

19. Nagoev Z., Pshenokova I., Anchekov M. Model of the reasoning process in a multiagent cognitive system, *Procedia Computer Science*, 2020, Vol. 169, pp. 615-619. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.02.202>.
20. Nagoev Z., Pshenokova I., Nagoeva O., and Kankulov S. Situational analysis model in an intelligent system based on multi-agent neurocognitive architectures, *Journal of Physics: Conference Series (JPCS)* 2131 (2021) 022103. DOI:10.1088/1742-6596/2131/2/022103.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор С.Ш. Рехвиашвили.

**Пшенокова Инна Ауесовна** – Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН; e-mail: pshenokova\_inna@mail.ru; г. Нальчик, Россия; тел: +79094901949; к.ф.-м.н.; зав. лабораторией «Интеллектуальные среды обитания».

**Бжихатлов Кантемир Чамалович** – Кабардино-Балкарский научный центр РАН; e-mail: haosit13@mail.ru; г. Нальчик, Россия; тел., факс: +79631663448; к.ф.-м.н.; зав. лабораторией «Нейрокогнитивные автономные интеллектуальные системы».

**Унагасов Алим Ахмедханович** – e-mail: alim.unagasov@mail.ru; тел.: +79054372450; стажер-исследователь лаборатории «Нейрокогнитивные автономные интеллектуальные системы».

**Абазоков Мухамед Адмирович** – e-mail: abazokov1997@mail.ru; тел.: +79631673421; стажер-исследователь лаборатории «Нейрокогнитивные автономные интеллектуальные системы».

**Pshenokova Inna Auesovna** – Institute of Computer Science and Problems of Regional Management, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences; e-mail: pshenokova\_inna@mail.ru; Nalchik, Russia; phone: +79094901949; cand. of phys. and math. sc.; head of the laboratory «Intellektual'nyye sredy obitaniya».

**Bzhikhatlov Kantemir Chamalovich** – Federal public budgetary scientific establishment «Federal scientific center «Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences»; e-mail: haosit13@mail.ru; Nalchik, Russia; phone, fax: +79631663448; cand. of phys. and math. sc.; head of the laboratory «Neurocognitive autonomous intelligent systems».

**Unagasov Alim Ahmedhanovich** – e-mail: alim.unagasov@mail.ru; phone: +79054372450; research assistant of the laboratory «Neurocognitive autonomous intelligent systems».

**Abazokov Muhammed Admirovich** – e-mail: abazokov1997@mail.ru; phone: +79631673421; research assistant of the laboratory «Neurocognitive autonomous intelligent systems».

УДК 681.51

DOI 10.18522/2311-3103-2022-1-101-109

**И.С. Тренёв**

### **СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА ВДОЛЬ ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ С ПОМОЩЬЮ СУБОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ С $H_2/H_\infty$ -КРИТЕРИЕМ**

Целью данной работы является построение субоптимального регулятора с  $H_2/H_\infty$ -критерием, стабилизирующего отклонение динамической системы от заданной программной траектории. Предполагается, что на один вход системы будет подаваться импульсное возмущение, а на второй –  $L_2$ -возмущение. Рассматриваемая  $H_2/H_\infty$ -норма равняется максимальному значению  $L_2$ -нормы выхода по всем  $L_2$ -возмущениям и векторам импульсного возмущения, для которых сумма квадратичной формы вектора импульсного возмущения с заданной весовой матрицей и квадрата  $L_2$ -нормы второго возмущения не превосходит единицу. В работе реализуется процесс вычисления  $H_2/H_\infty$ -нормы в терминах линейных матричных неравенств для динамической системы. Важную роль в процессе сочетания  $H_2$ -нормы и  $H_\infty$ -нормы в  $H_2/H_\infty$ -норме выполняет весовая матрица, входящая в определение данной нормы. Стоит отметить, что в отличие от  $H_\infty$ -нормы,  $H_2/H_\infty$ -норма достигается в смысле наилучшего  $L_2$ - и импульсно-

