18. *Semenov L.A., Siraya T.N.* Metody postroeniya graduirovochnykh kharakteristik sredstv izmereniy [Methods for constructing calibration characteristics of measuring instruments]. Moscow: Izd-vo standartov, 1986.
19. *Klevtsov S.I.* Mul'tisegmentnaya prostranstvennaya approksimatsiya graduirovochnoy kharakteristiki mikroprotsessornogo datchika [Multi-segment spatial approximation of the calibration characteristic of a microprocessor sensor], *Metrologiya* [Metrology], 2011, No. 7, pp. 26-36.
20. *Klevtsov and Udod Y.* Model of the Spatial Conversion Characteristics for Graduation of the Microprocessor-Based Sensor's with Indemnification of Influence Destabilizing Factors, *in Proc. 2015 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*, 2015, pp. 1-5. DOI: 10.1109 / SIBCON.2015.7147097.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.В. Тютиков.

Клевцов Сергей Иванович – Южный федеральный университет; e-mail: sergkmps@mail.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 88634328025; к.т.н.; доцент.

Klevtsov Sergey Ivanovich – Southern Federal University; e-mail: sergkmps@mail.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634328025; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 539.3, 51-7, 519.6, 517.9, 53.082.5 DOI 10.18522/2311-3103-2021-4-73-87

А.Г. Клово, А.А. Илюхин, Г.В. Куповых, И.А. Ляпунова

ОБОБЩЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ВНУТРЕННИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

При решении задач, связанных с исследований прочностных свойств различных конструкций, часто используются некоторые наборы тригонометрических (синусы или косинусы), а также гиперболических функций, которые циклично при взятии производных последовательно переходят друг в друга. Эти наборы состоят из двух функций, причем последняя из этих функций при дифференцировании переходит в первую, взятую соответственно со знаком «плюс» (тригонометрическая система первого типа) или «минус» (тригонометрическая система второго типа). Тригонометрические и гиперболические функции также используются при решении многих прикладных задач, математические модели которых содержат вторые производные по пространственным переменным. Если математическая модель содержит производные четвертого порядка по пространственным переменным, то при решении соответствующих задач можно использовать функции, четвертые производные которых пропорциональным этим функциям. Известен ряд работ по общей теории систем функций, где описаны обобщенные тригонометрические системы (ОТС) функций, производные определенного порядка которых пропорциональны этим функциям. В данной работе эта теория развивается в направлении исследования квадратичных форм функций, составляющих ОТС. Показано, что квадратичные формы функций ОТС могут сами по себе являться функциями ОТС того же порядка (первого или второго типов). Полученные тождества и созданная теория используется для решения спектральных задач для оператора четвертого порядка для функций с определенными условиями. Специфика рассматриваемых задач заключается в том, что помимо стандартных граничных условий имеются дополнительные условия на внутренней границе. Эти условия недостаточны для того, чтобы автономно решать задачу в каждой отдельной области в которых заданы исследуемые функции. Использование установленных в работе свойств ОТС позволяет решать такие задачи во всей рассматриваемой области.

Дифференциальный оператор; спектр; обобщенные тригонометрические системы; внутренняя граница; собственные функции; собственные значения; самосопряженность; ортонормированность.

A.G. Klovo, A.A. Ilyukhin, G.V. Kupovykh, I.A. Lyapunova

GENERALIZED TRIGONOMETRIC SYSTEMS AND SPECTRAL TASKS WITH ADDITIONAL INTERNAL BOUNDARY CONDITIONS

When solving problems related to the study of the strength properties of various structures, some sets of trigonometric (sine or cosine), as well as hyperbolic functions are often used, which cyclically pass into each other when taking derivatives. These sets consist of two functions, and the last of these functions, when differentiating, passes into the first, taken respectively with a plus sign (a trigonometric system of the first type) or a minus sign (a trigonometric system of the second type). Trigonometric and hyperbolic functions are also used in solving many applied problems, whose mathematical models contain second derivatives in spatial variables. If the mathematical model contains fourth-order derivatives with respect to spatial variables, then when solving the corresponding problems, it is possible to use functions whose fourth derivatives are proportional to these functions. There are a number of works on the general theory of systems of functions, where generalized trigonometric systems (GTS) of functions are described, the derivatives of a certain order of which are proportional to these functions. In this paper, this theory is developed in the direction of studying the quadratic forms of the functions that make up the GTS. It is shown that the quadratic forms of GTS functions can themselves be GTS functions of the same order (of the first or second types). The obtained identities and the created theory are used to solve spectral problems for a fourth-order operator for functions with certain conditions. The specificity of the problems under consideration is that in addition to the standard boundary conditions, there are additional conditions on the inner boundary. These conditions are not sufficient to independently solve the problem in each separate domain in which the functions under study are specified. The use of the GTS properties identified herein allows us to solve such problems in the entire area under consideration.

Differential operator; spectrum; generalized trigonometric systems; internal boundary; eigenfunctions; eigenvalues; self-conjugacy; orthonormality.

Введение. Академик А.Н. Крылов [1 с. 30] для расчета закритического поведения конструкций использовал функции, четвертые производные которых пропорциональны самой функции. В работах [2–6] эти же функции использовались для решения других прочностных задач. Свойства таких систем функций было использовано в работах [7– 8] для исследования вопросов разрушения кварцевых резонаторов. В частности, при решении спектральных задач с внутренними граничными условиями использовался метод промежуточных задач Вайнштейна [9–13].

В работе [14] введено понятие обобщенной тригонометрической системы (ОТС). Это набор определенного числа функций, которые при дифференцировании последовательно переходят друг в друга. При этом производная от последней функции переходит в первую, взятую со знаком плюс (ОТС первого типа) или со знаком минус (ОТС второго типа). Кроме того, для функций ОТС требуется выполнение начальных условий. При $x=0$ все функции системы равны 0, а последняя функция равна 1. Интегральные свойства функций этих систем четного порядка в этой работе были сформулированы в [14] интуитивно и соответствующие формулы доказаны путем дифференцирования левой и правой их частей.

В работах [15–20] проведены исследования дифференциальных свойств обобщенных тригонометрических систем и их квадратичных форм. В итоге построена тригонометрия ОТС произвольного порядка, показана специфика систем четного и нечетного порядков. Изучение свойств матриц квадратичных форм, их преобразований при взятии производной квадратичной формы позволило вывести серию интегральных свойств ОТС.

