= \frac{h^{(3)}(t_1^{(1)}t_2^{(2)} - t_1^{(2)}t_2^{(1)}) - h^{(2)}(t_1^{(1)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(1)}) + h^{(1)}(t_1^{(2)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(2)})}{t_1^{(1)}t_2^{(2)} - t_1^{(2)}t_2^{(1)} - t_1^{(1)}t_2^{(3)} + t_1^{(3)}t_2^{(1)} + t_1^{(2)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(2)}}, \\ b(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}) &= \frac{h^{(1)}(t_2^{(2)} - t_2^{(3)}) - h^{(2)}(t_2^{(1)} - t_2^{(3)}) + h^{(3)}(t_2^{(1)} - t_2^{(2)})}{t_1^{(1)}t_2^{(2)} - t_1^{(2)}t_2^{(1)} - t_1^{(1)}t_2^{(3)} + t_1^{(3)}t_2^{(1)} + t_1^{(2)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(2)}}, \\ c(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}) &= \frac{h^{(2)}(t_1^{(1)} - t_1^{(3)}) - h^{(1)}(t_1^{(2)} - t_1^{(3)}) - h^{(3)}(t_1^{(1)} - t_1^{(2)})}{t_1^{(1)}t_2^{(2)} - t_1^{(2)}t_2^{(1)} - t_1^{(1)}t_2^{(3)} + t_1^{(3)}t_2^{(1)} + t_1^{(2)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(2)}}. \end{aligned}$$

Теперь можно переписать приближенную функцию в виде:

$$h(t_1, t_2) = a(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}) + b(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)})t_1 + c(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)})t_2. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (8) как аналог h_2 и расчет частных производных даст следующий результат:

$$\begin{aligned} T(b(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}) + c(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)})) + M(a(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}) + b(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)})t_1 + \\ + c(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)})t_2) = -\frac{N}{T^2} \exp\left(-\frac{Mt_1}{T}\right) \exp\left(-\frac{Mt_2}{T}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Последовательная подстановка пар координат каждого из узлов треугольника в качестве переменных t_1 и t_2 в (10) позволяет сформировать систему линейных уравнений:

$$\sum_{m=1}^3 S_{nm}(t_1^{(n)}, t_2^{(n)})h^{(m)} = -\frac{N}{T^2} \exp\left(-\frac{Mt_1^{(n)}}{T}\right) \exp\left(-\frac{Mt_2^{(n)}}{T}\right), \quad n = 1, 2, 3. \quad (11)$$

В данной системе S_{nm} – есть множитель, образованный парами констант времени m и парами переменных времени n при неизвестных значениях узлов $h^{(m)}$. Данные множители используются для формирования локальной матрицы Дирихле:

$$[S_l] = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix},$$

Чтобы избежать слишком громоздкой записи приведем лишь первые два множителя этой матрицы:

$$S_{11} = \frac{(t_2^{(2)} - t_2^{(3)})(T + t_1^{(1)}) - (t_1^{(2)} - t_1^{(3)})(T + t_2^{(1)}) + (t_1^{(2)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(2)})}{t_1^{(1)}t_2^{(2)} - t_1^{(2)}t_2^{(1)} - t_1^{(1)}t_2^{(3)} + t_1^{(3)}t_2^{(1)} + t_1^{(2)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(2)}},$$

$$S_{12} = \frac{-(t_2^{(1)} - t_2^{(3)})(T + t_1^{(1)}) + (t_1^{(1)} - t_1^{(3)})(T + t_2^{(1)}) - (t_1^{(1)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(1)})}{t_1^{(1)}t_2^{(2)} - t_1^{(2)}t_2^{(1)} - t_1^{(1)}t_2^{(3)} + t_1^{(3)}t_2^{(1)} + t_1^{(2)}t_2^{(3)} - t_1^{(3)}t_2^{(2)}}.$$