го возмущений, при которых достигается максимальное значение  $L_2$ -нормы выхода. Необходимо получить и линеаризовать математическую модель квадрокоптера, построить программную траекторию движения и стабилизировать отклонения с помощью субоптимального закона управления с  $H_2/H_\infty$ -критерием при наличии шумов в системе. В качестве инструмента поиска субоптимального управления используется аппарат линейных матричных неравенств. Объектом исследования в данной работе является квадрокоптер, который представляет собой беспилотный летательный аппарат, имеющий четыре двигателя с воздушными винтами (пропеллерами), создающими тягу. Оси винтов и углы лопастей зафиксированы и регулируются лишь скорости вращения, что существенно упрощает конструкцию. С помощью уравнения Ньютона-Эйлера, получена нелинейная математическая модель квадрокоптера, а также произведена линеаризация данной модели в окрестности заданной программной траектории. В среде MATLAB производится численное моделирование и построение траекторий движения квадрокоптера, с помощью прикладного пакета для оптимизации YALMIP, Sedumi toolbox, производится решение линейных матричных неравенств. В среде Simulink, производится построение блока управления, стабилизирующего движение квадрокоптера вдоль заданной траектории при наличии  $L_2$ - и импульсного возмущений в системе. Производится демонстрация процесса виртуальной визуализации полета.

*Субоптимальное управление; стабилизация; роботизированная система;  $H_2/H_\infty$ ; подавление влияния внешних возмущений; моделирование.*

I.S. Trenev

#### MOVEMENT STABILIZATION OF THE QUADCOPTER ALONG A GIVEN TRAJECTORY USING A SUBOPTIMAL CONTROL LAW WITH $H_2/H_\infty$ -CRITERION

*The aim of the study is to construct a suboptimal controller with the  $H_2/H_\infty$ -criterion that stabilizes the deviation of the dynamic system from the given program trajectory. It is assumed that an impulse disturbance will be applied to one input of the system, and an  $L_2$ -disturbance to the second one. The  $H_2/H_\infty$ -norm is equal to the maximum value of the  $L_2$ -output norm for all  $L_2$ - and impulse disturbances vectors for which the sum of the quadratic form of the impulse disturbance vector with a given weight matrix and the squared  $L_2$ -norm of the second disturbance never greater than one. In this paper, it is required to demonstrate the process of calculating the  $H_2/H_\infty$ -norm in terms of linear matrix inequalities for a dynamical system and a system with uncertainty. An important role in the process of combining the  $H_2$ -norm and the  $H_\infty$ -norm in the  $H_2/H_\infty$ -norm is played by the weight matrix included in the definition of this norm. It should be noted that, unlike the  $H_\infty$ -norm, the  $H_2/H_\infty$ -norm is achieved in the sense of the worst  $L_2$ - and impulse disturbances, where the maximum value of the  $L_2$ -output norm is reached. It is necessary to obtain and linearize the mathematical model of the quadcopter, build a programmed trajectory, and stabilize the deviations using a suboptimal control law with the  $H_2/H_\infty$ -criterion in the presence of noise in the system. Linear matrix inequalities are used for suboptimal control searching. The object of this study is a quadcopter, which is an unmanned aerial vehicle with four engines with propellers that create thrust. The axes of the propellers and the angles of the blades are fixed and only the speed of rotation is regulated, which greatly simplifies the design. Using the Newton-Euler equation, a nonlinear mathematical model of a quadcopter is obtained, and this model is linearized. In the MATLAB environment, using the applied package for modeling and optimization YALMIP, Sedumi toolbox, numerical modeling, and construction of quadcopter motion trajectories are performed. After that, in the Simulink environment, a control block that stabilizes the movement of the quadcopter along a given trajectory in the presence of  $L_2$ - and impulse disturbances in the system is constructed. At the end, a demonstration of the process of virtual visualization of the flight is made.*

*Suboptimal control; stabilization; robotic system;  $H_2/H_\infty$ ; disturbance rejection; simulation.*

