

22. Vityazev V.V., Kolod'ko G.N., Vityazev S.V. Sposoby i algoritmy formirovaniya radiolokatsionnogo izobrazheniya v rezhime doplerovskogo obuzheniya lucha [Methods and algorithms for forming a radar image in the Doppler beam narrowing mode], *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], 2006, No. 3.
23. Kuznetsov E.P. Metody i algoritmy adaptivnoy ekho-kompensatsii: sravnitel'nyy analiz effektivnosti primeneniya [Methods and algorithms for adaptive echo compensation: comparative analysis of application effectiveness], *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], 2007.
24. Uidrou B., Stirnz S. Adaptivnaya obrabotka signalov [Adaptive signal processing]. Moscow: Radio i svyaz', 1989.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.В. Боженюк.

Гужва Дмитрий Александрович – Южный федеральный университет; e-mail: aleksandrovich777@inbox.com; г. Таганрог, Россия; тел.: 89054571975; кафедра теоретических основ радиотехники; аспирант.

Север Константин Олегович – e-mail: remales@mail.ru; тел.: 89885467923; кафедра теоретических основ радиотехники; аспирант.

Турулин Игорь Ильич – e-mail: iiturulin@sfedu.ru; тел.: 88634371638; кафедра теоретических основ радиотехники; д.т.н.; профессор.

Guzhva Dmitry Alexandrovich – Southern Federal University; e-mail: aleksandrovich777@inbox.com; Taganrog, Russia; phone: +79054571975; the department of the theoretical foundations of radio engineering; post-graduate student.

Sever Konstantin Olegovich – e-mail: remales@mail.ru; phone: +79885467923; the department of theoretical foundations of radio engineering; post-graduate student.

Turulin Igor Ilyich – e-mail: iiturulin@sfedu.ru; phone: +78634371638; the department of theoretical foundations of radio engineering; dr. of eng. sc.; professor.

УДК 004.032

DOI 10.18522/2311-3103-2023-6-44-57

С.М. Гушанский, В.С. Потапов

ХАРАКТЕРИСТИКА КВАНТОВЫХ СХЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ КОНФИГУРАЦИЯМИ КУБИТОВ

Статья представляет собой исследование нового подхода к систематическому анализу и классификации квантовых схем на основе функциональной конфигурации кубитов. Статья подробно рассматривает роль элементарных вентилей в изменении элементов вектора состояния и выделяет важность функциональных конфигураций кубитов в коллективной модификации квантовых состояний. Основные аспекты, рассмотренные в статье, включают характеристику квантовых схем с функциональными конфигурациями кубитов, анализ воздействия элементарных вентилей на состояние квантового вектора и определение количества возможных типов функциональных конфигураций. Результаты исследования могут иметь важное значение для оптимизации квантовых схем и улучшения понимания их общих свойств. Функциональная конфигурация кубита – это математическая структура, которая может коллективно классифицировать свойства и поведение квантовых схем. Разработка квантовых алгоритмов с эффективными квантовыми схемами была центральной частью квантовых вычислений, в которых за последние 30 лет произошёл огромный прогресс как в теоретическом, так и в экспериментальном плане. Статья представляет собой вклад в область квантовых вычислений, предоставляя систематический подход к классификации и анализу квантовых схем на основе их функциональных конфигураций кубитов. Квантовые алгоритмы представляют собой инновационный класс алгоритмов, основанных на принципах квантовой механики, и использующих кубиты вме-

сто классических битов для обработки информации. В отличие от классических алгоритмов, которые оперируют битами, принимающими значения 0 или 1, квантовые алгоритмы могут использовать принципы квантовой суперпозиции и квантового взаимодействия, что позволяет им выполнять множество вычислений одновременно. Одним из ключевых преимуществ квантовых алгоритмов является их способность решать определенные задачи гораздо более эффективно, чем классические алгоритмы. Однако, разработка и реализация квантовых алгоритмов представляют значительные технические и алгоритмические вызовы, такие как управление квантовыми состояниями, минимизация ошибок и создание устойчивых квантовых вентилей. Несмотря на эти сложности, квантовые алгоритмы предоставляют перспективные возможности для революции в области вычислений и решения проблем, которые традиционно были слишком сложными для классических компьютеров.

Моделирование; квантовый алгоритм; кубит; модель квантового компьютера; запутанность; суперпозиция; квантовый оператор.

S.M. Gushanskiy, V.S. Potapov

CHARACTERISTICS OF QUANTUM CIRCUITS WITH FUNCTIONAL CONFIGURATIONS OF QUBITS

The paper is an exploration of a new approach to the systematic analysis and classification of quantum circuits based on the functional configuration of qubits. The article examines in detail the role of elementary gates in changing the elements of the state vector and highlights the importance of functional configurations of qubits in the collective modification of quantum states. The main aspects covered in the article include the characterization of quantum circuits with functional configurations of qubits, analysis of the impact of elementary gates on the state of a quantum vector, and determination of the number of possible types of functional configurations. The results of the study could have important implications for optimizing quantum circuits and improving our understanding of their general properties. A qubit functional configuration is a mathematical structure that can collectively classify the properties and behavior of quantum circuits. The development of quantum algorithms with efficient quantum circuits has been a central part of quantum computing, which has seen enormous progress both theoretically and experimentally over the past 30 years. The paper makes a contribution to the field of quantum computing by providing a systematic approach to classify and analyze quantum circuits based on their functional qubit configurations. Quantum algorithms are an innovative class of algorithms based on the principles of quantum mechanics and using qubits instead of classical bits to process information. Unlike classical algorithms, which operate on bits that take on the values 0 or 1, quantum algorithms can use the principles of quantum superposition and quantum interaction, which allows them to perform many calculations simultaneously. One of the key advantages of quantum algorithms is their ability to solve certain problems much more efficiently than classical algorithms. However, the design and implementation of quantum algorithms pose significant technical and algorithmic challenges, such as managing quantum states, minimizing errors, and creating robust quantum gates. Despite these challenges, quantum algorithms offer promising opportunities to revolutionize computing and solve problems that have traditionally been too complex for classical computers.

Modeling; quantum algorithm; qubit; model of a quantum computer; entanglement; superposition; quantum operator.

