

19. Kuliev E.V., Kravchenko Yu.A., Loginov O.A., Zaporozhets D.Yu. Metod intellektual'nogo prinyatiya effektivnykh reshenii na osnove bioinspirirovannogo podkhoda [The method of intellectual making effective decisions based on a bioinspired approach], *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [Izvestiya Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2017, No. 6-2 (80), pp. 162-169.
20. Zaporozhets D., Zaruba D., Kuliev E. Ant algorithm for determining of critical CONNECTIONS IN VLSI, *Proceedings of 2018 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTS 2018. Electronic publication*, 2018, pp. 8524709.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.И. Витиска.

Заруба Дарья Викторовна – Южный федеральный университет; e-mail: dzaruba@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 88634371651; ассистент.

Кулиев Эльмар Валерьевич – e-mail: ekuliev@sfedu.ru; доцент.

Запорожец Дмитрий Юрьевич – e-mail: zaporozhets@sfedu.ru; доцент.

Семенова Марина Максимовна – e-mail: bogomolova@sfedu.ru; студент.

Zaruba Darya Viktorovna – Southern Federal University; e-mail: dzaruba@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371651; assistant.

Kuliev Elmar Valerievich – e-mail: ekuliev@sfedu.ru; associate professor.

Zaporozhets Dmitry Yurievich – e-mail: zaporozhets@sfedu.ru; associate professor.

Semenova Marina Maximovna – e-mail: bogomolova@sfedu.ru; student.

УДК 004.891.2

DOI 10.18522/2311-3103-2021-4-128-144

А.Н. Целых, В.С. Васильев, Л.А. Целых

АЛГОРИТМ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В НЕСТОХАСТИЧЕСКИХ ПРИЧИННЫХ МОДЕЛЯХ В ОТСУТСТВИИ НАБЛЮДАЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ СИСТЕМ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ*

Рассматривается проблема репликации процесса принятия человеком управленческих решений в условиях неопределенности и неполноты исходных данных. Лицо, принимающее решение, опирается на свою систему взглядов, в которую входит общее видение системы, относительно которой принимается решение. Система представлена в виде причинной модели, созданной на основе ментальных представлений человека. Эти модели представляют собой направленные графы, на дугах которых причинность выражена в виде меток, которые имеют знак, определяющий направление изменений состояния системы. Вершины этого направленного графа представляют собой концепты высокого уровня абстракции. Такой граф моделирует функционирование реальной системы. Таким образом, мы исследуем проблему предсказания и управления действиями человека на основе нестохастических причинных моделей в отсутствие наблюдаемых переменных для использования в системах поддержки принятия решений и экспертных системах. Принятие решений рассматривается с точки зрения выбора объектов приложения управленческих воздействий – факторов модели. В настоящем исследовании мы показываем, что применение предложенного алгоритма может облегчить принятие решений относительно выбора управляющих воздействий, которые поддерживают достижение тактических и стратегических целей лица, принимающего решения. Следует отметить, что алгоритм реализует автоматизированный подбор параметра регуляризации, что делает доступным разработку и применение пред-

* Работа выполнена при поддержке гранта Российского Фонда фундаментальных исследований № 19-01-00109.

ложенного алгоритма для пользователей, не имеющих достаточной математической подготовки. Сходимость последовательности множителя Лагранжа алгоритма эффективных управлений доказана. Доказана теорема о резонансе в нестохастической причинной модели, представленной направленным графом, который определяется областью допустимых значений коэффициента демпфирования в модели управления. Ожидается, что внедрение этого инструмента в системы поддержки принятия решений повысит надежность решений, принимаемых в отношении работы системы в целом. Выбор управляющих воздействий с использованием предложенного алгоритма имеет высокую эффективность и производительность. Таким образом, результаты, представленные в исследовании, могут быть полезны для разработки приложений в интеллектуальных системах.

Эффективное управление; причинные модели; принятие управленческих решений; оптимизационные методы; направленный взвешенный знаковый граф.

A.N. Tselykh, V.S. Vasilev, L.A. Tselykh

ALGORITHM OF EFFECTIVE CONTROLS FOR NONSTOCHASTIC CAUSAL MODELS IN THE ABSENCE OF OBSERVABLE VARIABLES FOR SYSTEMS OF DECISION MAKING CONTROL

The paper deals with the problem of reproducing the decision-making process by a person under conditions of uncertainty and incompleteness of the initial data. The decision-maker relies on his belief system, which includes a shared vision of the system in relation to which the decision is being made. The system is presented in the form of a causal model created on the basis of human mental representations. These models are directed graphs, on the arcs of which the causal relationship is expressed in the form of labels with a sign that determines the direction of change in the state of the system. The vertices of this directed graph are high-level abstraction concepts. This graph simulates the functioning of a real system. Thus, we investigate the problem of predicting and controlling human actions based on non-stochastic causal models in the absence of observable variables for use in decision support systems and expert systems. Decision-making is considered from the point of view of the choice of objects of application of managerial influences - the factors of the model. In this study, we show that the application of the proposed algorithm can facilitate decision-making regarding the choice of control actions that support the achievement of the tactical and strategic goals of the decision maker. It should be noted that the algorithm implements an automatic selection of the regularization parameter, which makes the development and application of the proposed algorithm available to users who do not have sufficient mathematical training. The convergence of the sequence of Lagrange multipliers of an effective control algorithm is proved. The theorem on resonance in a non-stochastic causal model, represented by a directed graph, which is determined by the range of admissible values of the damping coefficient in the control model, is proved. It is expected that the introduction of this tool into decision support systems will increase the reliability of decisions regarding the operation of the system as a whole. The choice of control actions using the proposed algorithm has high efficiency and productivity. Thus, the results presented in the study can be useful for developing applications in intelligent systems.

Effective control; causal models; decision-making; optimization methods; directed weighted signed graph.

1. Введение. Данное исследование адресуется к проблеме репликации процесса принятия управленческих решений человеком как части системы искусственного интеллекта, которая стремится воспроизвести этот процесс. Роботизация этого процесса в социальных, политических и социально-экономических системах является ключевой проблемой управления в организациях. В отличие от роботизированной автоматизации разных рабочих процессов в управлении организацией (robotic process automation, RPA), которые, по сути, представляют собой сбор, сортировку и организацию соответствующих данных для повторяющихся процедур, и которые можно достаточно точно описать, процесс принятия управленческих решений отличается высокой степенью неопределенности и никогда не повторяется в точности.

Лицо, принимающее решение (ЛПР), опирается на свою систему взглядов, в которую входит видение системы, относительно которой принимается управленческое решение. Система может быть представлена в виде причинной модели, создаваемой на основе человеческих ментальных репрезентаций. Эти модели представляют собой направленный граф, на дугах которого причинность выражена в виде некоторых меток, которые имеют знак, определяющий направление изменений состояния следствий. Вершины этого направленного графа представляют собой комплексные концепты высокого уровня абстракции в моделируемой системе. Такой граф моделирует функционирование реальной системы.