**Введение.** В теории автоматического управления к одним из самых активно разрабатываемых задач оптимального управления и фильтрации относятся задачи с критериями, определяемыми индуцированными нормами в соответствующих нормированных пространствах [1]. Каждый из оптимальных по этим критериям регуляторов имеет свои определенные недостатки, поэтому возникла идея сочетания этих критериев и создание общей теории, которая бы позволила синтезировать оптимальный регулятор по смешанному критерию [10, 11]. В конце 80-х были заложены и активно раз-

работывались в 90-х основные идеи смешанного  $H_2/H_\infty$ -управления [15]. Под таким управлением, главным образом, понимали задачу минимизации верхней границы  $H_2$  нормы передаточной функции в одном канале, при ограничении на  $H_\infty$  норму передаточной функции замкнутой системы другого канала. Одна из главных трудностей, возникшая на этом пути в различных постановках задач, заключалась в сложности решения уравнения Рикатти для формирования законов управления [3]. Использование методов оптимизации выпуклых функций и аппарата линейных матричных неравенств дало возможность значительно продвинуться в синтезе оптимальных законов управления с соответствующими критериями [4]. Также возникла концепция так называемого многокритериального управления, которая подразумевает под собой наличие нескольких каналов со своими входами и выходами, для каждого из которых задан свой критерий, и все эти критерии сформулированы в терминах общей функции Ляпунова [5]. Но стоит отметить, что в полной мере теория смешанного  $H_2/H_\infty$ -управления своего завершения не получила.

**$H_2/H_\infty$ -норма.** Начнем описание  $H_2/H_\infty$ -синтеза с введения понятия  $H_2/H_\infty$ -нормы упрощенной системы. Пусть задана линейная устойчивая система уравнений [11]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_v v + B_w w, & x(0) = 0 \\ z = Cx + Dv, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  – вектор состояния,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  – целевой выход, матрица  $A$  – Гурвицева,  $v = v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$  – возмущение, ограниченной по  $L_2$ -норме ( $L_2$ -возмущение),  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  – импульсное возмущение ( $w = d\delta(t)$ ), где  $d$  – неизвестный вектор,  $\delta(t)$  – функция Дирака).

Уровень гашения  $L_2$  возмущения для целевого выхода системы (1) представим в виде

$$\gamma_\infty(H_v) = \sup_{\|v\| \neq 0, d=0} \frac{\|z\|}{\|v\|},$$

где  $H_v(s) = C(sI - A)^{-1}B_v + D$  – передаточная функция системы (1) от входа  $v$  к выходу  $z$ .

Уровень гашения импульсного возмущения для целевого выхода системы (1) представим в виде

$$\gamma_2(H_w) = \sup_{d \neq 0, v=0} \frac{\|z\|}{|d|},$$

где  $H_w(s) = C(sI - A)^{-1}B_w$  – передаточная функция системы (1) от входа  $w$  к выходу  $z$ .

Уровень гашения совместных  $L_2$  и импульсного возмущений для целевого выхода системы (1) представим в виде

$$\gamma_{\infty,2}(H_v, H_w) = \sup_{\|v\|^2 + d^T R d \neq 0} \frac{\|z\|}{(\|v\|^2 + d^T R d)^{1/2}}, \quad (2)$$

где  $R = R^T > 0$  – весовая матрица.

Уровень гашения совместных возмущений можно интерпретировать как показатель, который определяется весовой матрицей  $R$  и характеризует указанные уровни, задаваемые  $H_\infty$ - и  $H_2$ -нормами. В качестве основного инструмента вычисления данного показателя можно рассмотреть следующее утверждение [12].

*Теорема 1.*  $H_2/H_\infty$ -норма удовлетворяет условию  $\gamma_{\infty,2}(H_v, H_w) < \gamma$  тогда и только тогда, когда следующие линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB_v & C^T \\ B_v^T X & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{pmatrix} < 0, \quad B_w^T X B_w < \gamma^2 R \quad (3)$$

разрешимы относительно  $\gamma^2 > 0$  и матрицы  $X = X^T > 0$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Отметим, что из (2) непосредственно следует

$$\gamma_{\infty,2}(H_v, H_w) \geq \max\{\gamma_\infty(H_v), \lambda_{\max}^{-1/2}(R)\gamma_2(H_w)\}.$$