Введение. За прошедшие годы было разработано множество квантовых алгоритмов [1], предназначенных для самых разных приложений: они включают алгоритм оценки фазы [2], алгоритм факторизации Шора [3], алгоритм Харроу-Хассидима-Ллойда для линейных систем [4], гибридные классические квантовые алгоритмы, алгоритмы квантового машинного обучения и квантовые алгоритмы для открытой квантовой динамики. Несмотря на успех, разработка эффективных квантовых схем для реализации новых квантовых алгоритмов остается случайным процессом, и систематический подход к пониманию того, как работают квантовые схемы [5], может привести к улучшению существующих алгоритмов и открытию

новых. Чтобы получить решающее преимущество перед классическими алгоритмами, квантовые схемы должны иметь сложность, которая масштабируется полиномиально, а не экспоненциально, с количеством кубитов [6]. Следовательно, проектирование квантовых схем, которые могут продемонстрировать преимущества квантовых вычислений, – это, по сути, процесс описания и идентификации особых случаев с полиномиальным масштабированием из океана общих случаев с экспоненциальным масштабированием [7]. Рассмотрим корреляцию функционала кубита с тем, как элементы вектора состояния [8] коллективно модифицируются квантовыми вентилями. В частности, любую произвольную квантовую схему можно разложить на чередующиеся последовательности однокубитных унитарных вентиляей [9] и вентиляей CNOT. Каждая последовательность CNOT [10] подготавливает текущее квантовое состояние к уровню функциональной конфигурации кубита, чтобы указать правило для следующей последовательности вентиляей с 1 кубитом о том, как коллективно изменять записи вектора состояния. Теория функциональной конфигурации кубита [11], насколько нам известно, является первой в своем роде, которая может охарактеризовать огромное количество квантовых цепей вместе с помощью конечной математики [12].

1. Теория функциональной конфигурации кубита. Вектор квантового состояния n -кубитов [13] можно записать как $|\varphi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i |i\rangle$, где основание состояния

$|i\rangle$ могут быть связаны с битовыми строками (i) с i в двоичной форме [14]. Например, вектор состояния из 3 кубитов имеет 8 базовых состояний, соответствующих 8-битным строкам: (000), (001), (010), ..., (111). Набор всех этих битовых строк можно рассматривать как трехмерное линейное пространство [15] V над двоичным полем $\{0, 1\}$, и любая битовая строка может быть выражена как линейная комбинация трех базисных векторов (100), (010) и (001): $v = q_1, q_2, q_3 = q_1(100) + q_2(010) + q_3(001)$, где коэффициенты q_i принимают значения 0 или 1, а сложение «+» – это побитовое сложение по модулю 2. Теперь по теории линейных векторных пространств двойственное пространство V^* к V формируется линейными функционалами над V : $f(v) = f(q_1, q_2, q_3) = g_1q_1 \oplus g_2q_2 \oplus g_3q_3$. Здесь три базисных функционала [16]: $f(1)(q_1, q_2, q_3) = q_1$, $f(2)(q_1, q_2, q_3) = q_2$, $f(3)(q_1, q_2, q_3) = q_3$, коэффициенты g принимают значения 0 или 1, а « \oplus » – сложение по модулю 2. Мы связали каждый функционал с условием «0», которое задает поднабор строк битов, и изучили пространство квантовых условий, порожденное этими условиями «0». Мы называем эти функционалы «функционалами кубитов» (потому что они являются функционалами от значений кубитов) и фокусируемся на их роли в том, как записи векторов квантового состояния коллективно модифицируются квантовыми вентилями.

2. Роль элементарных вентиляей в изменении элементов вектора состояния. Универсальность квантовых схем говорит о том, что любую унитарную операцию [17] можно разложить на последовательность 1-кубитных унитарных операций и вентиляей CNOT. Рассмотрим произвольное n -кубитное квантовое состоя-

ние $|\varphi_1\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i |i\rangle$ в качестве отправной точки, если применим 1-кубитные унитар-

ные единицы U_k только без вентиляей CNOT, то к каждому кубиту q можно применить не более одного U_k без избыточности. Это потому что все U_k на разных q_k моделируется так, что если, например U_1 уже был применен к q_1 , то любой

дополнительный унитарный V_1 , примененный к q_1 в любой точке после U_1 , будет эквивалентен одному вентилю $W_1 = V_1 U_1$, примененному к q_1 , таким образом, применение более одного вентиля к одному и тому же кубиту является избыточным и может быть сократились до одних вентилях. Далее для анализа состояния фактических эффектов однокубитных унитарных единиц [18], изучаем трехкубитное состояние $|\varphi_1\rangle = \sum_{i=0}^7 a_i |i\rangle$ без ограничения общности:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} \rightarrow U_1 \varphi_1 = \begin{pmatrix} u_1 a_0 + u_2 a_4 \\ u_1 a_1 + u_2 a_5 \\ u_1 a_2 + u_2 a_6 \\ u_1 a_3 + u_2 a_7 \\ u_2 a_0 - u_1 a_4 \\ u_2 a_1 - u_1 a_5 \\ u_2 a_2 - u_1 a_6 \\ u_2 a_3 - u_1 a_7 \end{pmatrix}; \quad U_2 \varphi_1 = \begin{pmatrix} u_1 a_0 + u_2 a_2 \\ u_1 a_1 + u_2 a_3 \\ u_2 a_0 - u_1 a_2 \\ u_2 a_1 - u_1 a_3 \\ u_1 a_4 + u_2 a_6 \\ u_1 a_5 + u_2 a_7 \\ u_2 a_4 - u_1 a_6 \\ u_2 a_5 - u_1 a_7 \end{pmatrix}; \quad U_3 \varphi_1 = \begin{pmatrix} u_1 a_0 + u_2 a_1 \\ u_2 a_0 - u_1 a_1 \\ u_1 a_2 + u_2 a_3 \\ u_2 a_2 - u_1 a_3 \\ u_1 a_4 + u_2 a_5 \\ u_2 a_4 - u_1 a_5 \\ u_1 a_6 + u_2 a_7 \\ u_2 a_6 - u_1 a_7 \end{pmatrix} \quad (1)$$

где 1-кубитный U_k имеет ту же основную форму $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & -u_1 \end{pmatrix}$, применяющуюся к k -му кубиту q_k : т.е. $U_1 = U \otimes I \otimes I$, $U_2 = I \otimes U \otimes I$, $U_3 = I \otimes I \otimes U$ считаются вещественными для более ясных обозначений; это допущение не приводит к потере общности рассуждений и результатов ниже, поскольку по сравнению с использованием комплексных чисел видим, что U_1 соединяет a_0 с a_4 , a_1 с a_5 , a_2 с a_6 и a_3 с a_7 . Когда концентрируемся на одной паре, например a_0 и a_4 , эффект U_1 эквивалентен

$$U \begin{pmatrix} a_0 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 a_0 + u_2 a_4 \\ u_2 a_0 - u_1 a_4 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