Мы исследуем проблему предсказания и управления действиями ЛПР на основе нестохастических причинных моделей (СМ) в отсутствии наблюдаемых переменных в системах поддержки принятия управленческих решений и экспертных системах. Принятие решений рассматривается с точки зрения выбора объектов приложения управленческих воздействий – факторов модели. По сути, требуется получить ответ на вопрос «Что делать?».

В настоящее время проблема максимизации влияния получила широко изучается в последнее десятилетие [1] и находит приложения в разных областях, таких как вирусный маркетинг [2], распространение информации [3], рекомендации специалистов [4], системы сообществ [5], управление взаимоотношениями с клиентами в социальных сетях [6], теория перколяции [7], теория кооперативных игр [8], стратегии поиска [9], коллективное принятие решений [9], центральность сетей [10] и др.

Однако в этих работах решается задача выбора нескольких узлов (факторов, пользователей) с целью наиболее широкого распространения влияния, т.е. максимизации количества узлов, получивших отклик системы. При этом не ставится никакой цели по мощности этого влияния на конкретные узлы и систему в целом. Поэтому выбор наиболее оптимального воздействия требует полного перебора всех вариантов, что является очень трудоемкой и затратной задачей. При принятии же управленческого решения ставится совершенно иная задача – выбор узлов (оптимальных), воздействие на которые приведет к максимальному отклику конкретных целевых узлов и системы в целом.

В данном исследовании представляется алгоритм эффективных управлений на основе передачи причинных влияний с целью выбора оптимальных управляющих воздействий для максимального отклика целевых факторов модели. Поскольку причинные модели социальных, политических и социально-экономических систем содержат сложные комплексные факторы, которые не могут (в силу своей природы) иметь непосредственно наблюдаемые переменные, то уравнение управления содержит как управляющее воздействие, так и результирующий отклик в виде неизвестных переменных. Проблема поиска оптимального управления на графах решается как задача оптимизации максимизации целевой функции влияния, которая ранжирует факторы модели на основе их вклада в вектор направленности развития системы и предоставляет инструмент для определения наиболее продуктивных факторов СМ.

2. Обзор публикаций, связанных с темой исследования. Проблема максимизации влияния была впервые определена как проблема дискретной оптимизации в известной работе 2003 года [11]. С тех пор было разработано множество предложений, чтобы попытаться решить проблему как можно лучше с точки зрения точности, временной сложности, пространственной сложности или масштабируемости [12].

Существуют две хорошо известные модели для представления феномена распространения влияния через социальные сети: модель линейного порога (LT-модель), основанная на некоторых идеях коллективного поведения, и модель независимого

каскада. (IC-модель), основанная на маркетинговых идеях [11]. Независимо от рассматриваемой модели распространения влияния, проблема максимизации влияния остается следующей: для данного графа влияния найти минимальное начальное число узлов (начальная активация), которые максимизируют распространение влияния по сети. Проблема решалась со следующими целями: максимизация распространения влияния (по охвату узлов) с учетом размера их начального числа [11], либо, минимизация начального набора узлов с фиксированным количеством узлов отклика [13].

Выбор динамической модели является определяющим для выявления влиятельных узлов. В целом, используются два типа моделей динамики: модели возбудимых сред [11, 14, 15] и модели с внешними воздействиями [16, 17]. Главным различием в этих подходах является наличие переменной воздействия (управления) в уравнении динамики. В модели возбудимых сред отсутствует переменная управления, поэтому определить ее математически в результате решения оптимизационной задачи не представляется возможным. Основным ограничивающим требованием в моделях управления [16, 17] является требование точного уравнения динамики, описывающего поведение системы. При принятии управленческих решений требуется воздействие не на все, а на наиболее влияющие вершины, однако применяемая методология не предполагает введение ограничений к состоянию и управлению. Кроме того, методы выявления влиятельных узлов в сетях, в основном, базируются на топологических характеристиках сети, а также случайном характере и информационной природе типа распространения влияния по сети [18]. Следствием этого является то, что матрица смежности графа сети является стохастической матрицей [19, 20]. Исследуемые причинные модели, представленные направленными графами, имеют матрицу нестохастической природы. Поэтому вышеперечисленные методы, используемые для сетей, не могут быть применены для рассматриваемых моделей и требуется разработка новых подходов и алгоритмов.

3. Описание метода. Мы рассматриваем нестохастические каузальные модели, которые имеют (1) качественную и нечисловую природу узлов и связей; (2) ненаблюдаемые переменные; (3) плохоформализуемые узлы; and (4) отсутствие и невозможность получения данных временных рядов. Эти характеристики требуют рассматривать задачу управления в параметрах воспроизводимого тренда для состояний узлов модели, в отличие от традиционных подходов, когда прогнозируются физические (наблюдаемые и измеряемые) показатели состояний концептов модели. Мы исследуем процесс принятия решений с позиций выбора управляющих воздействий лицом, принимающим решения. Далее рассматривается следующая модель эффективного управления.

3.1. Постановка задачи эффективного управления в нестохастических причинных моделях. Рассмотрим граф $G = \langle W, E \rangle$, представляющий качественную СМ, где $W = \{W_1, W_2, \dots, W_N\}$ – набор вершин; $E \in W \times W$ – набор дуг. Граф определяется матрицей смежности A^T , где $a_{i,j}; 1 \leq i, j \leq n$ – весовой элемент матрицы $A = (a_{i,j})_{n \times n}$. Рассмотрим следующую модель управления:

$$\xi_i^{s+1} = \xi_i^s + u_i^s + \delta \sum_{j=1}^n a_{i,j} (\xi_j^s - \xi_j^{s-1}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad s \geq 1, \quad (1)$$

где n – количество вершин сети; δ – коэффициент демпфирования; ξ_i^s – состояние i -й вершины в момент времени t_s ; u_i^s – внешнее управляющее воздействие на вершину i в интервале времени $t_s \leq t < t_{s+1}$; $a_{i,j}$ – вес на дуге. Значение веса вы-

ражает силу причинности, с которой управляющее воздействие распространяется от вершины j к вершине i . Управляющее воздействие $u_i^s = u_i$ ($1 \leq i \leq n$) не зависит от s . Тогда вектор $\mathbf{x} = (x_i)_n$ представляет собой воспроизводимый тренд, компоненты которого также не зависят от s :

$$x_i = \xi_i^{s+1} - \xi_i^s = \xi_i^s - \xi_i^{s-1}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

Исходя из изложенного выше, модель управления $\mathcal{H} := (\mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \delta)$ задается следующей системой линейных уравнений (СЛАУ):

$$(\mathbf{I} - \delta \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{u}, \quad (3)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица; $\mathbf{u} = (u_i)_n$ – вектор воздействия; $\mathbf{x} = (x_i)_n$ – вектор отклика. С учетом модели управления (3), для получения пары векторов \mathbf{x} и \mathbf{u} , выражающих эффективное управление, необходимо оптимизировать следующую задачу нелинейной оптимизации:

$$\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}} \rightarrow \max, \quad (4)$$

где $\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \delta \mathbf{A})^T (\mathbf{I} - \delta \mathbf{A})$ – матрица квадратичной формы.