Поэтому, чтобы учитывать влияние возмущений обоих типов, должно быть выполнено условие  $\gamma_{\infty,2}(H_v, H_w) > \gamma_\infty(H_v)$ . Параллельно с этим, пусть  $X_\infty$  – решение первого неравенства в (3) для  $\gamma = \gamma_\infty(H_v) + \varepsilon$ , ( $\varepsilon > 0$ ). Если получится так, что  $B_w^T X_\infty B_w < \gamma^2 R$ , то второе неравенство в (3) будет выполнено, а значит с любой степенью точности будет выполнено  $\gamma_{\infty,2}(H_v, H_w) = \gamma_\infty(H_v)$  (т.е. уровень гашения  $L_2$  возмущений совпадет с уровнем гашения совместных возмущений). Исходя из этого, в дальнейших рассуждениях будем считать, что весовая матрица  $R$  должна удовлетворять условию  $R < R_* = \gamma_\infty^{-2}(H_v) B_w^T X_\infty B_w$  (т.е. не должна быть слишком «большой»). Будем требовать выполнения условия

$$\lambda_{\max}(R^{-1}R_*) > 1. \quad (4)$$

**Синтез  $H_2/H_\infty$ -субоптимального управления.** В том случае, если система является неустойчивой или  $H_2/H_\infty$ -норма не является достаточно малой, систему можно стабилизировать и уменьшить значения нормы за счет введения обратной связи по состоянию или измеряемому выходу [13]. Так, для случая измеряемого состояния замкнутая система с обратной связью примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_v v + B_w w + B_u u, & x(0) = x_0 \\ z = Cx + D_v v + D_u u, \end{cases} \quad (5)$$

где  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  – управляемый вход (управление).

Определим  $H_2/H_\infty$ -оптимальное управление вида

$$u = \Theta x, \quad (6)$$

при котором  $H_2/H_\infty$ -норма в системе должна быть минимальной.

Определим функцию

$$\Psi(u, v, w) = \|z\|^2 - \gamma^2(\|v\|^2 + d^T R d),$$

определяющую взаимосвязь между нормами входа и выхода, которую необходимо будет минимизировать.

Тогда можно сформулировать цель управления следующим образом: обеспечить на траекториях системы (5) выполнение условия

$$\min_u \max_{v \in L_2, d \in \mathbb{R}^{n_w}} \Psi(u, v, w) \leq 0,$$

при минимально возможном  $\gamma > 0$ .

В данном случае для вычисления  $H_2/H_\infty$ -нормы, согласно теореме 1, необходимо рассмотреть систему, замкнутую управлением вида (6). Умножив матрицу из первого неравенства в (3) для замкнутой системы слева и справа на

$$\begin{pmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

обозначив  $Y = X^{-1}$  и  $Z = \Theta Y$ , получим следующее утверждение [15].

*Теорема 2.* Если выполнено условие (4), то минимальную  $H_2/H_\infty$ -норму системы с обратной связью (5), (6) можно найти при решении задачи минимизации  $\gamma^2$  с ограничениями, определяемыми следующими матричными неравенствами

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v & YC^T + Z^T D_u^T \\ B_v^T & -\gamma^2 I & D_v^T \\ CY + D_u Z & D_v & -I \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} Y & B_w \\ B_w^T & \gamma^2 R \end{pmatrix} \geq 0, \quad (7)$$

относительно  $Y = Y^T > 0$ ,  $Z$  и  $\gamma^2 > 0$ , где при минимальном значении  $\gamma^2 = \gamma_\infty^2$ ,  $R_* = \gamma_\infty^{-2} B_w^T X_\infty B_w$  и  $X_\infty$  удовлетворяют первому неравенству в (7). Матрица параметров  $H_2/H_\infty$ -оптимального управления, в данном случае, вычисляется как  $\Theta_* = ZY^{-1}$  [14].

Таким образом, при правильном выборе весовой матрицы  $R$ , можно синтезировать  $H_2/H_\infty$ -субоптимальный регулятор, обеспечивающий компромисс между  $H_2$ - и  $H_\infty$ -оптимальными регуляторами.