поэтому можем сказать, что a_0 играет роль «0» в этом двумерном подпространстве, а a_4 играет роль «1». Теперь видим, что эффект U_1 заключается в разделении общего пространства на четыре двумерных подпространства, а затем изменяем элементы в парах $[(a_0, a_4), (a_1, a_5), (a_2, a_6), (a_3, a_7)]$, где 1-я запись в каждой скобке считается «0», а 2-я запись считается «1». Точно так же эффект U_2 может быть представлен как $[(a_0, a_2), (a_1, a_3), (a_4, a_6), (a_5, a_7)]$, а эффект U_3 может быть представлен как $[(a_0, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5), (a_6, a_7)]$. U_1 , U_2 и U_3 могут применяться одновременно, но они сохраняют отдельные эффекты при рассмотрении отдельных гейтов. Теперь для $U_1 [(a_0, a_4), (a_1, a_5), (a_2, a_6), (a_3, a_7)]$ означает, что разделили все пространство на два полупространства с базисными состояниями с $q_1 = 0$: $\{|000\rangle \sim a_0, |001\rangle \sim a_1, |010\rangle \sim a_2, |011\rangle \sim a_3\}$ против $q_1 = 1$: $\{|100\rangle \sim a_4, |101\rangle \sim a_5, |110\rangle \sim a_6, |111\rangle \sim a_7\}$; затем мы соединяем каждый термин $q_1 = 0$ с уникальным термином $q_1 = 1$ и смешиваем их, чтобы получить, например

$$U \begin{pmatrix} a_0 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 a_0 + u_2 a_4 \\ u_2 a_0 - u_1 a_4 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad U \begin{pmatrix} a_1 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 a_1 + u_2 a_5 \\ u_2 a_1 - u_1 a_5 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Наконец вернем все эти пары в нужное место. Получаем векторный результат $U_1 \varphi_1$. Точно так же U_2 делит все пространство на два полупространства с базисными состояниями с $q_2 = 0$ по сравнению с $q_2 = 1$, а U_3 разделяет на полупространства с $q_3 = 0$ по сравнению с $q_3 = 1$.

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 000 & a_0 \\ 001 & a_1 \\ 010 & a_2 \\ 011 & a_3 \\ 100 & a_4 \\ 101 & a_5 \\ 110 & a_6 \\ 111 & a_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{CNOT_{1 \rightarrow 2}} \begin{pmatrix} 000 & a_0 \\ 001 & a_1 \\ 010 & a_2 \\ 011 & a_3 \\ 100 & a_6 \\ 101 & a_7 \\ 110 & a_4 \\ 111 & a_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{CNOT_{2 \rightarrow 3}} \varphi'_1 = \begin{pmatrix} 000 & a_0 \\ 001 & a_1 \\ 010 & a_3 \\ 011 & a_2 \\ 100 & a_6 \\ 101 & a_7 \\ 110 & a_5 \\ 111 & a_4 \end{pmatrix} \quad (4)$$

В уравнении (4) применяем $CNOT_{1 \rightarrow 2}$, а затем $CNOT_{2 \rightarrow 3}$ для получения φ'_1 , где $i \rightarrow j$ в нижних индексах означает, что q_i – это контроль, а q_j – цель. Изучая таблицу истинности вентилей CNOT, $CNOT_{1 \rightarrow 2}$ вычисляет $q1 \oplus q2$ и сохраняет его значение в $q2$, а затем $CNOT_{2 \rightarrow 3}$ вычисляет $q1 \oplus q2 \oplus q3$ и сохраняет свое значение в $q3$. Другими словами, после применения $CNOT_{1 \rightarrow 2}$ и $CNOT_{2 \rightarrow 3}$ значение $q2$ теперь представляет собой значение $q1 \oplus q2$, а значение $q3$ теперь представляет значение $q1 \oplus q2 \oplus q3$ по сравнению с состоянием ϕ_1 перед применением двух вентилей CNOT. Поскольку $q1 \oplus q2$, и $q1 \oplus q2 \oplus q3$ являются линейными функционалами в V^* , можем понимать вектор ϕ' как имеющий функциональную конфигурацию $f1 = q1, f2 = q1 \oplus q2, f3 = q1 \oplus q2 \oplus q3$ по сравнению с ϕ_1 , имеющему $f1 = q1, f2 = q2, f3 = q3$. Теперь предсказываем, что если сейчас применим унитарные единицы с 1 кубитом к ϕ' , U1 по-прежнему будет разделять общее пространство на два полупространства на базисных состояниях с $q1 = 0$ по сравнению с $q1 = 1$. U2 теперь разделится на два полупространства с $q1 \oplus q2 = 0$ против $q1 \oplus q2 = 1$, а U3 разделится на два полупространства с $q1 \oplus q2 \oplus q3 = 0$ против $q1 \oplus q2 \oplus q3 = 1$. Действительно, это предсказание проверяется путем выполнения ϕ' таким же образом, как в уравнении (1):

$$\varphi'_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow U_1 \varphi'_1 = \begin{pmatrix} u_1 a_0 + u_2 a_6 \\ u_1 a_1 + u_2 a_7 \\ u_1 a_3 + u_2 a_5 \\ u_1 a_2 + u_2 a_4 \\ u_2 a_0 - u_1 a_6 \\ u_2 a_1 - u_1 a_7 \\ u_2 a_3 - u_1 a_5 \\ u_2 a_2 - u_1 a_4 \end{pmatrix}; U_2 \varphi'_1 = \begin{pmatrix} u_1 a_0 + u_2 a_3 \\ u_1 a_1 + u_2 a_2 \\ u_2 a_0 - u_1 a_3 \\ u_2 a_1 - u_1 a_2 \\ u_1 a_6 + u_2 a_5 \\ u_1 a_7 + u_2 a_4 \\ u_2 a_6 - u_1 a_5 \\ u_2 a_7 - u_1 a_4 \end{pmatrix}; U_3 \varphi'_1 = \begin{pmatrix} u_1 a_0 + u_2 a_1 \\ u_2 a_0 - u_1 a_1 \\ u_1 a_3 + u_2 a_2 \\ u_2 a_3 - u_1 a_2 \\ u_1 a_6 + u_2 a_7 \\ u_2 a_6 - u_1 a_7 \\ u_1 a_5 + u_2 a_4 \\ u_2 a_5 - u_1 a_4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

В уравнении (3) видим, что эффект U1 равен [(a0, a6), (a1, a7), (a2, a4), (a3, a5)] с теми же элементами «0» и «1», но с разными парами из предыдущего набора [(a0, a4), (a1, a5), (a2, a6), (a3, a7)]. С другой стороны, эффект U2 таков [(a0, a3), (a1, a2), (a6, a5), (a7, a4)], где «0» элементов теперь равны {a0, a1, a6, a7} – эти элементы исходного вектора ϕ_1 (не ϕ') соответствуют $\{|000\rangle \sim a_0, |001\rangle \sim a_1, |110\rangle \sim a_6, |111\rangle \sim a_7\}$, так что действительно для этих элементов $q1 \oplus q2 = 0$. Точно так же эффект U3 [(a0, a1), (a3, a2), (a6, a7), (a5, a4)], где «0» элементы равны {a0, a3, a6, a5}, которые соответствуют $q1 \oplus q2 \oplus q3 = 0$ в исходном векторе ϕ_1 .