В настоящей работе изучаются дополнительные свойства обобщенных тригонометрических систем, связанные с исследованием их квадратичных форм. Полученные свойства позволяют, не используя методы промежуточных задач, приступить напрямую к изучению спектральных свойства оператора дифференцирования порядка 4 с условия на внешней и внутренней границах.

Определение функций ОТС порядка 4. Для построения теории ОТС четвертого порядка дадим следующие определения.

Определение 1. Функции $K_1(x)$, $K_2(x)$, $K_3(x)$, $K_4(x)$, такие что $(K_1(x))' = K_2(x)$, $(K_2(x))' = K_3(x)$, $(K_3(x))' = K_4(x)$, $(K_4(x))' = K_1(x)$, $K_i(0) = 0$, $i = 1,2,3$, $K_4(0) = 1$ образуют обобщенную тригонометрическую систему порядка 4 типа 1 ($o.m.c.[4;1]$).

Определение 2. Функции $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, $\Phi_4(x)$, такие что $(\Phi_1(x))' = \Phi_2(x)$, $(\Phi_2(x))' = \Phi_3(x)$, $(\Phi_3(x))' = \Phi_4(x)$, $(\Phi_4(x))' = -\Phi_1(x)$, $\Phi_i(0) = 0$, $i = 1,2,3$, $\Phi_4(0) = 1$ образуют обобщенную тригонометрическую систему порядка 4 типа 2 ($o.m.c.[4;2]$).

Функции $o.m.c.[4;1]$ и $o.m.c.[4;2]$ указанными дифференциальными и начальными условиями определяются однозначно. Так как они являются решениями дифференциальных уравнений $y^{IV}(x) = \pm y(x)$ соответственно, то несложно написать явный вид этих функций. Первыми являются функции

$$K_1(x) = \frac{shx - \sin x}{2},$$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(ch\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - sh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

остальные являются их производными. В то же время мы будем пользоваться свойствами ОТС, не связанными с их конкретным видом.

Тригонометрия функций ОТС порядка 4. В этом разделе для функций ОТС четвертого порядка построим теорию, обобщающую школьную тригонометрию.

Несложно проверить, что функции $o.m.c.[4;1]$ и $o.m.c.[4;2]$ образуют фундаментальные решений указанных дифференциальных уравнений $y^{IV}(x) = y(x)$ и $y^{IV}(x) = -y(x)$. Поэтому функция $K_1(x+y)$ представляется в виде

$$K_1(x+y) = C_1(y)K_1(x) + C_2(y)K_2(x) + C_3(y)K_3(x) + C_4(y)K_4(x).$$

Отсюда, используя начальные условия функций ОТС, получим

$$K_1(x+y) = K_1(x)K_4(y) + K_2(x)K_3(y) + K_3(x)K_2(y) + K_4(x)K_1(y). \quad (1)$$

Аналогично выводится формула

$$\Phi_1(x+y) = \Phi_1(x)\Phi_4(y) + \Phi_2(x)\Phi_3(y) + \Phi_3(x)\Phi_2(y) + \Phi_4(x)\Phi_1(y) \quad (2)$$

и после дифференцирования формул (1), (2) по одной из переменных получим остальные формулы сложения.

Для вывода формул разности аргументов надо исследовать функции ОТС на четность и нечетность. Заметим, что в силу фундаментальности $o.m.c.[4;1]$ и $o.m.c.[4;2]$ и четности их порядка функция $K_1(-x)$ представляется в виде

$$K_1(-x) = C_1K_1(x) + C_2K_2(x) + C_3K_3(x) + C_4K_4(x),$$

откуда с помощью начальных условий функций ОТС получим

$$\mathrm{K}_1(-x) = -\mathrm{K}_1(x),\ \mathrm{K}_2(-x) = \mathrm{K}_2(x), \mathrm{K}_3(-x) = -\mathrm{K}_3(x),\ \mathrm{K}_4(-x) = \mathrm{K}_4(x). \quad (3)$$

Аналогично проверяется, что и для $o.m.c.[4;2]$ справедливы формулы

$$\Phi_1(-x) = -\Phi_1(x),\ \Phi_2(-x) = \Phi_2(x), \Phi_3(-x) = -\Phi_3(x),\ \Phi_4(-x) = \Phi_4(x). \quad (4)$$

Правило, что функции ОТС обоих типов с четными номерами являются четными функциями, а функции с нечетными номерами являются нечетными функциями, остается справедливым для всех ОТС четных порядков. Теперь мы можем написать формулы разности аргументов, например,

$$\mathrm{K}_1(x-y) = \mathrm{K}_1(x)\mathrm{K}_4(y) - \mathrm{K}_2(x)\mathrm{K}_3(y) + \mathrm{K}_3(x)\mathrm{K}_2(y) - \mathrm{K}_4(x)\mathrm{K}_1(y),$$

$$\Phi_1(x-y) = \Phi_1(x)\Phi_4(y) - \Phi_2(x)\Phi_3(y) + \Phi_3(x)\Phi_2(y) - \Phi_4(x)\Phi_1(y),$$

Квадратичные формы функций ОТС порядка 4 первого типа. Далее разовьем теорию квадратичных форм ОТС и соответствующих матриц.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{gathered}\mathrm{A}(x) = a_{11}\mathrm{K}_1^2(x) + a_{22}\mathrm{K}_2^2(x) + a_{33}\mathrm{K}_3^2(x) + a_{44}\mathrm{K}_4^2(x) + \\ +2a_{12}\mathrm{K}_1(x)\mathrm{K}_2(x) + 2a_{13}\mathrm{K}_1(x)\mathrm{K}_3(x) + 2a_{14}\mathrm{K}_1(x)\mathrm{K}_4(x) + \\ +2a_{23}\mathrm{K}_2(x)\mathrm{K}_3(x) + 2a_{24}\mathrm{K}_2(x)\mathrm{K}_4(x) + 2a_{34}\mathrm{K}_3(x)\mathrm{K}_4(x),\end{gathered} \quad (5)$$

порожденную функциями $o.m.c.[4;1]$. Выясним, при каких обстоятельствах квадратичная форма (8) является константой. В этом случае мы получим аналог основного гиперболического тождества $ch^2x - sh^2x = 1$. Исследование формы (5) позволит ответить и на ряд других вопросов.