**Динамическая модель квадрокоптера.** С помощью уравнения Ньютона-Эйлера [16, 17] можно получить нелинейную математическую модель квадрокоптера, характеризующую его движение, в зависимости от общей тяги ( $U_1$ ) и крутящих моментов ( $U_2, U_3, U_4$ ). Данная система имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{1}{m} \cdot (\sin \psi \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi) \cdot U_1, \\ \ddot{y} = -\frac{1}{m} \cdot (-\cos \psi \cdot \sin \varphi + \sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi) \cdot U_1, \\ \ddot{z} = -\frac{1}{m} \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot U_1 + g, \\ \dot{\varphi} = p + \sin \varphi \cdot \tan \theta \cdot q + \cos \varphi \cdot \tan \theta \cdot r, \\ \dot{\theta} = q \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = q \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} + r \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}, \\ \dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \cdot q \cdot r + \frac{U_2}{I_{xx}}, \quad \dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \cdot p \cdot r + \frac{U_3}{I_{yy}}, \\ \dot{r} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \cdot p \cdot q + \frac{U_4}{I_{zz}}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $x, y, z$  – координаты положения центра масс коптера в инерциальной системе координат (ИСК);  $\varphi, \psi, \theta$  – углы Крылова, определяющие позицию коптера в ИСК;  $p, q, r$  – угловые скорости в системе координат, связанной с коптером (ССК);  $m$  – масса квадрокоптера;  $g$  – ускорение свободного падения;  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  – диагональные элементы матрицы инерции.

Чтобы решить задачу управления методами выпуклой оптимизации, линеаризуем данную модель в окрестности программной траектории.

Линеаризованная в окрестности программного движения система имеет вид:

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + B \Delta U,$$

где  $\Delta X = X - X_d$  и  $\Delta U = U - U_d$  – приращения вектора состояния и управляющего воздействия ( $X_d$  – программная траектория,  $U_d$  – программное управление),  $A$  и  $B$  – матрицы, состоящие из значений частных производных нелинейной системы (8) по параметрам вектора состояния  $X$  и управляющего воздействия  $U$ .

**Построение программной траектории.** В данной работе разобьем общую программную траекторию на 3 (основных) вида: зависание (подъем и вращение вокруг собственной оси); смещение вдоль оси OX; смещение вдоль оси OY, которые можно комбинировать и получать различные вариации движения. Программную траекторию и программное управление будем получать из исходной нелинейной системы (8). Один из возможных вариантов программной траектории, используемой в данной работе, представлена на рис. 1.

**Расчет субоптимального закона управления с  $H_2/H_\infty$ -критерием для системы с неопределенностью.** На рис. 2–5, показаны графики ошибок между желаемыми и измеренными значениями координат, скоростей, углового положения и угловых скоростей для системы с начальным состоянием  $X = (0.1 \ 0 \ -0.2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ .

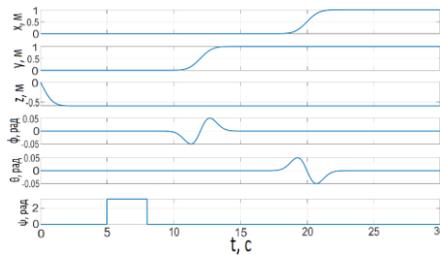


Рис. 1. Общая программная траектория полета квадрокоптера

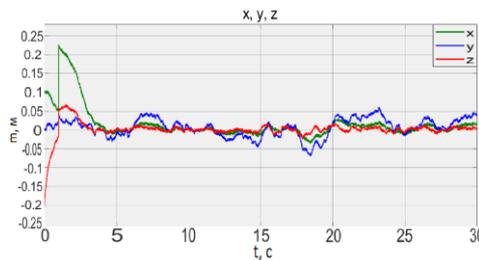


Рис. 2. Невязки координат  $x, y, z$



Рис. 3. Невязки скоростей  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

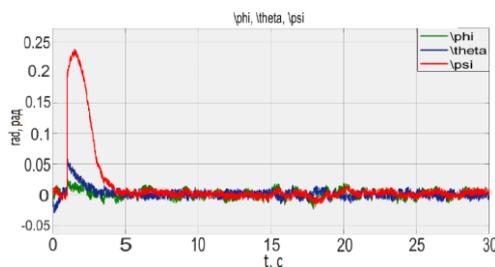


Рис. 4. Невязки углов  $\varphi, \theta, \psi$

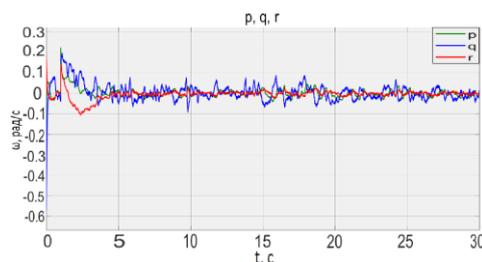


Рис. 5. Невязки угловых скоростей  $p, q, r$

**Заключение.** В работе, с помощью аппарата линейных матричных неравенств, был синтезирован субоптимальный закон управления с  $H_2/H_\infty$ -критерием. Было показано, что построенный закон управления с данным критерием позволяет оптимизировать реакцию целевого выхода на импульсные и  $L_2$ -возмущения.

При помощи уравнения Ньютона-Эйлера была построена и линеаризована модель квадрокоптера, для которой была решена задача стабилизации вдоль заданной программной траектории, при наличии импульсных и  $L_2$ -возмущений. В средах MATLAB и Simulink были вычислены матрицы параметров оптимального закона управления и произведено моделирование.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Duren P.L.* Theory of Hp Spaces. – Academic Press, 1970. – 261 p.
2. *Geir E. Dullerud, Fernando G. Paganini.* A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach. – Academic Press, 2000. – 383 p.
3. *Petersen I.R., Hollot C.V.* A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems // Automatica. – 1986. – Vol. 22. – P. 397-411.
4. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 205 p.
5. *Scherer C., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective output-feedback control via LMI optimization // IEEE Trans. Automat. Control. – 1997. – Vol. 42, No. 7. – P. 896-911.
6. *Alamo T., Normey-Rico J.E., Arahal M., Limon D. and Camacho E.* Introducing linear matrix inequalities in a control course // IFAC Proceedings. – 2006. – Vol. 39. – P. 205-210.
7. *Feron E.* Analysis of robust  $H_2$  performance using multiplier theory // SIAM Journal of Control and Optimization. – 1997. – Vol. 3. – P. 160-177.
8. *Feron E., Balakrishnan V., Boyd S., and El Ghaoui L.* Numerical methods for  $H_2$  related problems // In Proc. American Control Conference. – 1992. – P. 2921-2922.
9. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality approach to  $H_\infty$  control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 1994. – Vol. 4. – P. 421-448.
10. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1989. – Vol. 34, No. 8. – P. 831-847.
11. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed  $H_2/H_\infty$ -control: a convex optimization approach // IEEE Trans. Automat. Control. – 1991. – Vol. 36, No. 7. – P. 824-831.

12. Yeh H.H., Banda S.S. Necessary and sufficient conditions for mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  optimal control // Proceedings of 29 IEEE CDC, Hawaii, 1990. – P. 1013-1017.
13. Scherer C. Mixed  $H_2/H_\infty$  control // Trends in Control. A European Perspective. A. Isidori, ed. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – P. 173-216.
14. Коган М.М. Синтез оптимального и робастного управлений с  $H_2/H_\infty$ -критерием // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 8. – С. 3-23.
15. Sznajder M., Rotstein H., Bu J., Sideris A. An exact solution to continuous-time mixed  $H_2/H_\infty$  control problems // IEEE Trans. Automat. Control. – 2000. – Vol. 45, No. 11. – P. 2095-2101.
16. Bresciani T. Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter. Czech Technical University in Prague. Master's Thesis. Prague. June 2011. – 75 p.
17. Hoffmann G.M., Huang H., Waslander S.L., and Tomlin C.J. Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Aug. 2007. – P. 401-406.
18. Lofberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB // IEEE Int. Conf. Robot. Autom. Conf. – 2004. – P. 284-289.
19. Trenev I., Tkachenko A., Kustov A. Movement stabilization of the parrot mambo quadcopter along a given trajectory based on PID controllers // 20th IFAC Conference on Technology, Culture, and International Stability TECIS. – 2021. – Vol. 54. I.13. – P. 227-232.
20. Tkachenko A.A., Trenev I.S., Yurchenkov A.V. Stabilization problem a quadrotor using a linear-quadratic regulator: modelling and practice // 20th IFAC Conference on Technology, Culture, and International Stability TECIS. – 2021. – Vol. 54. I.13. – P. 449-453.