3. Характеристика квантовых схем с функциональными конфигурациями. Теперь, когда получили эти результаты, можно представить идею использования функциональных конфигураций кубитов для характеристики квантовых схем. Начиная с произвольного начального состояния [19] функциональную конфигурацию кубита $|\varphi_1\rangle = \sum_{i=0}^7 a_i |i\rangle$ можно рассматривать как наборы с функциональной

конфигурацией кубита. Пока не задействован вентиль CNOT, эта традиционная конфигурация остается в силе и определяет уникальное правило для всех возможных однокубитных унитарных единиц: какие записи считаются «0», которые счи-

таются «1», и как записи «0» и «1» объединяются в пары для каждого U_k . Пока конфигурация остается на месте, максимальное количество $n = 3U_k$ может быть применено с одним унитаром на каждый кубит, и любой дополнительный унитар с 1 кубитом будет избыточным. После того, как последняя U_k в этой конфигурации применяется и до того, как вычисляется первый CNOT, состояние изменится на $|\varphi_2\rangle = \sum_{i=0}^7 b_i |i\rangle$ с новыми записями в векторе состояния. Теперь предположим, что применяется последовательность вентилей CNOT прямо перед тем, как происходит следующее U_k , записи не изменяются, а только перемешиваются, это создает новый уровень функциональной конфигурации, такой как $f1 = q1$, $f2 = q1 \oplus q2$, $f3 = q1 \oplus q2 \oplus q3$, рассмотренные выше. Этот второй уровень функциональной конфигурации, который сейчас используется, определяет свое собственное уникальное правило для всех возможных однокубитных унитарных единиц, которые происходят после, но до применения следующего вентиля CNOT. Повторяя этот процесс, можем анализировать любые произвольные квантовые схемы следующим образом. На рис. 1 произвольная квантовая схема может быть разложена на чередующиеся последовательности 1-кубитных элементов U_k и CNOT. Каждая последовательность CNOT подготавливает текущее квантовое состояние в новый уровень функциональной конфигурации кубита, чтобы указать правило для следующей последовательности U_k о том, как общее пространство должно быть разделено на элементы «0» и «1» и как «0» и «1» записи парные. В частности, любой U_k находит соответствующие записи «0» и «1» в соответствии с k -м функционалом f_k , а шаблон спаривания определяется всей функциональной конфигурацией. После завершения этой последовательности U_k непосредственно перед началом следующей последовательности CNOT, создается квантовое состояние с новыми элементами, которое затем можно использовать в качестве начального состояния для следующей итерации. Этот процесс можно повторять много раз до тех пор, пока не будет достигнут конец схемы, где последний уровень функциональной конфигурации задает правило для результирующей последовательности U_k для создания конечного состояния [20]. Вместе все слои функциональных конфигураций образуют последовательность конфигураций, позволяющую определить тип квантовых схем. Разложение произвольной квантовой схемы на вентили с 1 кубитом и вентили CNOT предназначено для создания функциональных конфигураций кубита, т.е. это только для теоретического анализа и, таким образом, не увеличивает нагрузку на реализацию схем.

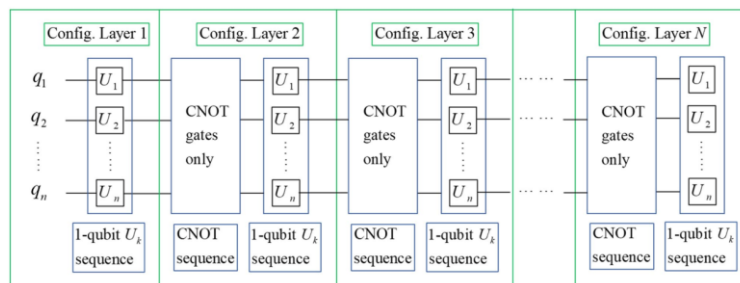


Рис. 1. Графическая иллюстрация произвольной квантовой схемы, проанализированной с использованием нескольких слоев функциональных конфигураций кубитов

Используем символ U_k для обозначения «любого 1-кубитного вентиля на k -м кубите», таким образом, U_k не является конкретным вентилем и может представлять разные 1-кубитные вентили на разных уровнях. Глубина последовательности полиномиальна, т.е. если длина исходной квантовой схемы полиномиально масштабируется с количеством кубитов, то и последовательность декомпозиции также полиномиально масштабируется. Это означает, что можем эффективно классифицировать и охарактеризовать любую полиномиальную квантовую схему с помощью нашего метода функциональной конфигурации кубита. Далее продемонстрируем применение картины функциональной конфигурации на рис. 1 для анализа аппаратно-эффективных анзацев [21], которые широко используются в вариационных квантовых алгоритмах. Функциональная конфигурация кубита №1:

$$\begin{aligned} f1 &= q2 \oplus q3 \oplus q4 \oplus q5 \oplus q6, f2 = q1 \oplus q2, f3 = \\ &= q1 \oplus q2 \oplus q3, f4 = q1 \oplus q2 \oplus q3 \oplus q4. \end{aligned} \quad (6)$$

$$f5 = q1 \oplus q2 \oplus q3 \oplus q4 \oplus q5, f6 = q1 \oplus q2 \oplus q3 \oplus q4 \oplus q5 \oplus q6. \quad (7)$$