Для формирования глобальной матрицы Дирихле используются дополнительные линейные формы:

$$[S] = [C]^T [S_d] [C],$$

где $[C]$ – матрица связи узлов, а $[S_d]$ – разреженная глобальная матрица по главной диагонали, которой находятся локальные матрицы $[S_l]$ каждого элемента расчетной сетки. Формирование матрицы $[C]$ осуществляется аналогично примерам, описанным в [20]. Матричное уравнение с глобальной матрицей будет иметь вид:

$$[S]\{h\} = \{r\}, \tag{12}$$

где $\{r\}$ – вектор, образованный правой частью (10) с соответствующими переменными времени, $\{h\}$ – вектор значений весовой функции в узлах сетки. Введенные отрицательные моменты в расчетной сетке имеют "технологический" характер и необходимы для учета граничных условий, вследствие чего требуется корректировка (11). Это выражается в переносе в правую часть произведений с известными элементами вектора $\{h\}$. В матричной форме решение задачи можно представить следующим образом:

$$\{h_f\} = [S_{ff}]^{-1} (\{r_f\} - \{S_{fs}\}\{h_s\}). \tag{13}$$

В (13) линейные формы получены перегруппировкой элементов в $[S]$ и $\{h\}$ из уравнения (12). Индексом f обозначена принадлежность к неизвестным значениям h , при этом данные элементы в перестроенных матричных объектах записываются первыми. Элементы, связанные с известными узлами отмечены индексом s и записываются последними.

Для расчета весовых функций примем параметрами системы следующие значения: $T=0.3$, $N=0.1$ и $M=1$. Интерполяция значений h_2 между узлами выполняется с использованием (9) и проверки принадлежности к определенному элементу расчетной сетки. Вид билинейного ядра с интерполяцией представлен на рис. 2.

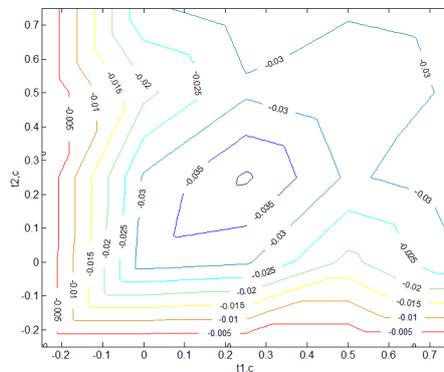


Рис. 2. Вид конечно-элементного билинейного ядра

Верификация решения. Для верификации модели выполним имитационное моделирование, в условиях которого модель системы будет возбуждаться сигналом $x(t)$ в виде функции Хевисайда. Расчет вектора выхода системы, получим с помощью дискретных аналогов свертки:

$$y_j = \sum_{i=0}^j h_{1j-i} x_i \Delta_t + \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^k h_{2j-k;j-l} x_k x_l \Delta_{t_1} \Delta_{t_2},$$

где Δ_t есть величина шага интегрирования. Ограничим область определения неотрицательными переменными времени расчетной сетки.

Погрешность модели будем рассчитывать относительно численного решения (1) методом Рунге-Кутты четвертого порядка используя метрику:

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{B_i - A_i}{B_i} \right)^2}, \quad (14)$$

где A – значение выхода верифицируемой модели, B – значение выхода эталонной модели (метод Рунге-Кутты), n – длина выходного вектора. Поскольку в прикладных задачах модель со слабо выраженной нелинейностью была бы линеаризована, уместно будет сравнить выход суммы двух свертки с выходом линеаризованной модели. Отклик линеаризованной модели был рассчитан с помощью дискретной свертки вектора входа с вектором значений решения (4).

На рис. 3 штриховой линией показан выход линеаризованной модели, пунктирной линией показан выход модели в виде суммы линейного и билинейного ядер, сплошная линия показывает результат расчета методом Рунге-Кутты.

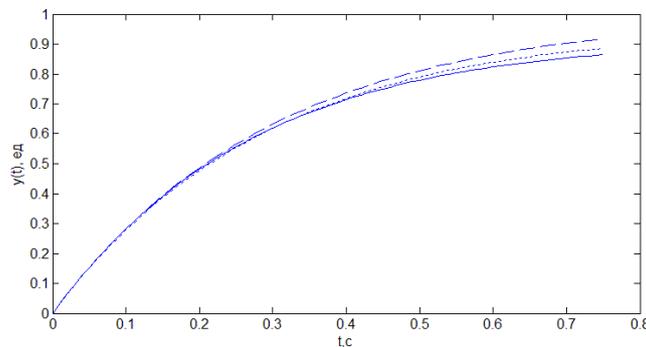


Рис. 3. Вид выходных функций

Из графика видно, что модель в виде суммы ядер дает отклик ближе к эталонному. Ошибка по метрике (14) для линеаризованной модели составляет 0.035, а для структуры с двумя ядрами 0.014.