Обозначим $N^{(0)}$, $N^{(+)}$, $N^{(-)}$ как множество индексов вершин с ограничениями на управляющие воздействия \mathbf{u} , где $N^{(0)} = \{i \mid u_i = 0; 1 \leq i \leq n\}$ – множество индексов вершин, на которых управляющее воздействие не может быть оказано (по природе этой вершины); $N^{(+)} = \{j \mid u_j \geq 0; 1 \leq j \leq n\}$ и $N^{(-)} = \{k \mid u_k \leq 0; 1 \leq k \leq n\}$ – множество индексов вершин с ограничениями на направление управляющих воздействий (положительное или отрицательное, соответственно). Матрица ограничений $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \quad \dots \quad \mathbf{n}_L)$ имеет $L = |N^{(0)}| + |N^{(+)}| + |N^{(-)}|$ столбцов и n строк, где j -й столбец матрицы \mathbf{N} определяется как $\mathbf{n}_j = \pm \delta_j^i$, где $\delta_j^i = [i = j]$ – дельта Кронекера, равная $n_j^i = \delta_j^i$ при $j \in N^{(0)}$, $j \in N^{(+)}$, и $n_j^i = -\delta_j^i$ при $j \in N^{(-)}$. Учитывая (3), запишем ограничения в матричной нотации $\mathbf{C} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\mathbf{I} - \delta \mathbf{A})$.

Задача (4) сводится к задаче квадратичного программирования (5) относительно вектора \mathbf{x} (или \mathbf{u}) при линейных ограничениях $\mathbf{C} \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ и условии нелинейной нормировки $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \rightarrow \min, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{C} \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (5)$$

Получаем $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$, $1 \leq k \leq m$ что удовлетворяет условиям ортогональности $(\mathbf{u}^l)^T \mathbf{u}^k = 0$, $l \neq k$, $1 \leq k, l \leq m$, где k, l (в верхнем индексе) – индексы ортогональных управлений, m – количество ортогональных управлений. Эти решения могут представлять самостоятельный интерес. Кроме того, получение нескольких последовательностей решений необходимо для уверенного выбора нужной пары векторов в случае относительно жестких условий $\mathbf{C} \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. В этом случае для задачи (5) получаем последовательность задач (6):

$$(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{B} \mathbf{x}^k \rightarrow \min, (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k = 1, \mathbf{C}_k \mathbf{x}^k \geq \mathbf{0}, 1 \leq k \leq m, \quad (6)$$

где $(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k = 1$ – нелинейные ограничения; $(\mathbf{u}^j)^T \mathbf{u}^k = (\mathbf{x}^j)^T \mathbf{B} \mathbf{x}^k = 0$ – условия ортогональности, последовательно расширяющие систему ограничений $\mathbf{C}_k \mathbf{x}^k \geq \mathbf{0}$.

3.2. Алгоритм эффективных управлений. Функция Лагранжа для задачи (6) имеет вид

$$L_k = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{B} \mathbf{x}^k + \frac{1}{2} \lambda_0 (1 - (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k) - (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{C}_k^T \mathbf{y} \rightarrow \min, 1 \leq k \leq m, \quad (7)$$

где λ_0 – множитель Лагранжа, соответствующий нелинейному ограничению $(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k = 1$; \mathbf{y} – вектор множителей y_j Лагранжа, соответствующих остальным ограничениям; \mathbf{C}_k – матрица ограничений. Матрица \mathbf{C}_k включает ограничения нахождения управления \mathbf{u}^k в допустимом конусе, образованном линейно-независимыми векторами \mathbf{w}^j ($1 \leq j \leq i$), т.е.:

$$\mathbf{u}^k = \eta_1^k \mathbf{w}^1 + \eta_2^k \mathbf{w}^2 + \dots + \eta_i^k \mathbf{w}^i, \eta_1^k \geq 0, \eta_2^k \geq 0, \dots, \eta_i^k \geq 0,$$

где η_j^k ($1 \leq j \leq i$) – коэффициенты разложения, что может быть выражено матричным покомпонентным неравенством (математический вывод см. [21]):

$$(\mathbf{w}^T \mathbf{w})^{-1} \mathbf{w}^T \mathbf{u}^k = (\mathbf{w}^T \mathbf{w})^{-1} \mathbf{w}^T \mathbf{z} \mathbf{x}^k \geq \mathbf{0}, \quad (8)$$

где $\mathbf{W} = (\mathbf{w}^1 \mid \mathbf{w}^2 \mid \dots \mid \mathbf{w}^i)$ – матрица, столбцами которой являются векторы \mathbf{w}^j ($1 \leq j \leq i$). В частности, если набор векторов \mathbf{w}^j ($1 \leq j \leq i$) состоит только из базисных векторов пространства управлений \mathbf{u}^k , то неравенства (8) сводятся к неравенствам вида:

$$u_j^k \leq 0, u_j^k = 0, u_j^k \geq 0.$$

Если требуется обеспечить превосходство выходного значения x_j^k фактора j над выходным значением x_q^k фактора q , то матрица \mathbf{C}_k дополняется ограничениями частичного порядка $|x_q^k| \leq x_j^k$ при положительном ожидаемом выходе x_j^k или $|x_q^k| \leq -x_j^k$ при отрицательном ожидаемом выходе x_j^k , т.е.:

$$x_q^k \leq x_j^k, -x_q^k \leq x_j^k \quad \text{или} \quad x_q^k \geq x_j^k, -x_q^k \geq x_j^k.$$

По мере нахождения решений $\mathbf{u}^k, \mathbf{x}^k$ матрица \mathbf{C}_k дополняется ограничениями попарной ортогональности различных управлений:

$$(\mathbf{u}^j)^T \mathbf{u}^k = (\mathbf{x}^j)^T \mathbf{B} \mathbf{x}^k = 0, 1 \leq j < k.$$

Необходимые условия минимума функций (7) представляют собой систему:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T)\mathbf{x}^k - \lambda_0 \mathbf{x}^k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{y} = \mathbf{0}, \\ \nabla_{\lambda_0} L = \frac{1}{2}(1 - (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k) = 0, \\ \mathbf{C}_k \mathbf{x}^k \geq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (9)$$

С учётом $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) = \mathbf{B}$ линеаризованная система (9) [22] представляет следующую итерационную схему:

$$\begin{cases} (\mathbf{B} + \alpha \mathbf{I})\hat{\mathbf{x}}^k - \lambda_0 \hat{\mathbf{x}}^k - \hat{\lambda}_0 \mathbf{x}^k - \mathbf{C}_k^T \hat{\mathbf{y}} = (\alpha - \lambda_0)\mathbf{x}^k, \\ (\mathbf{x}^k)^T \hat{\mathbf{x}}^k = \frac{1}{2}(1 + (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k), \\ \tilde{\mathbf{C}}_k \hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (10)$$

где α – параметр регуляризации (по А.Н. Тихонову [23]), $\tilde{\mathbf{C}}_k$ – матрица, образованная активными ограничениями. С учётом $(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k = 1$ система уравнений (10) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{r}, \end{cases}$$

где $\beta = \alpha - \lambda_0$; $\mathbf{H} = \mathbf{B} + \beta \mathbf{I}$; $\hat{y}_0 = \hat{\lambda}_0 + \beta = \hat{\lambda}_0 - \lambda_0 + \alpha$; $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^k \\ \tilde{\mathbf{C}}_k^T \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{\mathbf{y}}^T \end{pmatrix}$;
 $\mathbf{r} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$.