Матрица

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (6)$$

соответствует квадратичной форме $\mathrm{A}(x)$, а матрица

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 2a_{14} & a_{11}+a_{24} & a_{12}+a_{34} & a_{13}+a_{44} \\ a_{11}+a_{24} & 2a_{12} & a_{13}+a_{22} & a_{14}+a_{23} \\ a_{12}+a_{34} & a_{13}+a_{22} & 2a_{23} & a_{24}+a_{33} \\ a_{13}+a_{44} & a_{14}+a_{23} & a_{24}+a_{33} & 2a_{34} \end{pmatrix} \quad (7)$$

соответствует, как несложно проверить, ее производной $\mathrm{A}'(x)$.

Выясним, при каких обстоятельствах нулевой матрице (7) соответствует ненулевая матрица (6). Из равенства 0 элементов на главной диагонали (7) следует равенство 0 элементов (6), расположенных на первой и третьей диагоналях выше и ниже главной. Каждый из остальных элементов может быть отличен от 0. Если $a_{11} = 1$, то из (7) $a_{11} + a_{24} = 0$, $a_{24} + a_{33} = 0$ и поэтому $a_{24} = -1$, $a_{33} = 1$. Отсюда константе равна квадратичная функция $\mathrm{K}_1^2(x)+\mathrm{K}_3^2(x)-2\mathrm{K}_2(x)\mathrm{K}_4(x)$. Аналогично при $a_{22}=1$ мы найдем равную константе квадратичную функцию $\mathrm{K}_2^2(x)+\mathrm{K}_4^2(x)-2\mathrm{K}_1(x)\mathrm{K}_3(x)$. С учетом начальных условий мы приходим к тождествам (первым интегралам)

$$\mathrm{K}_1^2(x)+\mathrm{K}_3^2(x)=2\mathrm{K}_2(x)\mathrm{K}_4(x),$$

$$\mathrm{K}_2^2(x)+\mathrm{K}_4^2(x)=1+2\mathrm{K}_1(x)\mathrm{K}_3(x). \tag{8}$$

В справедливости формул (8) также легко убедиться их непосредственным дифференцированием. Анализируя формулы (6)-(7) можно найти первообразные для квадратов функций $o.m.c.[4;1]$. Справедливы формулы (вторым интегралам):

$$\int K_1^2(x)dx=\frac{3}{4}K_1(x)K_4(x)-\frac{1}{4}K_2(x)K_3(x)+C, \tag{9}$$

$$\int K_2^2(x)dx=\frac{3}{4}K_1(x)K_2(x)-\frac{1}{4}K_3(x)K_4(x)+\frac{x}{4}+C, \tag{10}$$

$$\int K_3^2(x)dx=\frac{3}{4}K_2(x)K_3(x)-\frac{1}{4}K_1(x)K_4(x)+C, \tag{11}$$

$$\int K_4^2(x)dx=\frac{3}{4}K_3(x)K_4(x)-\frac{1}{4}K_1(x)K_2(x)+\frac{x}{4}+C. \tag{12}$$

При взятии производных от левой и правой частей формул (9)-(12) мы приходим к первым интегралам (8).

Для того, чтобы найти матрицы A_2, A_3, A_4 квадратичных форм, соответствующих последующим производным квадратичной формы $\mathrm{A}(x)$, можно, например, применить преобразование матрицы (6) в матрицу (7), к самой матрице (7) и к созданным при этом матрицам. Поэтому матрицы

$$\mathrm{A}_2=\begin{pmatrix} 2(a_{13}+a_{44}) & 3a_{14}+a_{23} & a_{11}+2a_{24}+a_{33} & a_{12}+3a_{34} \\ 3a_{14}+a_{23} & 2(a_{11}+a_{24}) & 3a_{12}+a_{34} & a_{22}+2a_{13}+a_{44} \\ a_{11}+2a_{24}+a_{33} & 3a_{12}+a_{34} & 2(a_{13}+a_{22}) & a_{14}+3a_{23} \\ a_{12}+3a_{34} & a_{22}+2a_{13}+a_{44} & a_{14}+3a_{23} & 2(a_{24}+a_{33}) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}_3=\begin{pmatrix} 2(a_{12}+3a_{34}) & a_{22}+4a_{13}+3a_{44} & 4(a_{14}+a_{23}) & a_{11}+4a_{24}+3a_{33} \\ a_{22}+4a_{13}+3a_{44} & 2(3a_{14}+a_{23}) & 3a_{11}+4a_{24}+a_{33} & 4(a_{12}+a_{34}) \\ 4(a_{14}+a_{23}) & 3a_{11}+4a_{24}+a_{33} & 2(3a_{12}+a_{34}) & 3a_{22}+4a_{13}+a_{44} \\ a_{11}+4a_{24}+3a_{33} & 4(a_{12}+a_{34}) & 3a_{22}+4a_{13}+a_{44} & 2(a_{14}+3a_{23}) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}_4=\begin{pmatrix} 2a_{11}+8a_{24}+6a_{33} & 6a_{12}+10a_{34} & 4a_{22}+8a_{13}+4a_{44} & 6a_{14}+10a_{23} \\ 6a_{12}+10a_{34} & 2a_{22}+8a_{13}+6a_{44} & 6a_{23}+10a_{14} & 4a_{11}+8a_{24}+4a_{33} \\ 4a_{22}+8a_{13}+4a_{44} & 6a_{23}+10a_{14} & 2a_{33}+8a_{24}+6a_{11} & 6a_{34}+10a_{12} \\ 6a_{14}+10a_{23} & 4a_{11}+8a_{24}+4a_{33} & 6a_{34}+10a_{12} & 2a_{44}+8a_{13}+6a_{22} \end{pmatrix}$$

являются матрицами последующих производных квадратичной формы (5), т.е. квадратичных форм $\mathrm{A}''(x)$, $\mathrm{A}'''(x)$, $\mathrm{A}^{IV}(x)$.