Заключение. Дано краткое описание метода проецирования моделей динамических систем в гиперпространство. Показаны результаты проецирования исходного уравнения Риккати в дифференциальные уравнения с линейным и билинейным ядрами Вольтерра. Приведен подробный алгоритм решения методом конечных элементов уравнения с билинейным ядром характерным для системы с сосредоточенными параметрами. На основе линейного и билинейного ядер разработана полуаналитическая модель. Выполнено имитационное моделирование, по результатам которого рассчитаны невязки относительно эталонного решения исходного уравнения методом Рунге-Кутты. Показано, что невязка отклика разрабо-

танной операторной модели в 2.5 раза меньше аналогичной невязки линеаризованной модели. Отметим также, что полученное значение ошибки может быть уменьшено либо путями типичными для МКЭ, что заключается в выборе иных функций элементов, в уменьшении ребер элементов и увеличении общего числа элементов в сетке, либо путем усложняющим общую операторную модель ядрами более высоких порядков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bussgang J.J., Ehrman L., Graham J.W.* Analysis of Nonlinear Systems with Multiple Inputs // *Proceedings of IEEE*. – 1974. – Vol. 62, Issue 8. – P. 1088-1119. – URL: doi.org/10.1109/PROC.1974.9572.
2. *Соколов С.В., Погорелов В.А.* Стохастическая оценка, управление и идентификация в высокоточных навигационных системах. – М.: Физматлит, 2016. – 264 с.
3. *Wang Y., Han J., Zhou W.* Third-order Volterra kernel identification technique in aerodynamics // *Applied Mechanics and Materials*. – 2011. – Vol. 52-54. – P. 618-623. – URL: www.scientific.net/AMM.52-54.618.
4. *Ярцев А.В.* Об управлении угловым отклонением рамок электромеханической системы посредством ПД-регулятора // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2015. – № 4. – С. 139-149.
5. *Cerone V., Razza V., Regruto D.* One-shot set-membership identification of Wiener models with polynomial nonlinearities // *IFAC-PapersOnLine*. – 2015. – Vol. 48. – P. 957-962.
6. *Dreesen P., Shteva M.* Parameter estimation of parallel Wiener-Hammerstein systems by decoupling their Volterra representations // *IFAC-PapersOnLine*. – 2021. – Vol. 54. – P. 457-462.
7. *Апарцин А.С., Солодуша С.В.* Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра // *Автоматика и телемеханика*. – 2004. – № 3. – С. 116-124.
8. *Солодуша С.В.* К задаче моделирования динамики теплообменников квадратичными полиномами Вольтерра // *Автоматика и телемеханика*. – 2014. – № 1. – С. 105-114.
9. *Orcioni S.* Improving the approximation ability of Volterra series identified with a cross-correlation method // *Nonlinear Dynamics*. – 2014. – Vol. 78. – P. 2861-2869.
10. *Wang Y., Han j., Zhang T.* Computation of Volterra Kernels' Identification to Riccati Nonlinear Equation // *2010 3rd International Conference on Computer Science and Information Technology, Chengdu, 2010*. – P. 6-8. – URL: doi.org/10.1109/ICCSIT.2010.5563585.
11. *Таран В.Н., Кисловский Е.Ю.* Функциональный метод параметризации модели Вольтерра-Винера // *Инженерный вестник Дона*. – 2021. – № 6. – URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2021/7049.
12. *Hassouna S., Coirault P., Poinot T.* Non-linear System Identification Using Volterra Series Expansion // *IFAC Proceedings Volumes*. – 2000. – Vol. 33, Issue 15. – P. 947-952.
13. *Flake R.H.* Volterra Series Representation of Time-varying Non-linear Systems // *IFAC Proceedings Volumes*. – 1963. – Vol. 1. – P. 91-99.
14. *Таран А.Н., Таран В.Н.* Использование сплайновых рядов Вольтерра-Винера при анализе электрических цепей // *Радиотехника и электроника*. – 2014. – Т. 59, № 7. – С. 702-710.
15. *Бобрешов А.М., Мымрикова Н.Н.* Проблемы анализа сильно нелинейных режимов электронных устройств на основе рядов Вольтерры // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. – 2013. – № 2. – С. 15-25.
16. *Kislovskiy E., Taran V., Taran A.* Parameterization of kernels of the Volterra series for systems given by nonlinear differential equations // *International Scientific Conference "Fundamental and Applied Scientific Research in the Development of Agriculture in the Far East" (AFE-2022)*. Tashkent, Uzbekistan. – 2023. – P. 1-8. – URL: doi.org/10.1051/e3sconf/202337102045.
17. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М.: Физматгиз, 1958. – 178 с.
18. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.
19. *Секулович М.* Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
20. *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров инженеро-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229 с.