Решение задач (7) может быть найдено с помощью следующего алгоритма. Алгоритм представлен в табл. 1, его встроенная функция GSBOP представлена в табл. 2. Алгоритм использует следующие обозначения:

\mathbf{A}^T – матрица смежности графовой причинной модели;

δ – демпинг-фактор;

V_e – множество индексов строк матрицы \mathbf{C} , которые соответствуют ограничениям в форме равенств;

V_i – множество индексов строк матрицы \mathbf{C} , которые соответствуют ограничениям в форме неравенств;

V – множество активных ограничений (ограничения в форме равенств активны всегда).

Q – множество неактивных ограничений;

$V \cup Q = V_e \cup V_i$, $V_e \subseteq V$, $Q \subseteq V_i$.

$\mathbf{c}_j = (c_{j,1} \ c_{j,2} \ \dots \ c_{j,n})$ – j -я строка матрицы \mathbf{C} .

Изначально матрица \mathbf{C} имеет l строк, соответствующим ограничениям в форме равенств и в форме неравенств: $|V_e| + |V_i| = l$.

$\tilde{\mathbf{C}} = (c_{j,l})_{j \in V, 1 \leq l \leq n}$ – матрица, составленная из строк матрицы \mathbf{C} , соответствующих активным ограничениям $\mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

λ_0 – множитель Лагранжа, соответствующий нелинейному ограничению $(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{x}^k = 1$.

\mathbf{y} – вектор множителей y_j Лагранжа, соответствующих остальным ограничениям;

e – норма невязки;
 ε – порог снижения невязки;
 p – параметр квадратичного штрафа;
 \mathbf{D} – матрица двойственной задачи;
 \mathbf{r} – вектор правой части двойственной задачи;
 $\mathbf{u}^k, \mathbf{x}^k$ ($1 \leq k \leq m$) – пары эффективных управлений;
 α – параметр регуляризации (по А.Н. Тихонову).

Таблица 1

**Алгоритм эффективных управлений на основе передачи влияний
в нестохастических причинных моделях**

1:	Input: $\mathbf{A}, \delta, \mathbf{C}, V_e, V_i;$
2:	$\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \delta \mathbf{A};$
3:	$\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{Z}^T \mathbf{Z};$
4:	$\mathbf{C}_1 \leftarrow \mathbf{C};$
5:	$k \leftarrow 1;$
6:	while $k \leq m$ do
7:	$\alpha \leftarrow 10^4$
8:	initialization $\mathbf{x}^k;$
9:	GSBOP;
10:	$\lambda_0 \leftarrow 0;$
11:	$\mathbf{y} \leftarrow (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T;$
12:	$e \leftarrow \varepsilon;$
13:	while $e \geq \varepsilon$ do
14:	$V \leftarrow V_e; Q \leftarrow \emptyset;$
15:	for $j \in V_i$ do
16:	if $\mathbf{c}_j \mathbf{x}^k \geq y_j / p$ then
17:	$y_j \leftarrow 0; Q \leftarrow Q \cup \{j\};$
18:	else
19:	$V \leftarrow V \cup \{j\};$
20:	endif
21:	endfor
22:	$\beta \leftarrow \alpha - \lambda_0;$
23:	$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{B} + \beta \mathbf{I};$
24:	$\mathbf{G} \leftarrow (\mathbf{x}^k \ \tilde{\mathbf{C}}_k^T);$
25:	$\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G};$
26:	$\mathbf{D} \leftarrow \mathbf{G}^T \mathbf{T};$
27:	$\mathbf{r} \leftarrow (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T;$
28:	$\tilde{\mathbf{y}} = (y_0 \ \mathbf{y}^T)^T \leftarrow \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r};$

29:	$\mathbf{x}^k \leftarrow \mathbf{T}\tilde{\mathbf{y}};$
30:	GSBOP;
31:	$\lambda_0 \leftarrow y_0 - \beta;$
32:	$\mathbf{G} \leftarrow (\mathbf{x}^k \parallel \tilde{\mathbf{C}}_k^T);$
33:	$e \leftarrow y_0 - \alpha = \left(\ \mathbf{H}\mathbf{x}^k - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{y}}\ ^2 + \ \mathbf{G}^T \mathbf{x}^k - \mathbf{r}\ ^2 \right)^{1/2};$
34:	endwhile
35:	$\mathbf{u}^k \leftarrow \mathbf{Z}\mathbf{x}^k;$
36:	$\mathbf{c}_{l+k} \leftarrow (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{B};$
37:	$V_e \leftarrow V_e \cup \{l+k\};$
38:	$k \leftarrow k + 1;$
39:	$\alpha \leftarrow 0.5\alpha$
40:	endwhile
41:	Output: $\mathbf{u}^k, \mathbf{x}^k$ ($1 \leq k \leq m$);

Таблица 2

Алгоритм встроенной функции GSBOP.

1:	for $j := 1$ to $k - 1$ do
2:	$\gamma \leftarrow \mathbf{c}_{l+j} \mathbf{x}^k / \mathbf{c}_{l+j} \mathbf{c}_{l+j}^T;$
3:	$\mathbf{x}^k \leftarrow \mathbf{x}^k - \gamma \mathbf{c}_{l+j}^T;$
4:	endfor
5:	$\mathbf{x}^k \leftarrow \mathbf{x}^k / \ \mathbf{x}^k\ ;$
6:	end function GSBOP;

3.3. Теорема о резонансе в причинной модели, представленной направленным графом. Любую матрицу можно представить в виде суммы симметричной $\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ и антисимметричной $\mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ матриц

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

В отношении симметричной матрицы \mathbf{A}_s можно утверждать, что все её собственные числа вещественные, и выполняется

$$\lambda_{\min} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A}_s \mathbf{x} \leq \lambda_{\max} \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad (11)$$

где λ_{\min} и λ_{\max} – минимальное и максимальное собственные числа матрицы \mathbf{A}_s . Утверждать, что все собственные числа одного знака можно только для знакоопределённых симметричных матриц. Возможны три случая:

$$\lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} < 0, \quad \lambda_{\min} \leq 0 \leq \lambda_{\max}, \quad 0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}.$$

Теорема 2. Если минимальное собственное число λ_{\min} матрицы $\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$, где \mathbf{A} – матрица смежности графовой модели (3), положи-

тельно ($\lambda_{\min} > 0$), то при некотором значении δ из интервала $\lambda_{\max}^{-1} \leq \delta \leq \lambda_{\min}^{-1}$ происходит смена знака скалярного произведения оптимальных решений задачи (4) с $\mathbf{u}^T \mathbf{x} > 0$ на $\mathbf{u}^T \mathbf{x} < 0$.