Для нас важно выяснить, может ли квадратичная форма системы ОТС поменять свой тип, т.е. стать функцией ОТС другого типа? Для ответа на этот вопрос напишем условия пропорциональности матриц A_4 и A_0:

$$\begin{gathered}\frac{2a_{11}+8a_{24}+6a_{33}}{a_{11}}=\frac{6a_{12}+10a_{34}}{a_{12}}=\frac{4a_{22}+8a_{13}+4a_{44}}{a_{13}}=\frac{6a_{14}+10a_{23}}{a_{14}}= \\ =\frac{2a_{22}+8a_{13}+6a_{44}}{a_{22}}=\frac{6a_{23}+10a_{14}}{a_{23}}=\frac{4a_{11}+8a_{24}+4a_{33}}{a_{24}}=\frac{2a_{33}+8a_{24}+6a_{11}}{a_{33}}= \\ =\frac{6a_{34}+10a_{12}}{a_{34}}=\frac{2a_{44}+8a_{13}+6a_{22}}{a_{44}}.\end{gathered} \quad (13)$$

Заметим, что система (16) распадается на 3 подсистемы:

$$\frac{2a_{11}+8a_{24}+6a_{33}}{a_{11}}=\frac{4a_{11}+8a_{24}+4a_{33}}{a_{24}}=\frac{2a_{33}+8a_{24}+6a_{11}}{a_{33}}, \quad (14)$$

$$\frac{6a_{12}+10a_{34}}{a_{12}}=\frac{6a_{34}+10a_{12}}{a_{34}}, \quad (15)$$

$$\frac{4a_{22}+8a_{13}+4a_{44}}{a_{13}}=\frac{2a_{22}+8a_{13}+6a_{44}}{a_{22}}=\frac{2a_{44}+8a_{13}+6a_{22}}{a_{44}}, \quad (16)$$

каждая из которых решается независимо от других. При этом мы приходим к следующим тождествам для функций ОТС:

$$\begin{gathered}\mathrm{K}_1(x)=2\left(\mathrm{K}_1\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{K}_4\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{K}_2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{K}_3\left(\frac{x}{2}\right)\right), \\ \mathrm{K}_2(x)=\mathrm{K}_1^2\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{K}_3^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\mathrm{K}_2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{K}_4\left(\frac{x}{2}\right), \\ \mathrm{K}_3(x)=2\left(\mathrm{K}_1\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{K}_2\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{K}_3\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{K}_4\left(\frac{x}{2}\right)\right), \\ \mathrm{K}_4(x)=\mathrm{K}_2^2\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{K}_4^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\mathrm{K}_1\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{K}_3\left(\frac{x}{2}\right).\end{gathered} \quad (17)$$

$$\begin{gathered}\Phi_1(x)=\sqrt{2}\left(\mathrm{K}_2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{K}_3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{K}_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{K}_4\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right), \\ \Phi_2(x)=\mathrm{K}_3^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{K}_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \\ \Phi_3(x)=\sqrt{2}\left(\mathrm{K}_3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{K}_4\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{K}_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{K}_2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right), \\ \Phi_4(x)=\mathrm{K}_4^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{K}_2^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).\end{gathered} \quad (18)$$

Квадратичные формы функций ОТС порядка 4 второго типа. Для функций $o.m.c.[4;2]$ также рассмотрим квадратичную форму

$$B(x) = b_{11}\Phi_1^2(x) + b_{22}\Phi_2^2(x) + b_{33}\Phi_3^2(x) + b_{44}\Phi_4^2(x) + \\ +2b_{12}\Phi_1(x)\Phi_2(x) + 2b_{13}\Phi_1(x)\Phi_3(x) + 2b_{14}\Phi_1(x)\Phi_4(x) + \\ +2b_{23}\Phi_2(x)\Phi_3(x) + 2b_{24}\Phi_2(x)\Phi_4(x) + 2b_{34}\Phi_3(x)\Phi_4(x) \tag{20}$$

и соответствующую матрицу

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{34} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{pmatrix}.$$

Производной квадратичной формы (20) соответствует матрица

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2b_{14} & b_{11} - b_{24} & b_{12} - b_{34} & b_{13} - b_{44} \\ b_{11} - b_{24} & 2b_{12} & b_{13} + b_{22} & b_{14} + b_{23} \\ b_{12} - b_{34} & b_{13} + b_{22} & 2b_{23} & b_{24} + b_{33} \\ b_{13} - b_{44} & b_{14} + b_{23} & b_{24} + b_{33} & 2b_{34} \end{pmatrix}.$$

Проведя аналогичные исследования, получим первые

$$\Phi_3^2(x) - \Phi_1^2(x) = 2\Phi_2(x)\Phi_4(x),$$

$$\Phi_4^2(x) - \Phi_2^2(x) = 1 - 2\Phi_1(x)\Phi_3(x)$$

и вторые

$$\int \Phi_1^2(x)dx = -\frac{3}{4}\Phi_1(x)\Phi_4(x) + \frac{1}{4}\Phi_2(x)\Phi_3(x) + C,$$

$$\int \Phi_2^2(x)dx = \frac{3}{4}\Phi_1(x)\Phi_2(x) + \frac{1}{4}\Phi_3(x)\Phi_4(x) - \frac{x}{4} + C,$$

$$\int \Phi_2^2(x)dx = \frac{3}{4}\Phi_1(x)\Phi_2(x) + \frac{1}{4}\Phi_3(x)\Phi_4(x) - \frac{x}{4} + C,$$

$$\int \Phi_4^2(x)dx = \frac{3}{4}\Phi_3(x)\Phi_4(x) + \frac{1}{4}\Phi_1(x)\Phi_2(x) + \frac{x}{4} + C$$

интегралы $o.т.с.[4;2]$, которые также могут быть проверены непосредственным их дифференцированием.

Исследование производных квадратичных форм функций $o.т.с.[4;2]$ приводит нас к тождествам:

$$\mathrm{K}_1(x) = \sqrt{2}\left(\Phi_2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Phi_3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \Phi_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Phi_4\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$\mathrm{K}_2(x) = \Phi_3^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \Phi_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathrm{K}_3(x) = \sqrt{2}\left(\Phi_3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Phi_4\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \Phi_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Phi_2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$\mathrm{K}_4(x) = \Phi_4^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \Phi_2^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\Phi_1(x)=2\left(\Phi_2\left(\frac{x}{2}\right)\Phi_3\left(\frac{x}{2}\right)+\Phi_1\left(\frac{x}{2}\right)\Phi_4\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$
$$\Phi_2(x)=\Phi_3^2\left(\frac{x}{2}\right)-\Phi_1^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\Phi_2\left(\frac{x}{2}\right)\Phi_4\left(\frac{x}{2}\right),$$
$$\Phi_3(x)=2\left(\Phi_3\left(\frac{x}{2}\right)\Phi_4\left(\frac{x}{2}\right)-\Phi_1\left(\frac{x}{2}\right)\Phi_2\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$
$$\Phi_4(x)=\Phi_4^2\left(\frac{x}{2}\right)-\Phi_2^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\Phi_1\left(\frac{x}{2}\right)\Phi_3\left(\frac{x}{2}\right).$$

Постановка задач на собственные значения. Важную роль в прикладных исследованиях играет решение задач на собственные значения. При этом в технических системах могут встречаться не только стандартные условия на внешней границе области. Существенную роль могут играть дополнительные условия во внутренних точках области. При этом условий на этой внутренней границе может быть недостаточно для того, чтобы разбить область решения задачи на несколько частей. Нашей целью является такая постановка задачи с внутренними граничными условиями, при которой соответствующий оператор сохранит свою положительную определенность и самосопряженность. И при этом использование функций ОТС позволяет в ряде случаев получить решение спектральной задачи в явном виде.