Функциональная конфигурация кубита №2:

$$\begin{aligned} f1 &= q1 \oplus q2, f2 = q2, f3 = q1 \oplus q2 \oplus q3, f4 = q2 \oplus q4, f5 = \\ &= q4 \oplus q5 \oplus q6, f6 = q6. \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнениях (6, 7) и (8) различия между двумя анзацами соответствуют функциональными конфигурациями кубитов. Например, в уравнении (8) $f2$ и $f6$ по-прежнему сохраняют свои начальные значения $q2$ и $q6$, а в уравнении (7) изменены все функционалы кубитов. В общем, кубитовые функционалы в уравнении (7) содержат больше кубитных членов [22], чем в уравнении (8), поэтому следует ожидать, что кубиты схемы на рис. 2 будут более взаимосвязаны, чем кубиты на рис. 3. В этом конкретном случае анзацы будут повторять одну и ту же функциональную конфигурацию для всех последующих слоев; однако, если применим теорию к другим типам квантовых схем, таким как схема квантового преобразования Фурье [23], каждый уровень может иметь различную функциональную конфигурацию, и вся последовательность конфигурационных уровней характеризует схему. До сих пор сравнение уравнений (6, 7) и (8) фокусируются на структурных различиях между двумя функциональными коннекторами кубитов. Для любой квантовой схемы можем сгенерировать уровни функциональной конфигурации кубита, анализируя квантовые элементы один за другим. Это означает, что стоимость применения метода к данной квантовой схеме должна быть сравнима с длиной схемы, которая может быть полиномиальной или экспоненциальной по количеству кубитов. Действительно, функциональная конфигурация кубита описывает характерные свойства квантовой схемы и, следовательно, должна иметь такое же масштабирование сложности, как и сама схема. Изучение квантовых схем с точки зрения типов функциональной конфигурации кубита имеет ряд преимуществ:

1. Поскольку процесс является совершенно общим, любая произвольная квантовая схема может быть проанализирована с помощью этой картины и, таким образом, принадлежит к одному из типов, определяемых последовательностью функциональных конфигураций.

2. Для любого конкретного уровня функциональной конфигурации можно применять без избыточности максимальное количество n 1-кубитных унитарных единиц, по одной унитарной единице на каждый кубит. Кроме того, количество вентилей CNOT, необходимых для достижения любой заданной функциональной

конфигурации, также ограничено. Следовательно, общая длина L [24] квантовой схемы тесно связана с общим количеством N слоев функциональной конфигурации в схеме. Другими словами, картина функциональной конфигурации отражает важное свойство сложности схемы.

3. Любая конкретная последовательность функциональных конфигураций содержит характеристическую информацию о том, как элементы вектора состояния коллективно модифицируются унитарными единицами из 1 кубита, не фиксируя фактические последовательности U_k – это позволяет нам сгруппировать большой набор квантовых схем вместе должны быть отнесены к одному типу, определяемому последовательностью функциональной конфигурации. Фактически, поскольку параметры любого однокубитного унитарного устройства могут непрерывно изменяться в области комплексных чисел, существует бесчисленное множество возможных квантовых цепей заданной длины. Однако для последовательности функциональных конфигураций заданной длины существует только конечное число возможных последовательностей, поэтому можем классифицировать несчетно бесконечный набор с конечным числом типов. Любой конкретный тип квантовых схем имеет свою уникальную последовательность функциональных конфигураций, и каждый уровень функциональной конфигурации определяет уникальный способ, которым однокубитные унитарные схемы работают с элементами вектора состояния. Двойственность между линейным функциональным пространством V^* и пространством битовых строк V приводит к однозначному соответствию между каждым функционалом и уникальным разделением битовых строк, определяемым двумя заданными полумножествами, установив «0» и «1» для функционального значения соответственно. Когда U_k воздействует на q_k , разбиение f_k указывает, какие элементы равны «0», а какие – «1», в то время как разбиения всех других функционалов определяют, как элементы «0» сочетаются с элементами «1». Следовательно, если конкретный функционал f_k появляется в одной конфигурации, но не появляется в другой, то 1-кубитные унитарии [25] будут вести себя по-разному в двух конфигурациях, и, таким образом, две квантовые схемы с разными типами конфигураций будут иметь разные характеристики. Однако, когда несколько уровней конфигураций присутствует, то каждая соответствующая конфигурация должна переставляться таким же образом, чтобы эта эквивалентность сохранялась. Например $f_1, f_2, f_3 \rightarrow f_4, f_5, f_6$ эквивалентно $f_3, f_1, f_2 \rightarrow f_6, f_4, f_5$, но не $f_3, f_1, f_2 \rightarrow f_4, f_6, f_5$. Отсюда можем заключить, что типы квантовых цепей, определяемые различными последовательностями функциональных конфигураций, в общем случае не пересекаются друг с другом. Последовательность позиций часто сталкивается с проблемой наличия нескольких последовательностей вентилях, которые производят одну и ту же общую унитарную операцию, а это означает, что последовательности вентилях не однозначно характеризуют квантовые схемы. Однако в картине функциональной конфигурации все эти «эквивалентные» последовательности вентилях должны создавать одну и ту же последовательность функциональной конфигурации, а типы, определяемые последовательностями функциональной конфигурации, однозначно характеризуют квантовые схемы.

4. Количество возможных типов функциональной конфигурации. Теперь возникает естественный вопрос: сколько существует возможных типов функциональной конфигурации для одного слоя и для фиксированного числа слоев. Для одного слоя, поскольку функциональное пространство двойственно пространству битовых строк с 2^n элементами, имеется 2^n функционалов. За исключением

функционала «0», есть $2^n - 1$ на выбор и n мест для их размещения. Самым наивным подсчетом было бы $(2^n - 1)^n$, но не все из них являются допустимыми конфигурациями. Чтобы увидеть это первое замечание, что невозможно, чтобы повторяющиеся функциональные возможности появлялись в двух или более разных местах. Если есть конфигурация $f_1, f_2 = f_1, f_3, \dots, f_n$, то вектор состояния будет иметь только элементы, связанные с базисными состояниями $|00\dots\rangle$ и $|11\dots\rangle$, но не $|01\dots\rangle$ и $|10\dots\rangle$ (половина всех размерностей потеряна для вектора состояния), и это не всегда может быть выполнено, когда начальное состояние выбрано произвольно. Оказывается, это правило неповторяемости является частным примером более общего условия допустимых конфигураций: для конфигурации $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ ни одна из f_k для $k = 1, 2, \dots, n$ может быть суммой любого числа других функционалов. Это потому, что в противном случае, если, например, $f_7 = f_1 + f_2 + f_5$, то значение f_7 больше не является свободным, так что подпространство, определяемое f_1, f_2, f_5, f_7 , становится f_1, f_2, f_5 , и половина измерений потеряна для вектора состояния. Когда мы рассматриваем функционалы как элементы линейного пространства V^* , то требование, чтобы любой f_k не был суммой любого числа других функционалов, является одним и тем же требованием линейной независимости для всех f_k для $k = 1, 2, \dots, n$ таких, что $\sum_{k=1}^n c_k f_k = 0$ имеет только тривиальное решение всех равно 0. Эта линейная независимость автоматически обеспечивается за счет использования CNOT-вентилей для создания функциональных конфигураций. Чтобы увидеть это, начните с любой конфигурации $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ со всеми линейно независимыми функционалами, затем применение $CNOT_{j \rightarrow h}$ заменит f_h на $f_j + f_h$, который по-прежнему линейно независим от всех других функционалов. Таким образом, любой вентиль CNOT не может нарушить линейную независимость, начиная с линейной независимости. Начальная конфигурация любой квантовой схемы такова: $f_1 = q_1, f_2 = q_2, f_3 = q_3, \dots, f_n = q_n$, которая имеет линейную независимость для всех функционалов, так что любая последовательность CNOT автоматически обеспечивает линейную независимость. Теперь вернемся к подсчету возможных конфигураций для одного слоя, учитывая линейную независимость, есть $2^n - 1$ вариантов для f_1 , $2^n - 2$ для f_2 , ..., для f_k имеется N_f вариантов:

