Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, Sankt-Peterburg, 27 sentyabrya 2019 g. [Security service in Russia: experience, problems, prospects. Modern methods and technologies of prevention and prevention of emergency situations: Materials of the XI All-Russian Scientific and Practical Conference, St. Petersburg, September 27, 2019], Compiled by: Zykov A.V., Fedorova N.V. Saint Petersburg: Sankt-Peterburgskiy universitet Gosudarstvennoy protivopozharnoy sluzhby Ministerstva Rossiyskoy Federatsii po delam grazhdanskoy oborony, chrezvychaynym situatsiyam i likvidatsii posledstviy stikhiynykh bedstviy, 2019, pp. 32-36.

20. *Sergeev A.A., Lomov V.A., Zaval'nyuk S.I., Rybitskiy V.A.* Sv. o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2021611604 Rossiyskaya Federatsiya. Imitatsionnaya model' rascheta ukrupnennykh normativov pri provedenii obsledovaniya stantsiy na zheleznoy doroge [Certificate of state registration of a computer program No. 2021611604 Russian Federation. Simulation model for calculating enlarged standards when conducting a survey of stations on the railway]: No. 2020663512: declared 02.11.2020: published 02.02.2021; the applicant is the Federal State State Military Educational Institution of Higher Education "Military Academy of Logistics named after General of the Army A.V. Khrulev" of the Ministry of Defense of the Russian Federation.

Статью рекомендовала к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Л.В. Черкесова.

Пиневич Елена Витальевна – Донской государственный технический университет; e-mail: hpinevich@mail.ru; г. Ростов-на-Дону, Россия; тел.: +79515170493; кафедра кибербезопасности информационных систем; к.т.н.; доцент.

Лисовский Вадим Станиславович – e-mail: pliyznik@yandex.ru; тел.: +79515376747; кафедра кибербезопасности информационных систем; студент.

Алтынов Дмитрий Сергеевич – Ростовский государственный университет путей сообщения; e-mail: dimasya21@mail.ru; г. Ростов-на-Дону, Россия; тел.: +79096515398; к.э.н.; доцент учебного центра транспортной безопасности.

Pinevich Elena Vital'evna – Don State technical University; e-mail: hpinevich@mail.ru; Rostov-on-Don, Russia; phone: +79515170493; the department of cybersecurity of information systems; cand. of eng. sc.; associate professor.

Lisovsky Vadim Stanislavovich – e-mail: pliyznik@yandex.ru; phone: +79515376747; the department of cybersecurity of information systems; student.

Altynov Dmitry Sergeevich – Rostov State Transport University; e-mail: altynov_prav@mail.ru; Rostov-on-Don, Russia; phone: +79096515398; cand. of econ. sc.; associate professor of Military training center.

УДК 51.74 DOI 10.18522/2311-3103-2021-3-54-64

С.Г. Буланов

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен метод анализа устойчивости в смысле Ляпунова систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод базируется на критериях устойчивости в виде необходимых и достаточных условий, полученных на основе векторно-матричных преобразований разностных схем численного интегрирования. Представлены разновидности критериев в мультипликативной, аддитивной и матричной форме. Конструкция критериев влечет возможность их программной реализации. Для повышения достоверности анализа устойчивости приближения решения, входящего в конструкцию критериев, находятся на основе кусочно-интерполяционной аппроксимации полиномами Лагранжа, преобразованными к форме с числовыми коэффициентами. Проведен программный и численный эксперимент по анализу устойчивости модели периодической реакции Белоусова-Жаботинского, относящейся к клас-

су жестких систем, при заданных начальных условиях. Анализ выполняется на основе представленных критериев и по результатам работы программы однозначно определяется характер устойчивости в режиме реального времени. На основе результатов эксперимента можно утверждать, что замена разностных приближений решения на кусочно-интерполяционные приближения повышает достоверность анализа устойчивости, сокращает время исследования, позволяет определять асимптотические свойства решения. В целом предложенный подход является альтернативой методам качественной теории дифференциальных уравнений и дает возможность в режиме реального времени достоверно установить характер устойчивости жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Устойчивость по Ляпунову; анализ устойчивости жестких систем; решение жестких систем.

S.G. Bulanov

STABILITY ANALYSIS OF RIGID SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A method for analyzing stability in the sense of Lyapunov for systems of ordinary differential equations is proposed. The method is based on stability criteria in the form of necessary and sufficient conditions obtained on the basis of vector-matrix transformations of difference numerical integration schemes. The varieties of criteria in multiplicative, additive and matrix form are presented. The design of the criteria implies the possibility of their programmatic realization. To increase the reliability of the stability analysis, the approximations of the solution included in the construction of the criteria are based on piecewise interpolation approximation by Lagrange polynomials converted to a form with numerical coefficients. A programming and numerical experiment is carried out to analyze the stability of the Belousov-Jabotinsky periodic reaction model, which belongs to the class of rigid systems, under given initial conditions. The analysis is carried out on the basis of the presented criteria and the results of the program clearly determine the nature of the stability in real time. Based on the results of the experiment, it can be argued that replacing the difference approximations of the solution with piecewise interpolation approximations increases the reliability of the stability analysis, reduces the study time, and makes it possible to determine the asymptotic properties of the solution. In general, the proposed approach is an alternative to the methods of the qualitative theory of differential equations and makes it possible to reliably determine the stability of rigid systems of ordinary differential equations in real time.

Lyapunov stability; analysis of the stability of rigid systems; solution of rigid systems.