REFERENCE

1. *Bussgang J.J., Ehrman L., Graham J.W.* Analysis of Nonlinear Systems with Multiple Inputs, *Proceedings of IEEE*, 1974, Vol. 62, Issue 8, pp. 1088-1119. Available at: doi.org/10.1109/PROC.1974.9572.
2. *Sokolov S.V., Pogorelov V.A.* Stokhasticheskaya otsenka, upravlenie i identifikatsiya v vysokotochnykh navigacionnykh sistemakh [Stochastic estimation, control and identification in high-precision navigation systems]. Moscow: Fizmatlit, 2016, 264 p.
3. *Wang Y., Han J., Zhou W.* Third-order Volterra kernel identification technique in aerodynamics, *Applied Mechanics and Materials*, 2011, Vol. 52-54, pp. 618-623. Available at: www.scientific.net/AMM.52-54.618.
4. *Yartcev A.V.* Ob upravlenii uglovym otkloneniem ramok elektromekhanicheskoy sistemy posredstvom PD-regulyatora [On controlling the angular deviation of the electromechanical system frames using a PD controller], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 4, pp. 139-149.
5. *Cerone V., Razza V., Regruto D.* One-shot set-membership identification of Wiener models with polynomial nonlinearities, *IFAC-PapersOnLine*, 2015, Vol. 48, pp. 957-962.
6. *Dreesen P., Ishteva M.* Parameter estimation of parallel Wiener-Hammerstein systems by decoupling their Volterra representations, *IFAC-PapersOnLine*, 2021, Vol. 54, pp. 457-462.
7. *Apartcin A.S., Solodusha S.V.* Ob optimizatsii amplitud testovykh signalov pri identifikatsii yader Vol'terra [On optimization of test signal amplitudes when identifying Volterra kernels], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2004, No. 3, pp. 116-124.
8. *Solodusha S.V.* K zadache modelirovaniya dinamiki teploobmennikov kvadratichnymi polinomami Vol'terra [On the problem of modeling the dynamics of heat exchangers using quadratic Volterra polynomials], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2014, No. 1, pp. 105-114.
9. *Orcioni S.* Improving the approximation ability of Volterra series identified with a cross-correlation method, *Nonlinear Dynamics*, 2014, Vol. 78, pp. 2861-2869.
10. *Wang Y., Han j., Zhang T.* Computation of Volterra Kernels' Identification to Riccati Nonlinear Equation, *2010 3rd International Conference on Computer Science and Information Technology, Chengdu*, 2010, pp. 6-8. Available at: doi.org/10.1109/ICCSIT.2010.5563585.
11. *Taran V.N., Kislovskiy E.Yu.* Funktsional'nyy metod parametrizatsii modeli Vol'terra-Vinera [Functional method for parametrization Volterra-Wiener model], *Inzhenernyy vestnik Dona* [Engineering Journal of Don], 2021, No. 6. Available at: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2021/7049.
12. *Hassouna S., Coirault P., Poinot T.* Non-linear System Identification Using Volterra Series Expansion, *IFAC Proceedings Volumes*, 2000, Vol. 33, Issue 15, pp. 947-952.
13. *Flake R.H.* Volterra Series Representation of Time-varying Non-linear Systems, *IFAC Proceedings Volumes*, 1963, Vol. 1, pp. 91-99.
14. *Taran A.N., Taran V.N.* Ispol'zovanie splaynovykh ryadov Vol'terra-Vinera pri analize elektricheskikh tsepey [Using Volterra-Wiener spline series in the analysis of electrical circuits], *Radiotekhnika i elektronika* [Radio Engineering and Electronics], 2014, Vol. 59, No. 7, pp. 702-710.
15. *Bobreshov A.M., Mymrikova N.N.* Problemy analiza sil'no nelineynykh rezhimov elektronnykh ustroystv na osnove ryadov Vol'terry [Problems of analysis of highly nonlinear modes of electronic devices based on Volterra series], *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2013, No. 2, pp. 15-25.
16. *Kislovskiy E., Taran V., Taran A.* Parameterization of kernels of the Volterra series for systems given by nonlinear differential equations, *International Scientific Conference "Fundamental and Applied Scientific Research in the Development of Agriculture in the Far East" (AFE-2022). Tashkent, Uzbekistan*, 2023, pp. 1-8. Available at: doi.org/10.1051/e3sconf/202337102045.
17. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Operatsionnoe ischislenie po dvum peremennym i ego prilozheniya [Operational calculus in two variables and its applications]. Moscow: Fizmatgiz, 1958, 178 p.

18. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Operatsionnoe ischislenie [Operational calculus]. Moscow: Vysshaya shkola, 1975, 407 p.
19. *Sekulovich M.* Metod konechnykh elementov [Finite element method]. Moscow: Stroyizdat, 1993, 664 p.
20. *Sil'vester P., Ferrari R.* Metod konechnykh elementov dlya radioinzhenerov inzhenerov-elektrikov [Finite element method for radio engineers and electrical engineers]. Moscow: Mir, 1986, 229 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. Ю.А. Кравченко.

Кисловский Евгений Юрьевич – Донской государственный технический университет; e-mail: kislovskiy@bk.ru; г. Ростов-на-Дону, Россия; тел.: 89011063394; соискатель.

Шандыбин Алексей Викторович – Ростовский государственный университет путей сообщения; e-mail: shav850@mail.ru; г. Ростов-на-Дону, Россия; тел.: 88632726251; зав. лабораторией кафедры «Связь на железнодорожном транспорте».

Таран Владимир Николаевич – Донской государственный технический университет; Ростовский государственный университет путей сообщения; e-mail: vladitaran@rambler.ru; г. Ростов-на-Дону, Россия; тел.: 89034067621; профессор.

Kislovskiy Evgeniy Yurievich – Don State Technical University; e-mail: kislovskiy@bk.ru; Rostov-on-Don, Russia; phone: +79011063394; postgraduate.

Shandybin Aleksey Viktorovich – Rostov State Transport University; e-mail: shav850@mail.ru; Rostov-on-Don, Russia; phone: +78632726251; head of the laboratory of the department «Communication on the railway transport».

Taran Vladimir Nikolayevich – Don State Technical University; Rostov State Transport University; e-mail: vladitaran@rambler.ru; Rostov-on-Don, Russia; phone: +79034067621; professor.

УДК 517.524

DOI 10.18522/2311-3103-2023-6-66-76

Н.С. Кривша, В.В. Кривша, С.А. Бутенков

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГИБРИДНЫЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

Предлагается новый подход к организации вычислительных структур слоев и межслойных связей при построении искусственных нейронных сетей для решения широкого круга задач обработки многомерных данных. Основной проблемой построения сетей глубокого обучения является необходимость введения большого количества параметров обучения сети. Имеющиеся рабочие экземпляры таких сетей содержат миллиарды параметров, что позволяет достигать высокой эффективности применения таких сетей. Обратной стороной такой широко используемой структуры сетей в виде многослойных сверточных структур являются высокие затраты на обучение сетей с большим количеством структурно схожих слоев свертки методом обратного распространения. Решение проблемы повышения эффективности таких многослойных структур может быть найдено в применении гибридных слоев, реализующих операции гранулирования данных, которые были развиты в наших работах. В новых гибридных моделях вместо векторных значений параметров обучения используются матричные информационные элементы, позволяющие кодировать подмножества значений данных (информационные гранулы) вместо кодирования отдельных точек данных, как в классических сверточных сетях. Предложенные гибридные слои обучаются без учителя и допускают параллельную реализацию алгоритмов обучения, что принципиально отличается от последовательных алгоритмов обратного распространения. В результате вычислительная эффективность применения подобных гибридных