В области D на оси абсцисс с внешней границей Γ и внутренней границей γ рассматривается задача на собственные значения

$$X^{IV}(x)=\lambda X(x) \tag{21}$$

с дополнительными условиями на внешней и внутренней границах

$$X''(x)\big|_{x\in\Gamma}=X'''(x)\big|_{x\in\Gamma}=0, \tag{22}$$

$$X(x)\big|_{x\in\gamma}=0\cdot \tag{23}$$

При $D=D_l=(-l;l)$ задача (21)-(22) без внутренних граничных условий является известной. При наличии граничных условий на внутренней границе решение задачи (1)-(3) определим следующим образом.

Определение 1. Функция $X(x)$, удовлетворяющая во внутренних точках области D дифференциальному уравнению (21), в точках внешней границы Γ условию (22), в точках внутренней границы γ условию (23) и условиям непрерывности производных $\dfrac{dX(x)}{dx}$, $\dfrac{d^2X(x)}{dx^2}$ в области $D\bigcup\gamma$ (условиям согласования) называется решением задачи (21)-(23).

Нами будут рассмотрены следующие задачи на собственные значения:

♦ Задача (21)-(23) в области $D_{l,0}=(-l;0)\bigcup(0;l)$ с внешней границей $\Gamma=\pm l$ и внутренней границей $\gamma=0$ – задача А.

♦ Задача (21)-(23) в области $D_{l,0,h}=(-l+h;0)\bigcup(0;l+h)$ с внешней границей $\Gamma=\pm l+h$, $0<h<l$ и внутренней границей $\gamma=0$ – задача Б.

Спектральные свойства задач А и Б мы будем сравнивать с задачей (21)-(23) в области $D=D_l=(-l;l)$ – базовой задачей.

Решение базовой задачи. В области $\left(-l;l\right)$ на оси абсцисс с внешней границей $\Gamma=\pm l$ рассматривается задача на собственные значения (21) с дополнительными условиями на внешней границе (22). Несложно проверить, что и в данном случае оператор $L=\dfrac{d^4}{dx^4}$ с этими граничными условиями является положительно определенным и самосопряженным. Следовательно, для базовой задачи существует полная ортонормированная система собственных функций (п.о.н.с.).

Общее решение уравнения (21) запишем в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений

$$X(x)=C_1\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_2\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_3\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_4\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)\cdot$$

Если эта функция удовлетворяет граничным условиям (22), то мы приходим к СЛАУ для определения постоянных

$$\begin{cases}-C_1\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_2\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)-C_3\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_4\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,\\ C_1\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)-C_2\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_3\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)-C_4\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,\\ C_1\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_2\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_3\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_4\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,\\ C_1\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_2\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_3\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_4\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0.\end{cases}\tag{24}$$

Система (24) распадается на две подсистемы

$$\begin{cases}C_1\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_3\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,\\ C_1\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_3\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0\end{cases}\tag{25}$$

и

$$\begin{cases}C_2\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_4\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,\\ C_2\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_4\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0.\end{cases}\tag{26}$$

При этом набор собственных значений базовой задачи состоит из значений $\left\{\lambda_{1n}\right\}$, $n\in N$, порождаемых системой (25) и соответствующих нечетным собственным функциям базовой задачи, а также значений $\left\{\lambda_{2n}\right\}$, $n\in N$, порождаемых системой (26) и соответствующих четным собственным функциям этой задачи

Первая группа собственных значений $\left\{\lambda_{1n}\right\}$ удовлетворяет уравнению $\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)$ или, с учетом вида функций *о.т.с.*[4;1], уравнению $th\sqrt[4]{\lambda}l=tg\sqrt[4]{\lambda}l$, корни которого $\left\{\lambda_{1n}\right\}$ обладают свойством

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda_{1n}-\left(\frac{\pi}{4l}+\frac{\pi n}{l}\right)^4\right)=0\cdot$$

Вторая группа собственных значений $\left\{\lambda_{2n}\right\}$ порождается системой (26) и удовлетворяет уравнению $\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)$ или уравнению $th\sqrt[4]{\lambda}l=-tg\sqrt[4]{\lambda}l$, корни которого $\left\{\lambda_{2n}\right\}$ обладают свойством

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda_{2n}-\left(-\frac{\pi}{4l}+\frac{\pi n}{l}\right)^4\right)=0.$$

Собственным значениям $\{\lambda_{1n}\}$ соответствуют собственные функции базовой задачи $\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}x\right)-\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}x\right)$, которые после нормирования приводятся к виду

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}{\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}}\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}x\right)-\sqrt{\frac{\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}{\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}}\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)\right).$$

Собственным значениям $\{\lambda_{2n}\}$ соответствуют собственные функции базовой задачи $\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}x\right)-\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}x\right)$ и после нормирования

$$\frac{\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}x\right)-\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}x\right)}{\sqrt{l\left(0,5+\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\right)}}.$$

Решение задачи А. В области $D_{l,0}=(-l;0)\cup(0;l)$ на оси абсцисс с внешней границей $\Gamma=\pm l$ и внутренней границей $\gamma=0$ рассматривается задача на собственные значения (21) с дополнительными условиями на внешней границе (22) и на внутренней границе (23). Несложно проверить, что и в данном случае оператор $L=\frac{d^4}{dx^4}$ с этими граничными условиями является положительно определенным и самосопряженным. Следовательно, для задачи А существует полная ортонормированная система собственных функций (п.о.н.с.), которую мы построим в явном виде.