$$N_f(k, n) = 2^n - 1 - \sum_{i=1}^{k-1} C(k-1, i) = 2^n - 2^{k-1}. \quad (9)$$

Таким образом, общее возможное количество конфигураций для одного слоя:

$$N_c(n) = \prod_{k=1}^n N_f(k, n) = \prod_{k=1}^n (2^n - 2^{k-1}). \quad (10)$$

Теперь о нескольких слоях, для ясности усиливаем определение слоев функциональных конфигураций. Начнем с начального состояния ϕ_1 и начальной конфигурации $f_1 = q_1, f_2 = q_2, f_3 = q_3, \dots, f_n = q_n$, если первый применяемый вентиль является унитарным с 1 кубитом в качестве первого слоя рассматриваем начальную конфигурацию; если первый вентиль является вентилем CNOT (т.е. случай, полученный удалением первой последовательности U_k и объединением первых двух блоков), рассматриваем конфигурацию, созданную первой последовательностью CNOT, как первый слой. После того, как первый уровень установлен, можно

применить последовательность 1-кубитных унитаров в соответствии с правилом, установленным этой конфигурацией, и до тех пор, пока нет вентиля CNOT, система остается на первом уровне. Непосредственно перед следующей последовательностью CNOT состояние изменяется на ϕ_2 , а конфигурация сбрасывается на $f_1 = q_1, f_2 = q_2, f_3 = q_3, \dots, f_n = q_n$. Теперь применяется следующая последовательность CNOT, и прямо перед следующим 1-кубитной унитарной последовательности создаем конфигурацию второго слоя, которая остается на месте до следующей CNOT последовательности. Последующие слои могут быть определены соответствующим образом. Требуем, чтобы все слои после первого не могли быть начальной конфигурацией $f_1 = q_1, f_2 = q_2, f_3 = q_3, \dots, f_n = q_n$ – иначе после сброса не применяется вентиль CNOT, и мы можем комбинировать этот слой с предыдущий – тогда общее возможное количество типов, определяемых N слоями функциональных конфигураций, равно:

$$N_t(n, N) = \frac{N_c(n)(N_c(n)-1)^{N-1}}{n!} = \frac{\prod_{k=1}^n (2^n - 2^{k-1}) [\prod_{k=1}^n (2^n - 2^{k-1}) - 1]^{N-1}}{n!} \quad (11)$$

где $N_c(n)(N_c(n)-1)^{N-1}$ учитывает требование «все слои после первого не могут быть начальной конфигурацией», а $n!$ учитывает эквивалентность из-за перестановки функционалов в первом слое. Чтобы получить конкретное представление о N_t , для 5-кубитная система (подобная простейшим квантовым устройствам IBM [26], но с неограниченной связью между кубитами) на 1 уровне функциональной конфигурации включает:

$$N_t(5,1) = \frac{\prod_{k=1}^5 (2^5 - 2^{k-1})}{5!} = 83328 \quad (12)$$

$$N_t(5,3) = \frac{\prod_{k=1}^5 (2^5 - 2^{k-1}) [\prod_{k=1}^5 (2^5 - 2^{k-1}) - 1]^{3-1}}{5!} = 8.3317 \times 10^{18} \quad (13)$$

Таким образом, число типов N_t может быть гигантским даже при весьма малых значениях n и N , но это разумно, поскольку мы рассматриваем все возможные квантовые схемы на n кубитах и N слоях с конечным числом типов. На самом деле гигантское число N_t иллюстрирует огромный потенциал квантовых вычислений, поскольку небольшое количество кубитов может поддерживать такое огромное разнообразие квантовых схем на нескольких слоях. Общее количество вентиляей, необходимых для реализации любой из N_t возможных функциональных конфигураций, является полиномиальным как по количеству кубитов, так и по количеству кубитов. Это означает, что все N_t функциональных конфигураций могут быть эффективно достигнуты с помощью полиномиальной схемы, если номер слоя N полиномиален по n – следовательно, хотя N_t является гигантским, пока N полиномиально, мы действительно классифицируем все полиномиальные схемы, которые возможны с уравнением (8), так что классификация соответствует нашей практической потребности в квантовых вычислениях для разработки полиномиальных схем, которые могут быть эффективно реализованы.