Доказательство. Заметим, что при $\delta = 0$ выполняется $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^T \mathbf{x} > 0$, то есть вектор отклика \mathbf{x} тождественен вектору воздействия (управления) \mathbf{u} и, следовательно, знак проекции вектора отклика \mathbf{x} на вектор воздействия \mathbf{u} положительный.

В общем случае:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \delta \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}_s \mathbf{x}.$$

Но если $\lambda_{\min} > 0$, то при $\delta > \lambda_{\min}^{-1}$ выполняется:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}_s \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \delta \lambda_{\min} \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (1 - \delta \lambda_{\min}) \mathbf{x}^T \mathbf{x} < 0.$$

С другой стороны, при $0 < \delta < \lambda_{\max}^{-1}$ выполняется:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}_s \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \delta \lambda_{\max} \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (1 - \delta \lambda_{\max}) \mathbf{x}^T \mathbf{x} > 0.$$

Поэтому в интервале $\lambda_{\max}^{-1} \leq \delta \leq \lambda_{\min}^{-1}$ происходит смена знака с $\mathbf{u}^T \mathbf{x} > 0$ на $\mathbf{u}^T \mathbf{x} < 0$, то есть положительный знак проекции вектора отклика \mathbf{x} на вектор воздействия \mathbf{u} сменяется отрицательным.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если максимальное собственное число λ_{\max} матрицы \mathbf{A}_s положительно, то в интервале $0 \leq \delta < \lambda_{\max}^{-1}$ сохраняется положительный знак проекции вектора отклика \mathbf{x} на вектор воздействия \mathbf{u} . В противном случае положительный знак проекции вектора отклика \mathbf{x} на вектор воздействия \mathbf{u} сохраняется при $0 \leq \delta < +\infty$.

Следствие 2. На решениях задач оптимизации (4), (5) (условной или безусловной) границы (11) сужаются, следовательно, границы $0 \leq \delta < \lambda_{\max}^{-1}$, в которых сохраняется положительный знак проекции вектора отклика \mathbf{x} на вектор воздействия \mathbf{u} , расширяются.

Теорема 3. Если матрица \mathbf{A}^T модели имеет ненулевое действительное собственное число $\lambda \neq 0$ (простое или кратное), то при $\delta = \lambda^{-1}$ на собственном векторе \mathbf{e} матрицы \mathbf{A}^T , соответствующем собственному числу λ , достигается нулевое значение минимума квадратичной формы (5) и, соответственно, бесконечный разрыв целевой функции (4).

Доказательство. Если матрица \mathbf{A}^T имеет ненулевое действительное собственное число $\lambda \neq 0$ (простое или кратное), то в любом случае (матрица приводится к диагональной или приводится только к нормальной Жордановой форме) может быть указан хотя бы один собственный вектор \mathbf{e} , соответствующий этому собственному числу.

Тогда матрица $\mathbf{I} - \delta \mathbf{A}^T$ имеет собственное число $1 - \delta \lambda$ и соответствующий ему собственный вектор \mathbf{e} . При $\delta = \lambda^{-1}$ собственное число $1 - \delta \lambda$ оказывается нулевым, и на собственном векторе \mathbf{e} достигается нулевое значение квадратичной формы (5), и, соответственно, бесконечный разрыв целевой функции (4).

Теорема доказана.

Следствие 3. Если матрица \mathbf{A}^T модели имеет действительное собственное число $\lambda > 1$, то бесконечный разрыв целевой функции (4) происходит в интервале $0 < \delta < 1$.

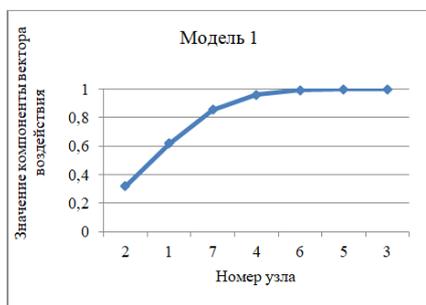
Следствие 4. В случае комплексного собственного числа $\lambda \neq 0$ матрицы \mathbf{A}^T целевая функция (4) в окрестности значения $\delta = 1/\text{Re} \lambda$ будет иметь не бесконечный разрыв, а конечный максимум.

4. Эксперимент. Реализуемость предлагаемого алгоритма была проверена на тестовых моделях, параметры которых и ограничения моделирования приведены в табл. 3. Как показано на рис. 1, вклады компонентов вектора воздействия, сгенерированные алгоритмом, уверенно определяют истинный рейтинг вершин во всех тестовых случаях. Четкая идентификация влиятельных узлов исследуемых моделей происходит за счет резкого изменения угла кривой, который соответствует границам областей скачкообразных изменений показателя эффективности.

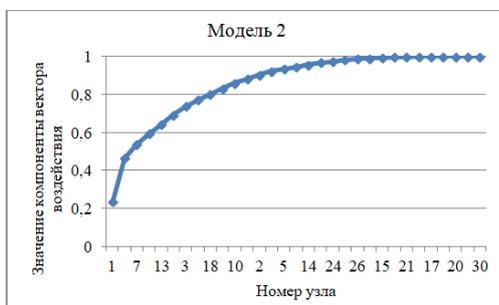
Таблица 3

Параметры тестовых моделей

№	Источник	Наименование модели	Параметр регуляризации α	Демпинг-фактор δ	Ограничения для узлов на параметры функционирования модели:	
					$u_i = 0$	$x_i \leq 0$
1	2	3	4	5	6	7
	[29]	Преступление и наказание, 7x7	3000	1,0	3	4, 6, 7
	[30]	Южная Корея, 31x31	70	0,4	8, 20, 23, 29, 30	-
	[32]	Корпоративный менеджмент, 75x75	250	0,2	1,2,59,60,62,63, 65-75	
	[33]	Инженерное образование, 15x15.	50	0,2	6,7,13,15	12



а



б

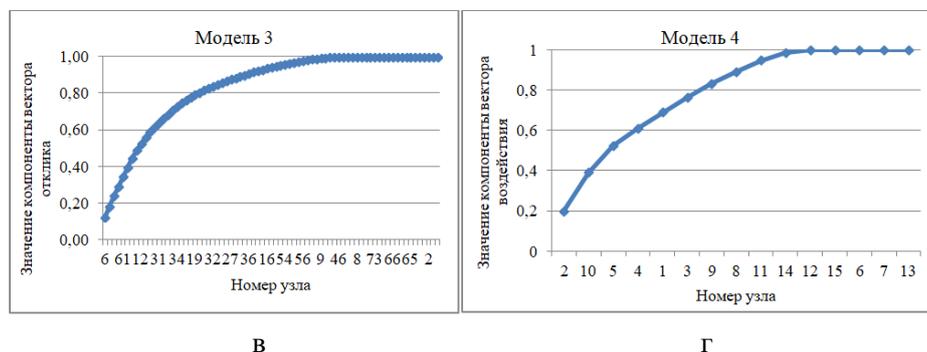


Рис. 1. Компоненты вектора эффективных управлений (управляющих воздействий). Легенда: а – для модели 1, б – для модели 2, в – для модели 3, г – для модели 4 (табл. 3)

5. Анализ полученных результатов. Технические параметры алгоритма оценивались по критерию сходимости, времени работы и автоматизации параметра регуляризации α .