Общее решение уравнения (21) в рамках задачи А представляется в виде

$$X(x)=\begin{cases}C_1^-\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_2\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_3\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right), & -l\le x<0,\\ C_1^+\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_2\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_3\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right), & 0\le x\le l.\end{cases}\qquad(27)$$

В самом деле, слагаемое, содержащее $\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)$ из общего решения (21) должно отсутствовать в силу равенства 0 решения задачи (21)-(23) при $x=0$. Кроме того, в силу определения 1 коэффициенты при $\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)$ и $\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)$ должны совпадать в силу непрерывности при $x=0$ первых и вторых производных.

Следовательно, нам остается потребовать выполнения условий (22) для функции (43). Это приводит к нахождению ненулевых решений C_1^-, C_1^+, C_2, C_3 системы

$$\begin{cases} -C_1^- K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_2 K_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) - C_3 K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) = 0, \\ C_1^- K_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) - C_2 K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_3 K_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) = 0, \\ C_1^+ K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_2 K_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_3 K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) = 0, \\ C_1^+ K_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_2 K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_3 K_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

С одно стороны, можно непосредственно вычислить определитель этой системы, приравнять к 0 и получить уравнение

$$\left(K_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) - K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)K_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\right)\left(K_4^2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right) - K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\right) = 0, \quad (29)$$

а с другой стороны, применяя метод Гаусса, можно записать СЛАУ (28) в виде

$$\begin{cases} -C_1^- K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_2 K_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) - C_3 K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) = 0, \\ C_2\left(K_4^2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right) - K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\right) = 0, \\ C_1^+ K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_2 K_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) + C_3 K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) = 0, \\ C_3\left(K_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) - K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)K_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\right) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Пусть в уравнении (29) первый множитель равен 0. Соответствующие собственные значения $\{\lambda_{1n}\}$, $n \in N$ совпадают с серией собственных значений базовой задачи, соответствующих нечетным собственным функциям. В этом случае последнее уравнение в (30) выполнено всегда, например, при $C_3 = 1$. Множители в (29) одновременно в 0 обратиться не могут, поэтому из второго уравнения (30) получим $C_2 = 0$. Теперь из первого и третьего уравнений этой СЛАУ получим

$$C_1^+ = C_1^- = -\frac{K_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}{K_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}$$

и соответствующие собственные функции пропорциональны нечетным функциям

$$X_{1n}(x) = \begin{cases} K_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)K_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}x\right) - K_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)K_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}x\right), & -l \le x < 0, \\ K_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)K_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}x\right) - K_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)K_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}x\right), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Нечетные собственные функции базовой задачи и задачи А совпадают, поэтому нормированные функции совпадают и записываются в виде

$$\bar{X}_{1n}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\sqrt{\frac{K_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}{K_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}}K_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}x\right) - \sqrt{\frac{K_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}{K_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}}K_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)\right), \quad (31)$$

при этом $\int_{-l}^{l} \bar{X}_{1n}^2 dx = 1$.

Пусть теперь в уравнении (29) второй множитель равен 0. Соответствующие собственные значения $\{\lambda_{2n}\}$, $n \in N$ совпадают с корнями уравнения $K_4^2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right) - K_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)K_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) = 0$ или $ch\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)\cos\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) = -1$. В системе (46) в этом случае $C_3 = 0$ и можно взять $C_2 = 1$. Тогда

$$C_1^- = \frac{\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}{\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)},\ C_1^+ = -\frac{\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}{\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{1n}}l\right)}$$

и соответствующие собственные функции пропорциональны четным, как несложно проверить, функциям

$$X_{2n}(x) = \begin{cases} \mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}x\right) + \mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}x\right), & -l \le x < 0, \\ -\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}x\right) + \mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}l\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda_{2n}}x\right), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

и они также могут быть нормированы.

Решение задачи Б. В области $D_{l,0,h} = (-l+h;0)\cup(0;l+h)$ на оси абсцисс с внешней границей $\Gamma = \pm l + h$ и внутренней границей $\gamma = 0$ рассматривается задача на собственные значения (21) с дополнительными условиями на внешней границе (22) и на внутренней границе (23). В этом случае, также, как и в предыдущих, несложно проверить путем непосредственного интегрирования по частям положительную определенность и самосопряженность соответствующего оператора.

В данном случае поставленной задачи, удовлетворяющее внутреннему граничному условию (3) и уравнению (1) во внутренних точках $D_{l,0,h}$, можно представить в виде

$$X(x) = \begin{cases} C_1^-\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right) + C_2\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right) + C_3\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right), & -l+h \le x < 0, \\ C_1^+\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right) + C_2\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right) + C_3\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right), & 0 \le x \le l+h. \end{cases}$$

Выполнение условий (22) приходит к системе

$$\begin{cases} -C_1^-\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) + C_2\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) - C_3\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) = 0, \\ C_1^-\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) - C_2\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) + C_3\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) = 0, \\ C_3^+\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) + C_2\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) + C_3\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) = 0, \\ C_4^+\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) + C_2\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) + C_3\mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) = 0. \end{cases}$$

Условие равенства нулю ее определителя преобразуется к уравнению

$$\begin{gathered} \left(\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right)\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) - \mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right)\right)\times \\ \times\left(\mathrm{K}_4^2\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) - \mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right)\right) + \\ +\left(\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right)\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) - \mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right)\right)\times \\ \times\left(\mathrm{K}_4^2\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) - \mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right)\right) = 0 \end{gathered} \tag{32}$$

Корни $\{\lambda_n\}$, $n \in N$ уравнения (32) при $h = 0$ совпадают с корнями уравнения (29). С помощью формул (18) запишем уравнение (32) в виде