Заключение. Теория функциональной конфигурации кубита представляет собой новый и перспективный подход к систематическому анализу и классификации квантовых схем. Развитие квантовых вычислений в последние десятилетия привело к значительному увеличению количества разработанных квантовых алгоритмов, предназначенных для различных задач. Однако, несмотря на успехи, остается вызов в разработке эффективных квантовых схем для реализации новых алгоритмов. В работе был предложен подход, основанный на функциональной конфигурации кубита, который позволяет классифицировать квантовые схемы и систематически исследовать их общие свойства. Теория функциональной конфигурации кубита описывает взаимосвязь между функционалами кубитов и тем, как элементы вектора состояния коллективно модифицируются квантовыми вентилями. Данная теория имеет потенциальное значение для оптимизации квантовых схем, поскольку позволяет систематически находить минимальные последовательности декомпозиции вентилей для заданных квантовых схем. Результаты этой работы могут быть применены для улучшения существующих алгоритмов и разработки новых, что содействует продвижению в области квантовых вычислений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Calderbank A.R., Shor P.W.* Good quantum error-correcting codes exist // *Phys. Rev. A.* – 1996. – Vol. 54. – P. 1098-1106;
2. *Linke N.M., Gutierrez M., Landsman K.A., et al.* Fault-tolerant quantum error detection // *Science Advances.* – 2017. – 3 (10). – P. e1701074. Available from: <https://doi.org/10.1126/sciadv.1701074>;
3. *Vuillot C.* Is error detection helpful on IBM 5q chips? // *Quantum Information and Computation.* – 2018. – Vol. 18, No. 11-12. – P. 0949-0964.
4. *Harper R., Flammia S.T.* Fault-tolerant logical gates in the IBM quantum experience // *Phys Rev Lett.* – 2019. – 122, 080504. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.080504>.
5. *Wootton J.R., Loss D.* Repetition code of 15 qubits // *Physical Review A.* – 2018. – 97 (5). Available from: <https://doi.org/10.1103/physreva.97.052313>.
6. *Aspuru-Guzik A., Dutoi A.D., Love P.J., et al.* Simulated quantum computation of molecular energies // *Science.* – 2005. – 309 (5741). – P. 1704-1707. Available from: <https://science.sciencemag.org/content/309/5741/1704>.
7. *Knill M., Laflamme R., and Zurek W.* Threshold accuracy for quantum computation. – *quantph/9610011*, 15 Oct 1996.
8. *Гушанский С.М., Потапов В.С.* Методика разработки и построения квантовых алгоритмов // *Информатизация и связь.* – 2017. – № 3. – С. 101-104.
9. *Гушанский С.М., Поленов М.Ю., Потапов В.С.* Реализация компьютерного моделирования системы с частицей в одномерном и двухмерном пространстве на квантовом уровне // *Известия ЮФУ. Технические науки.* – 2017. – № 3. – С. 223-233.
10. *Гузик В.Ф., Гушанский С.М., Потапов В.С.* Количественные характеристики степени запутанности // *Известия ЮФУ. Технические науки.* – 2016. – № 3. – С. 76-86.
11. *Kleppner D., Kolenkow R.* An Introduction to Mechanics (Second ed.). – Cambridge: Cambridge University Press, 2014. – 49 p.
12. *Потапов В.С., Гушанский С.М.* Квантовые типы ошибок и методы их устранения, зависимость ошибки от меры и чистоты запутанности // *Сб. трудов XIV Всероссийской научной конференции молодых ученых, аспирантов и студентов ИТСАНУ-2016.* – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 3. – С. 123-129.
13. *Gushansky S., Pykhovskiy V., Kozlovskiy A., Potapov V.* Development of a scheme of a hardware accelerator of quantum computing for correction quantum types of errors // *The 4-th Computational Methods in Systems and Software 2020, Czech Republic.* – P. 64-73.
14. *Hales S. Hallgren.* An improved quantum Fourier transform algorithm and applications // *Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, November 12–14, 2000.* – P. 515.

15. Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V. Complexity Estimation of Quantum Algorithms Using Entanglement Properties // 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference, Bulgaria, 2016. – P. 20-26.
16. Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V. Models of a quantum computer, their characteristics and analysis // 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). – Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015. – P. 583-587.
17. Collier D. The Comparative Method / In: Finifter A.W. (ed.) // Political Sciences: The State of the Discipline II. American Science Association. Washington, DC, 1993. – P. 105-119.
18. Olukotun K. Chip Multiprocessor Architecture – Techniques to Improve Throughput and Latency. – Morgan and Claypool Publishers, San Rafael, 2007.
19. Raedt K.D., Michielsen K., De Raedt H., Trieu B., Arnold G., Marcus Richter, Th Lip-pert, Watanabe H., and Ito N. Massively parallel quantum computer simulator // Computer Physics Communications. – 176. – P. 121-136.
20. Williams C.P. Explorations in Quantum Computing // Texts in Computer Science. Chapter 2. Quantum Gates. – Springer, 2011. – P. 51-122.
21. Potapov V., Gushanskiy S., Guzik V., Polenov M. The Computational Structure of the Quantum Computer Simulator and Its Performance Evaluation // In: Software Engineering Perspectives and Application in Intelligent Systems. Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer, 2019. – Vol. 763. – P. 198-207.
22. Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V. Entanglement-assisted Capacity of a Quantum Channel and the Reverse Shannon Theorem // IEEE Transactions on Information Theory. – 2002. – 48. – P. 2637-2655.
23. Milner R.G. A Short History of Spin. In: Contribution to the XV International Workshop on Polarized Sources, Targets, and Polarimetry. – Charlottesville, Virginia, USA, September 9–13, 2013. – arXiv:1311.5016 (2013).
24. Hallgren H.S. An improved quantum Fourier transform algorithm and applications // In: Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Redondo Beach, CA, IEEE, 2000. – P. 515.
25. Boneh D., Zhandry M. Quantum-secure message authentication codes // In: Proceedings of Eurocrypt. – 2013. – P. 592-608.
26. Potapov V., Gushanskiy S., Guzik V., Polenov M. Architecture and Software Implementation of a Quantum Computer Model // In: Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer, 2016. – Vol. 465. – P. 59-68.

REFERENCES

1. Calderbank A.R., Shor P.W. Good quantum error-correcting codes exist, *Phys. Rev. A*, 1996, Vol. 54, pp. 1098-1106;
2. Linke N.M., Gutierrez M., Landsman K.A., et al. Fault-tolerant quantum error detection, *Science Advances*, 2017, 3 (10), pp. e1701074. Available from: <https://doi.org/10.1126/sciadv.1701074>;
3. Vuillot C. Is error detection helpful on IBM 5q chips?, *Quantum Information and Computation*, 2018, Vol. 18, No. 11-12, pp. 0949-0964.
4. Harper R., Flammia S.T. Fault-tolerant logical gates in the IBM quantum experience, *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 122, 080504. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.080504>.
5. Wootton J.R., Loss D. Repetition code of 15 qubits, *Physical Review A*, 2018, 97 (5). Available from: <https://doi.org/10.1103/physreva.97.052313>.
6. Aspuru-Guzik A., Dutoi A.D., Love P.J., et al. Simulated quantum computation of molecular energies, *Science*, 2005, 309 (5741), pp. 1704-1707. Available from: <https://science.sciencemag.org/content/309/5741/1704>.
7. Knill M., Laflamme R., and Zurek W. Threshold accuracy for quantum computation. *quantph/9610011*, 15 Oct 1996.
8. Gushanskiy S.M., Potapov V.S. Metodika razrabotki i postroeniya kvantovykh algoritmov [Methodology for the development and construction of quantum algorithms], *Informatizatsiya i svyaz* [Informatization and communication], 2017, No. 3, pp. 101-104.