## REFERENCES

1. Duren P.L. Theory of Hp Spaces. Academic Press, 1970 261 p.
2. Geir E. Dullerud, Fernando G. Paganini. A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach. Academic Press, 2000 383 p.
3. Petersen I.R., Hollot C.V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems, *Automatica*, 1986, Vol. 22, pp. 397-411.
4. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994, 205 p.
5. Scherer C., Gahinet P., Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1997, Vol. 42, No. 7, pp. 896-911.
6. Alamo T., Normey-Rico J.E., Arahal M., Limon D. and Camacho E. Introducing linear matrix inequalities in a control course, *IFAC Proceedings*, 2006, Vol. 39, pp. 205-210.
7. Feron E. Analysis of robust  $H_2$  performance using multiplier theory, *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1997, Vol. 3, pp. 160-177.
8. Feron E., Balakrishnan V., Boyd S., and El Ghaoui L. Numerical methods for  $H_2$  related problems, *In Proc. American Control Conference*, 1992, pp. 2921-2922.
9. Gahinet P., Apkarian P. A Linear Matrix Inequality approach to  $H_\infty$  control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, Vol. 4, pp. 421-448.
10. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1989, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847.
11. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed  $H_2/H_\infty$ -control: a convex optimization approach, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1991, Vol. 36, No. 7, pp. 824-831.
12. Yeh H.H., Banda S.S. Necessary and sufficient conditions for mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  optimal control, *Proceedings of 29 IEEE CDC, Hawaii, 1990*, pp. 1013-1017.
13. Scherer C. Mixed  $H_2/H_\infty$  control, *Trends in Control. A European Perspective*. A. Isidori, ed. Berlin: Springer-Verlag, 1995, pp. 173-216.
14. Коган М.М. Синтез оптимального и робастного управлений с  $H_2/H_\infty$ -критерием [Synthesis of optimal and robust controls with  $H_2/H_\infty$ -criterion], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 2016, No. 8, pp. 3-23.
15. Sznajder M., Rotstein H., Bu J., Sideris A. An exact solution to continuous-time mixed  $H_2/H_\infty$  control problems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2000, Vol. 45, No. 11, pp. 2095-2101.
16. Bresciani T. Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter. Czech Technical University in Prague. Master's Thesis. Prague. June 2011, 75 p.
17. Hoffmann G.M., Huang H., Waslander S.L., and Tomlin C.J. Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Aug. 2007*, pp. 401-406.

18. *Lofberg J.* YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *IEEE Int. Conf. Robot. Autom. Conf.*, 2004, pp. 284-289.
19. *Trenev I., Tkachenko A., Kustov A.* Movement stabilization of the parrot mambo quadcopter along a given trajectory based on PID controllers, *20th IFAC Conference on Technology, Culture, and International Stability TECIS*, 2021, Vol. 54. I.13, pp. 227-232.
20. *Tkachenko A.A., Trenev I.S., Yurchenkov A.V.* Stabilization problem a quadrotor using a linear-quadratic regulator: modelling and practice, *20th IFAC Conference on Technology, Culture, and International Stability TECIS*, 2021, Vol. 54. I.13, pp. 449-453.

Статью рекомендовал к опубликованию к.ф.-м.н. А.В. Юрченков.

**Тренёв Иван Сергеевич** – Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; e-mail: trenev.99@mail.ru; г. Москва, Россия; тел.: +74953348910.

**Trenev Ivan Sergeevich** – V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences; e-mail: trenev.99@mail.ru; Moscow, Russia; phone: +74953348910.