$$\begin{gathered} \left(\Phi_4\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) - 1\right)\cdot\Phi_3\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) + \\ +\left(\Phi_4\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\lambda}(l-h)\right) - 1\right)\cdot\Phi_3\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\lambda}(l+h)\right) = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Заключение. В работе исследованы свойства квадратичных форм функций ОТС. Введено понятие задачи с дополнительными условиями на внутренней границе. Показана возможность постановки задач с такими условиями, при которых изучаемый оператор является положительным и самосопряженным. Это позволяет напрямую исследовать спектральные свойства соответствующих операторов. В ряде случаев, опираясь на полученные свойства квадратичных форм ОТС, приведены примеры решения таких задач в явном виде и получены полные ортонормированные системы собственных функций таких операторов. Разработанные методы могут быть полезны для решения более сложных прикладных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Крылов А.Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. – Л.: Изд. АН СССР, 1931.
2. *Пузыревский Н.П.* Расчеты фундаментов. – Петроград: Изд. И.И.П.С., 1923.
3. *Филиппов А.П.* Методы расчета сооружений на колебания. – М., Л.: Стройиздат Наркомстром, 1940.
4. *Виноградов Ю.И.* Функции Коши-Крылова в расчетах на прочность пластин и оболочек // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2013. – № 8. – С. 15-19.
5. *Виноградов Ю.И.* Мультипликативный метод решения краевых задач теории оболочек // Прикладная математика и механика. РАН. – 2013. – Т. 77. – Вып. 4. – С. 620-628.
6. *Виноградов Ю.И.* Функции Коши-Крылова в расчетах на прочность пластин и оболочек // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2013. – № 8. – С. 15-19.
7. *Ефимов А.В., Клово А.Г.* Метод промежуточных задач для исследования вопросов разрушения пластины, движущейся под действием внешней, вынуждающей силы // Пятое советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. (Материалы совещания). – Новосибирск, 1979. – С. 42-44.
8. *Клово А.Г.* Некоторые вопросы колебаний кварцевых резонаторов с одним держателем. Физические основы микроэлектроники // Сб. трудов МИЭТа. – М., 1979. – С.58-65.
9. *Aronszajn N., Weinstein A.* On the unified theory of eigenvalues of plates and membrans // Amer. J. Math., 64 (1942), 623.
10. *Вайнштейн А.* Промежуточные задачи и максимально-минимальная теория собственный значений. // Сб. Математика. – 1964. – 8:5. – С. 91-101.
11. *Weinstein A. and Stenger W.* Intermediate Problems for Eigenvalues. – New York and London, 1972.
12. *Weinstein A.* On intermediate eigenvalues problems maximum-minimum theory and Kolmogorov-Ravlovitz n-widths // В сб. Комплексный анализ и его приложения. – М.: Наука, 1978. – С. 92-101.
13. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах на собственные значения. – М.: Мир, 1970.
14. *Клово А.Г.* Задачи на собственные значения для одного линейного параметризованного оператора. Деп. ВИНИТИ № 5428-80, 24 дек. 1980. – 34 с.
15. *Клово А.Г.* Некоторые свойства обобщенных тригонометрических систем // «Донецкие чтения 2018: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности»: Матер. III Международной научной конференции. ДНР. Донецк. Т. 1 Физико-математические и технические науки. – 2018. – С. 349-350.
16. *Клово А.Г., Кузнецов А.Е., Кузнецов Р.Е., Чистякова Т.А.* Построение и свойства обобщенных тригонометрических систем нечетного порядка // Матер. X международной научно-технической конференции в рамках V международного научного форума Донецкой народной республики. – Донецк: ДОННТУ, 2019. – С. 25-29.
17. *Клово А.Г., Куповых Г.В., Чистякова Т.А.* Обобщенные тригонометрические системы и некоторые приложения // Матер. VI международной научно-технической конференции «Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях» (СИТОНИ-2019). ДНР. – Донецк, 2019. – С. 53-63.
18. *Клово А.Г., Куповых Г.В., Чистякова Т.А.* Об одном подходе к тригонометрии // Матер. IV-й Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные и инновационные технологии в науке и образовании» (ИиИТО-2019). – Ростов-на-Дону, 2020. – С. 467-473.

19. *Клово А.Г., Куповых Г.В., Чистякова Т.А.* Некоторые свойства и приложения обобщенных тригонометрических систем // Матер. Всероссийской научно-методической конференции «Актуальные проблемы преподавания математических и естественно-научных дисциплин в образовательных организациях высшего образования». – Кострома, 2020. – С. 72-82.
20. *Клово А.Г., Куповых Г.В., Ляпунова И.А., Чистякова Т.А., Кузнецов А.Е., Кузнецов Р.Е.* Свойства ОТС произвольного порядка // Матер. V Международной научной конференции «Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». Физико-математические и технические науки. Ч. 1. ДНР. – Донецк, 2020. – С. 155-157.

REFERENCES

1. *Krylov A.N.* O raschete balok, lezhashchikh na uprugom osnovanii [On the calculation of beams lying on an elastic base]. Leningrad: Izd. AN SSSR, 1931.
2. *Puzyrevskiy N.P.* Raschety fundamentov [Calculations of foundations]. Petrograd: Izd. I.I.P.S., 1923.
3. *Filippov A.P.* Metody rascheta sooruzheniy na kolebaniya [Methods of calculating structures for vibrations]. Moscow, Leningrad: Stroyizdat Narkomstrom, 1940.
4. *Vinogradov Yu.I.* Funktsii Koshi-Krylova v raschetakh na prochnost' plastin i obolochek [Cauchy-Krylov functions in calculations for the strength of plates and shells], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [News of higher educational institutions. Mechanical engineering], 2013, No. 8, pp. 15-19.
5. *Vinogradov Yu.I.* Mul'tiplikativnyy metod resheniya kraevykh zadach teorii obolochek [Multiplicative method for solving boundary value problems of shell theory], *Prikladnaya matematika i mekhanika. RAN* [Applied Mathematics and Mechanics. RAS], 2013, Vol. 77, Issue 4, pp. 620-628.
6. *Vinogradov Yu.I.* Funktsii Koshi-Krylova v raschetakh na prochnost' plastin i obolochek [Cauchy-Krylov functions in calculations for the strength of plates and shells], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [News of higher educational institutions. Mechanical engineering], 2013, No. 8, pp. 15-19.
7. *Efimov A.V., Klovo A.G.* Metod promezhutochnykh zadach dlya issledovaniya voprosov razrusheniya plastiny, dvizhushcheysya pod deystviem vneshney, vynuzhdayushchey sily [The method of intermediate problems for the study of the issues of the destruction of a plate moving under the action of an external, compelling force], *Pyatoe sovetsko-chekhoslovatskoe soveshchanie po primeneniyu metodov teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza k zadacham matematicheskoy fiziki. (Materialy soveshchaniya)* [The fifth Soviet-Czechoslovak meeting on the application of methods of the theory of functions and functional analysis to problems of mathematical physics. (Materials of the meeting)]. Novosibirsk, 1979. pp. 42-44.
8. *Klovo A.G.* Nekotorye voprosy kolebaniy kvartsevykh rezonatorov s odnim derzhatelem. Fizicheskie osnovy mikroelektroniki [Some issues of oscillation of quartz resonators with one holder. Physical foundations of microelectronics], *Sb. trudov MIETa* [Collection of works of MIET]. Moscow, 1979, pp. 58-65.
9. *Aronszajn N., Weinstein A.* On the unified theory of eigenvalues of plates and membrans, *Amer. J. Math*., 64 (1942), 623.
10. *Vaynshteyn A.* Promezhutochnye zadachi i maksimal'no-minimal'naya teoriya sobstvennyy znacheniy [Intermediate tasks and the maximum-minimum theory of eigenvalues], *Sb. Matematika* [Collection of Mathematics], 1964, 8:5, pp. 91-101.
11. *Weinstein A. and Stenger W.* Intermediate Problems for Eigenvalues. New York and London, 1972.
12. *Weinstein A.* On intermediate eigenvalues problems maximum-minimum theory and Kolmogorov-Ravlovitz n-widths, *V sb. Kompleksnyy analiz i ego prilozheniya* [In the collection Complex analysis and its applications]. Moscow: Nauka, 1978, pp. 92-101.
13. *Guld S.* Variatsionnye metody v zadachakh na sobstvennye znacheniya [Variational methods in eigenvalue problems]. Moscow: Mir, 1970.
14. *Klovo A.G.* Zadachi na sobstvennye znacheniya dlya odnogo lineynogo parametrizovannogo operatora. Dep. VINITI № 5428-80, 24 dek. 1980 [Eigenvalue problems for one linear parametrized operator. Dep. VINITI No. 5428-80, 24 Dec. 1980], 34 p.
15. *Klovo A.G.* Nekotorye svoystva obobshchennykh trigonometricheskikh sistem [Some properties of generalized trigonometric systems], *«Donetskie chteniya 2018: obrazovanie, nauka, innovatsii, kul'tura i vyzovy sovremennosti». Mater. III Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. DNR. Donetsk. T. 1 Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* ["Donetsk