9. Gushanskiy S.M., Polenov M.Yu., Potapov V.S. Realizatsiya komp'yuternogo modelirovaniya sistemy s chastitsey v odnomernom i dvukhmernom prostranstve na kvantovom urovne [Implementation of computer simulation of a system with a particle in one-dimensional and two-dimensional space at the quantum level], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2017, No. 3, pp. 223-233.
10. Guzik V.F., Gushanskiy S.M., Potapov V.S. Kolichestvennye kharakteristiki stepeni zaputannosti [Quantitative characteristics of the degree of entanglement], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2016, No. 3, pp. 76-86.
11. Kleppner D., Kolenkow R. An Introduction to Mechanics (Second ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 2014, 49 p.
12. Potapov V.S., Gushanskiy S.M. Kvantovye tipy oshibok i metody ikh ustraneniya, zavisimost' oshibki ot mery i chistoty zaputannosti [Quantum types of errors and methods for their elimination, dependence of the error on the measure and purity of entanglement], *Sb. trudov XIV Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii molodykh uchenykh, aspirantov i studentov ITSAiU-2016* [Collection of proceedings of the XIV All-Russian Scientific Conference of Young Scientists, Postgraduates and Students of ITSAiU-2016]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2016, Vol. 3, pp. 123-129.
13. Gushanskiy S., Pykhovskiy V., Kozlovskiy A., Potapov V. Development of a scheme of a hardware accelerator of quantum computing for correction quantum types of errors, *The 4-th Computational Methods in Systems and Software 2020, Czech Republic*, pp. 64-73.
14. Hales S. Hallgren. An improved quantum Fourier transform algorithm and applications, *Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, November 12-14, 2000*, pp. 515.
15. Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V. Complexity Estimation of Quantum Algorithms Using Entanglement Properties, *16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference, Bulgaria, 2016*, pp. 20-26.
16. Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V. Models of a quantum computer, their characteristics and analysis, *9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT)*. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015, pp. 583-587.
17. Collier D. The Comparative Method / In: Finifter A.W. (ed.), *Political Sciences: The State of the Discipline II*. American Science Association. Washington, DC, 1993, pp. 105-119.
18. Olukotun K. Chip Multiprocessor Architecture – Techniques to Improve Throughput and Latency. Morgan and Claypool Publishers, San Rafael, 2007.
19. Raedt K.D., Michielsen K., De Raedt H., Trieu B., Arnold G., Marcus Richter, Th Lip-pert, Watanabe H., and Ito N. Massively parallel quantum computer simulator, *Computer Physics Communications*, 176, pp. 121-136.
20. Williams C.P. Explorations in Quantum Computing, *Texts in Computer Science. Chapter 2. Quantum Gates*. Springer, 2011, pp. 51-122.
21. Potapov V., Gushanskiy S., Guzik V., Polenov M. The Computational Structure of the Quantum Computer Simulator and Its Performance Evaluation, *In: Software Engineering Perspectives and Application in Intelligent Systems. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer, 2019, Vol. 763, pp. 198-207.
22. Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V. Entanglement-assisted Capacity of a Quantum Channel and the Reverse Shannon Theorem, *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, 48, pp. 2637-2655.
23. Milner R.G. A Short History of Spin. In: Contribution to the XV International Workshop on Polarized Sources, Targets, and Polarimetry. Charlottesville, Virginia, USA, September 9-13, 2013. arXiv:1311.5016 (2013).
24. Hallgren H.S. An improved quantum Fourier transform algorithm and applications, *In: Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Redondo Beach, CA, IEEE, 2000*, pp. 515.
25. Boneh D., Zhandry M. Quantum-secure message authentication codes, *In: Proceedings of Eurocrypt*, 2013, pp. 592-608.
26. Potapov V., Gushanskiy S., Guzik V., Polenov M. Architecture and Software Implementation of a Quantum Computer Model, *In: Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer, 2016, Vol. 465, pp. 59-68.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. Г.В. Куповых.

Гушанский Сергей Михайлович – Южный федеральный университет; e-mail: smgushanskiy@sfnedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 88634371656; кафедра вычислительной техники; к.т.н.; доцент.

Потапов Виктор Сергеевич – e-mail: vpotapov@sfnedu.ru;.: 88634371656; кафедра вычислительной техники; ассистент.

Gushanskiy Sergey Mikhailovich – Southern Federal University; e-mail: smgushanskiy@sfnedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371656; the department of computer engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.

Potapov Victor Sergeevich – e-mail: vpotapov@sfnedu.ru; phone: +78634371656; the department of computer engineering; assistant.

УДК 517.444

DOI 10.18522/2311-3103-2023-6-57-66

Е.Ю. Кисловский, А.В. Шандыбин, В.Н. Таран

ПРОЕКЦИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ В ПОЛИНОМЫ ВОЛЬТЕРРА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Данная статья касается проблем моделирования нелинейных систем с памятью. Целью работы является преобразование в операторный вид нелинейного дифференциального уравнения Риккати. Приводится краткий обзор подходов в моделировании нелинейных динамических систем. Используя модель в виде функционального ряда Вольтерра, в работе решаются задачи проецирования исходного уравнения в дифференциальные уравнения с ядрами Вольтерра и решения полученных уравнений. Приведено краткое описание метода проецирования в гиперпространство с применением функциональной производной Фреше. Показано, что результат проецирования есть дифференциальные уравнения с решениями в виде ядер Вольтерра. Линейное ядро есть решение обыкновенного дифференциального уравнения, а ядра выше первого порядка находятся путем решения дифференциальных уравнений в частных производных по переменным временной области. В работе рассматривается модель только с первыми двумя ядрами ряда. Особое внимание уделяется уравнению с билинейным ядром. Его поиск аналитическими методами более сложен относительно уравнения с линейным ядром, ввиду чего, в работе предпринята попытка расчета численным методом. Дано подробное описание разработанного алгоритма расчета билинейного ядра методом конечных элементов. Применяя данный метод, общая операторная модель будет иметь полуаналитическую структуру в виде суммы сверток с аналитическим линейным ядром и конечно-элементным билинейным ядром. Разработана операторная модель для слабо нелинейной системы. Для верификации данной модели проведено имитационное моделирование. Вычислительный эксперимент заключался в получении переходной характеристики на типовой сигнал управления в виде функции Хевисайда. Используя дискретный аналог операции свертки, были рассчитаны отклики линеаризованной и предложенной операторной модели. Полученные переходные характеристики сравнивались с эталонным решением, в качестве которого было принято решение исходного нелинейного уравнения методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Показано, что разработанная операторная модель дает отклик ближе к эталонному, что подтверждается результатами расчетов соответствующих невязок.

Дифференциальное уравнение Риккати; ряд Вольтерра; функциональная производная Фреше; метод конечных элементов; имитационное моделирование.