5.1. Теорема о сходимости последовательности множителя Лагранжа алгоритма эффективных управлений. Для задачи оптимизации (5)

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \rightarrow \min ; \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 = 1, \mathbf{C} \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Построим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \lambda (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x}) - \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \boldsymbol{\mu} \rightarrow \min . \quad (12)$$

Необходимые условия минимума будут иметь вид:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} - \mathbf{C}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \\ \nabla_{\lambda} L = \frac{1}{2} (1 - \mathbf{x}^T \mathbf{x}) = 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{\mu}} L = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

где $\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T)$. Итерационный процесс основан на линеаризованной системе уравнений:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{x}} - \hat{\lambda} \tilde{\mathbf{x}} - \lambda \tilde{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{C}}^T \hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}, \\ \frac{1}{2} (1 - \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{x}^T (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = 0, \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} / \|\tilde{\mathbf{x}}\|. \end{cases}$$

Будем различать $\tilde{\mathbf{x}}_s$ полученное в результате решения системы на итерации s , и нормализованное $\hat{\mathbf{x}}_s = \tilde{\mathbf{x}}_s / \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|$. В этом случае после каждой итерации поддерживается $\hat{\mathbf{x}}_s^T \hat{\mathbf{x}}_s = \|\hat{\mathbf{x}}_s\|^2 = 1$. Тогда итерационная схема с регуляризацией по А.Н. Тихонову имеет вид

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \lambda_{s+1}\mathbf{x}_s - \lambda_s\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} + \lambda_s\mathbf{x}_s + \alpha(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) - \tilde{\mathbf{C}}_s^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{s+1} = \mathbf{0}, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{x}_s^T\mathbf{x}_s) - \mathbf{x}_s^T(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) = 0, \\ \tilde{\mathbf{C}}_s\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}_{s+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{s+1}/\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\|. \end{cases} \quad (13)$$

Если множество индексов $A_{s+1} = \{k | \mathbf{c}_k\mathbf{x}_s < \mu_{k,s}/p\}$ ограничений в виде равенства активны (\mathbf{c}_k – k -я строка матрицы \mathbf{C} , p – параметр квадратичного штрафа), то $\tilde{\mathbf{C}}_s$ не зависит от s , то есть $\tilde{\mathbf{C}}_s = \tilde{\mathbf{C}}$.

Теорема 1. Если множество индексов A_s ограничений в форме равенства активны, то последовательность множителя Лагранжа $\{\lambda_s\}$, соответствующая нелинейным ограничениям, является сходящейся при $\alpha \geq \lambda_{\max}$ (λ_{\max} – максимальное собственное число матрицы $\bar{\mathbf{B}}$).

Доказательство. В силу $\mathbf{x}_s^T\mathbf{x}_s = 1$, второе уравнение системы (13) может быть записано в одной из форм:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{x}_s^T\mathbf{x}_s) - \mathbf{x}_s^T(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{x}_s^T\mathbf{x}_s) - \mathbf{x}_s^T\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} = 1 - \mathbf{x}_s^T\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} = -\mathbf{x}_s^T(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) = 0. \quad (14)$$

В силу неравенства Коши-Буняковского выполняется:

$$(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}, \tilde{\mathbf{x}}_{s+1}) = \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\|^2 \geq 1.$$

Поскольку $\|\mathbf{x}_s\| = 1$, $\mathbf{x}_s^T\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} = 1$, и $\mathbf{x}_s^T\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} \leq \|\mathbf{x}_s\|\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\|$, получаем три скалярных произведения первого уравнения системы (A):

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T\bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \lambda_{s+1}\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T\mathbf{x}_s + (\alpha - \lambda_s)\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) - \tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T\tilde{\mathbf{C}}_s^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{s+1} = 0,$$

$$\mathbf{x}_s^T\bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \lambda_{s+1}\mathbf{x}_s^T\mathbf{x}_s + (\alpha - \lambda_s)\mathbf{x}_s^T(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) - \mathbf{x}_s^T\tilde{\mathbf{C}}_s^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{s+1} = 0,$$

$$(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s)^T\bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \lambda_{s+1}(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s)^T\mathbf{x}_s + (\alpha - \lambda_s)\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 - (\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s)^T\tilde{\mathbf{C}}_s^T\hat{\boldsymbol{\mu}}_{s+1} = 0.$$

Во всех случаях последние слагаемые нулевые, поскольку не только $\tilde{\mathbf{C}}_s\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} = \mathbf{0}$, но и $\tilde{\mathbf{C}}_s\mathbf{x}_s = \tilde{\mathbf{C}}(\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_s) = \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^{-1}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$. Вследствие (14) выполняется:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) = \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 + \mathbf{x}_s^T(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) = \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2,$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T\mathbf{x}_s = (\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s)^T\mathbf{x}_s + \mathbf{x}_s^T\mathbf{x}_s = \|\mathbf{x}_s\|^2 = 1.$$

Поэтому скалярные произведения упрощаются:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T\bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \lambda_{s+1} + (\alpha - \lambda_s)\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 = 0,$$

$$\mathbf{x}_s^T\bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \lambda_{s+1} = 0,$$

$$(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s)^T\bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} + (\alpha - \lambda_s)\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 = 0.$$

В силу симметрии матрицы $\bar{\mathbf{B}}$ выполняется:

$$(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s)^T \bar{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) + \lambda_{s+1} + (\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 = \mathbf{x}_s^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{x}_s.$$

За счёт выбора демпинг-фактора матрица $\bar{\mathbf{B}}$ может быть сделана положительно определённой. В этом случае, с одной стороны:

$$(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s)^T \bar{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s) + \lambda_{s+1} + (\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 = \mathbf{x}_s^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{x}_s \leq \lambda_{\max} \|\mathbf{x}_s\|^2 = \lambda_{\max}, \quad (15)$$

и, с другой стороны,

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T \bar{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{x}}_{s+1} = \lambda_{s+1} - (\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 \geq \lambda_{\min} \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\|^2 \geq \lambda_{\min} > 0. \quad (16)$$

Таким образом,

$$\lambda_{s+1} + (\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 \leq \lambda_{\max},$$

$$\lambda_{s+1} - (\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 \geq \lambda_{\min} > 0,$$

и получаем двустороннее неравенство для λ_{s+1} :

$$(\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 + \lambda_{\min} \leq \lambda_{s+1} \leq \lambda_{\max} - (\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2.$$

В любом случае $(\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 \leq \frac{1}{2}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$.