Readings 2018: education, science, innovation, culture and challenges of our time": Materials of the III International Scientific Conference. DNR. Donetsk. Vol. 1 Physical, mathematical and technical sciences], 2018, pp. 349-350.

16. *Klovo A.G., Kuznetsov A.E., Kuznetsov R.E., Chistyakova T.A.* Postroenie i svoystva obobshchennykh trigonometricheskikh sistem nechetnogo poryadka [Construction and properties of generalized trigonometric systems of odd order], *Mater. X mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii v ramkakh V mezhdunarodnogo nauchnogo foruma Donetskoy narodnoy respubliki* [Materials of the X International Scientific and Technical Conference within the framework of the V International Scientific Forum of the Donetsk People's Republic]. Donetsk: DONNTU, 2019, pp. 25-29.
17. *Klovo A.G., Kupovykh G.V., Chistyakova T.A.* Obobshchennye trigonometricheskie sistemy i nekotorye prilozheniya [Generalized trigonometric systems and some applications], Mater. VI mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Sovremennye informatsionnye tekhnologii v obrazovanii i nauchnykh issledovaniyakh» (SITONI-2019). DNR [Materials of the VI International Scientific and Technical Conference "Modern Information Technologies in Education and scientific research" (SITONI-2019). DNR]. Donetsk, 2019, pp. 53-63.
18. *Klovo A.G., Kupovykh G.V., Chistyakova T.A.* Ob odnom podkhode k trigonometrii [About one approach to trigonometry], *Mater. IV-y Vserossiyskoy nauchno-metodicheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Informatsionnye i innovatsionnye tekhnologii v nauke i obrazovanii» (IiITO-2019)* [Materials of the ivth All-Russian Scientific and Methodological Conference with international participation "Information and Innovative technologies in Science and Education" (IIITE-2019)]. Rostov-on-Don, 2020, pp. 467-473.
19. *Klovo A.G., Kupovykh G.V., Chistyakova T.A.* Nekotorye svoystva i prilozheniya obobshchennykh trigonometricheskikh sistem [Some properties and applications of generalized trigonometric systems], *Mater. Vserossiyskoy nauchno-metodicheskoy konferentsii «Aktual'nye problemy prepodavaniya matematicheskikh i estestvenno-nauchnykh distsiplin v obrazovatel'nykh organizatsiyakh vysshego obrazovaniya»* [Materials of the All-Russian Scientific and methodological Conference "Actual problems of teaching mathematical and natural science disciplines in educational institutions of higher education"]. Kostroma, 2020, pp. 72-82.
20. *Klovo A.G., Kupovykh G.V., Lyapunova I.A., Chistyakova T.A., Kuznetsov A.E., Kuznetsov R.E.* Svoystva OTS proizvol'nogo poryadka [Properties of the OTS of arbitrary order], *Mater. V Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Donetskie chteniya 2020: obrazovanie, nauka, innovatsii, kul'tura i vyzovy sovremennosti». Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Materials of the V International Scientific Conference "Donetsk Readings 2020: education, science, innovation, culture and Modern challenges". Physico-mathematical and technical sciences]. Part 1. Donetsk, 2020, pp. 155-157.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.Н. Каркищенко.

Клово Александр Георгиевич – Южный федеральный университет; e-mail: klovo_ag@mail.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 89281221064; к.ф.-м.н.; доцент.

Куповых Геннадий Владимирович – e-mail: kupovykh@sfedu.ru; тел.: 89289543642; д.ф.-м.н.; профессор.

Илюхин Александр Алексеевич – e-mail: iliukhin@sfedu.ru; тел. 89381617442; д.ф.-м.н.; профессор.

Ляпунова Ирина Артуровна – e-mail: ialyapunova@sfedu.ru; тел.: 89034310026; к.ф.-м.н.; доцент.

Klovo Alexander Georgievich – Southern Federal University; e-mail: klovo_ag@mail.ru; Taganrog, Russia; phone: +79281221064; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.

Kupovykh Gennady Vladimirovich – e-mail: kupovykh@sfedu.ru; phone: +79289543642; dr. of phys. and math. sc.; professor.

Ilyukhin Alexander Alekseevich – e-mail: iliukhin@sfedu.ru; phone: +79381617442; dr. of phys. and math. sc.; professor.

Lyapunova Irina Arturovna – e-mail: ialyapunova@sfedu.ru; phone: +79034310026; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.