Последовательность $\{\lambda_s\}$ при $\alpha - \lambda_s \geq 0$ является ограниченной $\lambda_{\min} \leq \lambda_{s+1} \leq \lambda_{\max}$. Тогда последовательность $\{\lambda_s\}$ при $\alpha \geq \lambda_{\max}$ является ограниченной $\lambda_{\min} \leq \lambda_{s+1} \leq \lambda_{\max}$ и монотонной. Запишем квадратичную форму (16) для предыдущего шага s :

$$\mathbf{x}_s^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{x}_s = \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^{-2} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \bar{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{x}}_s = \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^{-2} \left(\lambda_s - (\alpha - \lambda_{s-1}) \|\tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{x}_{s-1}\|^2 \right) \leq \lambda_s - (\alpha - \lambda_{s-1}) \|\tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{x}_{s-1}\|^2. \quad (17)$$

Соотношения (15) и (17) означают монотонность последовательности $\{\lambda_s\}$:

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{s+1} \leq \lambda_s + (\alpha - \lambda_s) \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 \leq \lambda_s - (\alpha - \lambda_{s-1}) \|\tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{x}_{s-1}\|^2 \leq \lambda_s. \quad (18)$$

Таким образом, монотонная и ограниченная числовая последовательность $\{\lambda_s\}$ является сходящейся:

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{s+1} \leq \lambda_s \leq \lambda_{\max}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Норма разности двух последовательных приближений $\|\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s\| \rightarrow 0$.

Доказательство. С одной стороны, $\mathbf{x}_{s+1}^T \mathbf{x}_{s+1} = \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\|^{-2} \tilde{\mathbf{x}}_{s+1}^T \tilde{\mathbf{x}}_{s+1} = 1$, а с другой,

$\mathbf{x}_s^T \mathbf{x}_{s+1} = \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\|^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \tilde{\mathbf{x}}_{s+1} \leq 1$, откуда:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 &= \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_{s+1} + \mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 = \|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_{s+1}\|^2 + 2(\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_{s+1})^T (\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s) + \|\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 = \\ &= (\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\| - 1)^2 \|\mathbf{x}_{s+1}\|^2 + 2(\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\| - 1) \mathbf{x}_{s+1}^T (\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s) + \|\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2. \end{aligned}$$

В предпоследнем слагаемом

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1}\| - 1 \geq 0, \quad \mathbf{x}_{s+1}^T (\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s) = \mathbf{x}_{s+1}^T \mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_{s+1}^T \mathbf{x}_s \geq 0,$$

откуда окончательно

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 \geq \|\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2.$$

Неравенства (16) с учётом этого могут быть записаны в виде:

$$0 \leq (\alpha - \lambda_s) \|\mathbf{x}_{s+1} - \mathbf{x}_s\|^2 + (\alpha - \lambda_{s-1}) \|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s-1}\|^2 \leq \lambda_s - \lambda_{s+1} \leq \varepsilon.$$

Следствие доказано.

5.2. Автоматизация установки параметра регуляризации в задаче оптимизации. Выбор и настройка подходящего параметра регуляризации α является сложной и трудоёмкой задачей, требующий соответствующих профессиональных знаний. Предложенный алгоритм выполняет автоматическую операцию его вычисления: $\alpha \leftarrow 0.5\alpha$. Данный подход показал быструю сходимость на тестовых моделях.

Рассматриваются два подхода к автоматизации подбора параметра регуляризации α : (1) постоянное значение и (2) изменяющееся значение. Сходимость Ньютоновских процедур критически зависит от начального приближения. Большее значение параметра регуляризации α обеспечивает более монотонную сходимость, а меньшие значения – более быструю. Для создания подходящего начального приближения используется завышенное значение параметра α . При этом в случае постоянного параметра, это приводит к более медленной сходимости. Стратегия с изменяющимся значением α , использованная в предложенном алгоритме, позволяет получить приемлемое начальное приближение с высоким значением параметра регуляризации α на начальных итерациях, и существенно более быструю сходимость (в 10^2 и 10^3 раз) на последующих итерациях при малых значениях параметра α , ограниченного снизу значением максимального собственного числа матрицы квадратичной формы \mathbf{B} (Теорема 1). Графики на рис. 2 демонстрируют преимущество стратегии с изменяющимся значением параметра регуляризации α .

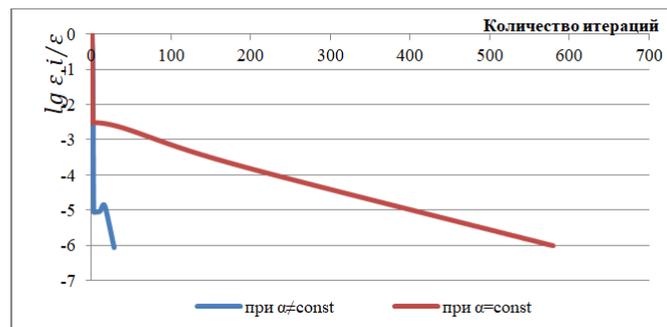


Рис. 2. Сходимость алгоритма эффективных управлений для тестовой модели 4 (табл. 3)

5.3. Время работы алгоритма. Для всех исследованных примеров на одном ядре Intel Pentium процессора CPU 4417U 2.300 ГГц время решения алгоритма не превышало 1 сек. для стратегии $\alpha \leftarrow 0.5\alpha$. Это вполне приемлемо для принятия управленческих решений, не требующих сверхбыстрой реакции.

Таблица 3

**Время работы алгоритма на тестовых моделях при разных стратегиях
вычисления параметра регуляризации α**

Модель	Размерность матриц	Достигнутое значение параметра регуляризации α	Время выполнения в сек. при стратегии	
			$\alpha = const$	$\alpha \neq const$
1	75×75	250	4,444	0,0432
2	31×31	70	0,3464	0,0142
3	15×15	50	0,0127	0,000594
4	7×7	3000	0,1415	0,000337

Заключение. В настоящем исследовании мы показываем, что применение предложенного алгоритма может облегчить принятие решений относительно выбора управляющих воздействий, которые поддерживают достижение тактических и стратегических целей лица, принимающего решения. Следует отметить, что алгоритм реализует автоматизированный подбор параметра регуляризации α , что делает доступным разработку и применение предложенного алгоритма для пользователей, не имеющих достаточной математической подготовки. Сходимость последовательности множителя Лагранжа алгоритма эффективных управлений доказана (Теорема 1). Доказана теорема о резонансе в нестохастической причинной модели, представленной направленным графом, который определяется областью допустимых значений коэффициента демпфирования в модели управления (Теоремы 2 и 3).

Ожидается, что внедрение этого инструмента в интеллектуальные системы поддержки принятия решений повысит надежность решений, принимаемых в отношении работы системы в целом. Выбор управляющих воздействий с использованием предложенного алгоритма имеет отличную эффективность и производительность. Таким образом, результаты, представленные в исследовании, могут быть полезны для разработки приложений в интеллектуальных системах поддержки принятия решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Li Y., Fan J., Wang Y., and Tan K.-L. Influence Maximization on Social Graphs: A Survey, *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, Oct. 2018, Vol. 30, No. 10, pp. 1852-1872.
2. Easley D. and Kleinberg J. *Networks, Crowds, and Markets*. Cambridge University Press, 2010.
3. Gruhl D., Liben-Nowell D., Guha R., and Tomkins A. Information diffusion through blogspace, *ACM SIGKDD Explor. Newsl.*, Dec. 2004, Vol. 6, No. 2, pp. 43-52.
4. Song X., Tseng B.L., Lin C.-Y., and Sun M.-T. Personalized recommendation driven by information flow, in *Proceedings of the 29th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval - SIGIR '06*, 2006, p. 509.
5. Zhang X., Zhu J., Wang Q., and Zhao H. Identifying influential nodes in complex networks with community structure, *Knowledge-Based Syst.*, Apr. 2013, Vol. 42, pp. 74-84.
6. Li J., Peng W., Li T., Sun T., Li Q., and Xu J. Social network user influence sense-making and dynamics prediction, *Expert Syst. Appl.*, Sep. 2014, Vol. 41, No. 11, pp. 5115-5124.
7. Morone F. and Makse H.A. Influence maximization in complex networks through optimal percolation, *Nature*, Aug. 2015, Vol. 524, No. 7563, pp. 65-68.
8. Molinero X., Riquelme F., and Serna M. Cooperation through social influence, *Eur. J. Oper. Res.*, May 2015, Vol. 242, No. 3, pp. 960-974.
9. Cassavia N., Masciari E., Pulice C., Sacca D., and Trubitsyna I. Evaluating the Influence of User Searches on Neighbors, in *2018 IEEE 27th International Conference on Enabling Technologies: Infrastructure for Collaborative Enterprises (WETICE)*, 2018, pp. 165-170.
10. Riquelme F., Gonzalez-Cantergiani P., Molinero X., and Serna M. The neighborhood role in the linear threshold rank on social networks, *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, Aug. 2019, Vol. 528, pp. 121430.

11. Kempe D., Kleinberg J., and Tardos É. Maximizing the spread of influence through a social network, in *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining - KDD '03*, 2003, p. 137.
12. Singh S.S., Kumar A., Mishra S., Singh K., and Biswas B. Influence Maximization in Social Networks,” 2019, pp. 255-267.
13. Long C. and Wong R.C.-W. Minimizing Seed Set for Viral Marketing, in *2011 IEEE 11th International Conference on Data Mining*, 2011, pp. 427-436.
14. Dickison M., Havlin S., and Stanley H.E. Epidemics on interconnected networks, *Phys. Rev. E*, Jun. 2012, Vol. 85, No. 6, p. 066109.
15. Kabir K.M.A., Kuga K., and Tanimoto J. Analysis of SIR epidemic model with information spreading of awareness, *Chaos, Solitons & Fractals*, Feb. 2019, Vol. 119, pp. 118-125.
16. Chen G. Pinning control and controllability of complex dynamical networks, *Int. J. Autom. Comput.*, Feb. 2017, Vol. 14, No. 1, pp. 1-9.
17. Liu Y.-Y., Slotine J.-J., and Barabási A.-L. Controllability of complex networks, *Nature*, May 2011, Vol. 473, No. 7346, pp. 167-173.
18. Tang J. et al. Maximizing the spread of influence via the collective intelligence of discrete bat algorithm, *Knowledge-Based Syst.*, Nov. 2018, Vol. 160, pp. 88-103.
19. Chang B., Xu T., Liu Q., and Chen E.-H. Study on Information Diffusion Analysis in Social Networks and Its Applications, *Int. J. Autom. Comput.*, Aug. 2018, Vol. 15, No. 4, pp. 377-401.
20. De Arruda G.F., Rodrigues F.A., and Moreno Y. Fundamentals of spreading processes in single and multilayer complex networks, *Phys. Rep.*, Oct. 2018, Vol. 756, pp. 1-59.
21. Tselykh A., Vasilev V., and Tselykh L. Management of Control Impacts Based on Maximizing the Spread of Influence, *Int. J. Autom. Comput.*, Jun. 2019, Vol. 16, No. 3, pp. 341-353.
22. Bertsekas D.P. The Method of Multipliers for Equality Constrained Problems, in *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Elsevier, 1982, pp. 95-157.
23. Tikhonov A. and Arsenin V. *Solutions of Ill-Posed Problems*. New York: Wiley, 1977.
24. Pedrycz W. and Homenda W. From Fuzzy Cognitive Maps to Granular Cognitive Maps, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Aug. 2014, Vol. 22, No. 4, pp. 859-869.
25. Kim D.-H. Cognitive Maps of Policy Makers on Financial Crises of South Korea and Malaysia: A Comparative Study, *Int. Rev. Public Adm.*, Jan. 2004, Vol. 9, No. 2, pp. 31-38.
26. Büyükköçkan G. and Vardaloğlu Z. Analyzing of CPFR success factors using fuzzy cognitive maps in retail industry, *Expert Syst. Appl.*, Sep. 2012, Vol. 39, No. 12, pp. 10438-10455.
27. Tselykh A. and Tselykh L. Methodology for comparative cognitive modeling based on the analysis of fuzzy target and control factors, *Izv. SFedU. Eng. Sci.*, 2015, Vol. 7 (168), pp. 101-115.
28. Poczetka K., Kubuś Ł., and Yastrebov A. Analysis of an evolutionary algorithm for complex fuzzy cognitive map learning based on graph theory metrics and output concepts, *Biosystems*, May 2019, Vol. 179, pp. 39-47.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.В. Боженюк.

Целых Александр Николаевич – Южный федеральный университет; e-mail: ant@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185562047; кафедра ИАСБ; д.т.н.; профессор.

Васильев Владислав Сергеевич – e-mail: vsvasilev@sfedu.ru; тел.: +79185983647; кафедра ИАСБ; к.т.н.; доцент.

Целых Лариса Анатольевна – Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ); e-mail: l.tselykh58@gmail.com; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185695760; кафедра экономики и предпринимательства; к.э.н.; доцент.

Tselykh Alexander Nikolayevich – Southern Federal University; e-mail: ant@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79185562047; the department IASB; dr. of eng. sc.; professor.

Vasilev Vladislav Sergeevich – e-mail: vsvasilev@sfedu.ru; phone: +79185983647; the department IASB; dr. of eng. sc.; the senior lecturer.

Tselykh Larisa Anatolievna – Chekhov Taganrog Institute (branch) of Rostov State University of Economics; e-mail: l.tselykh58@gmail.com; Taganrog, Russia; phone: +79185695760; the department of Economics and business; dr. of ec. sc., the senior lecturer.