Введение. Анализ устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) необходимо производить при решении задач многих разделов механики, физики, теории автоматического регулирования, теории сложных систем [1–3]. С целью анализа, как правило, используются методы качественной теории устойчивости [4, 5]. В частности, эти методы используются при управлении движущимся объектом, для стабилизации движения спутника, при создании математических моделей механических систем с тонкостенными конструкциями, при управлении технологическими процессами, при выборе технологических параметров микросхем. Анализ устойчивости необходим при моделировании управления движением роботов, при создании авиационных и высотных строительных конструкций, в гидродинамике и химической кинетике, синергетике. Использование компьютерной техники для данного анализа целесообразно для ряда технологических, физических, механических, производственных и других процессов. В частности, теория и практика сверхоперативного управления приводит к необходимости достоверного анализа устойчивости средствами вычислительной техники [6–8].

В статье представлен метод, разрабатываемый с целью автоматизированного контроля устойчивости. В основе метода лежат критерии устойчивости, полученные на основе векторно-матричных преобразований разностных схем численного интегрирования. Полученная, в ходе компьютерной реализации критериев, информация должна позволить сделать однозначный вывод о характере устойчивости исследуемой системы.

Описание метода. Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \; Y(t_0) = Y_0 . \tag{1}$$

Предполагается, что существует $\delta > 0$, при котором выполнены все условия существования и единственности для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0, \infty)$ и для каждого его возмущения с начальным вектором из окрестности $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta$. Функция $F(t, Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t в области $R: \{t_0 \le t < \infty;\, Y(t),\, \forall \tilde{Y}(t): \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta\}$.

В данных условиях величина возмущения решения задачи (1) методом Эйлера в форме с остаточным членом на произвольном промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \tilde{y}_{ki} - y_{ki} + \frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\tilde{y}_{ki} - y_{ki}} (\tilde{y}_{ki} - y_{ki}) h + w_{ki}, \;\; w_{ki} = \tilde{q}_{ki} - q_{ki}, \tag{2}$$

где q_{ki}, $\tilde{q}_{ki}$ остаточные члены формулы Тейлора для k-го компонента приближения [9].

Значение $t \in [t_0, \infty)$ является произвольно фиксированным, при этом индекс i неограниченно растет одновременно с убыванием равномерного шага:

$$t = \mathrm{const}, \;\; t = t_{i+1}, \;\; h = (t_{i+1} - t_0)/(i+1), \;\; i = 0, 1, \ldots .$$

Рекуррентное преобразование (2) влечет

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h)(\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) + R_{0i}^{(k)},$$

$$R_{0i}^{(k)} = \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{\ell=0}^{r} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h)\, w_{k(i-r-1)} + w_{ki},$$

где $D_i^{(k)} = (f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)) \,/\, (\tilde{y}_{ki} - y_{ki})$.

В рассматриваемых условиях выполняется соотношение [9]

$$\lim_{i \to \infty} R_{0i}^{(k)} = 0 \;\; \forall t \in [t_0, \infty), \forall k \in \overline{1, n} .$$

В [9] установлено, что имеет место

Теорема 1. Для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало Δ_1, $0 < \Delta_1 \le \delta$, такое, что $\forall \tilde{Y}(t)$, $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, при ограничении $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_1$ выполняется неравенство

$$\left| \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) \right| \le c, \;\; c = \mathrm{const}, \; \forall t \in [t_0, \infty), \; \forall k \in \overline{1, n} . \tag{3}$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и существовало $\Delta_2 \le \Delta_1$, такое, что $\left\| \widetilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t \to \infty} \left| \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n} \cdot \tag{4}$$

Поскольку для $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall k \in \overline{1, n}$ справедливо соотношение

$$\frac{\widetilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\widetilde{y}_{k0} - y_{k0}} = \prod_{\ell=0}^{i} (1 + D_{i-\ell}^{(k)} h)$$

то критерии устойчивости (3), (4) можно представить в виде:

$$\left| \frac{\widetilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\widetilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| \le c\,, \; c = \mathrm{const}\,, \; \forall t \in \left[t_0, \infty \right),\; k \in \overline{1, n}\,. \tag{5}$$

$$\lim_{t \to \infty} \left| \frac{\widetilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\widetilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| = 0\,, \; k \in \overline{1, n}\,. \tag{6}$$

Критерии (5), (6) позволяют определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости жестких систем ОДУ без использования методов качественной теории дифференциальных уравнений. Получены разновидности критериев (3)–(6) в матричной форме, на основе линеаризации системы (1) [10, 11], и в аддитивной форме в результате преобразований выражений критериев [12]:

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} D_{i-\ell}^{(k)} h \;\le\; c_1,\; c_1 = \mathrm{const}\,,\; \forall t \in \left[t_0, \infty \right),\; k \in \overline{1, n}\,.$$

$$\lim_{t \to \infty} \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} D_{i-\ell}^{(k)} h = -\infty\,,\; k \in \overline{1, n}\,.$$

Конструкция критериев позволяет реализовать их программно и по численному изменению величины из левой части (5) делать вывод о характере устойчивости исследуемой системы. Это влечет возможность компьютерного анализа устойчивости в режиме реального времени [13, 14]. С целью уточнения разностных приближений возмущенного и невозмущенного решений, необходимых для применения критериев (5), (6) используется метод варьируемого кусочно-интерполяционного приближения решения системы ОДУ [15, 16].

Полином Лагранжа всегда можно представить в виде $\Psi_{n_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n_0} a_\ell x^\ell$, где $a_\ell = \sum_{j=0}^{n_0} \frac{f(t_j) d_{\ell j}}{G_{n_0 j}(j)}$, $x = \frac{t - t_0}{h}$. Приближение решения и правой части (1) на $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{R-1} [a_i, b_i]$ сводится к последовательному приближению на подынтервалах

$$[a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{P-1} [t_j, t_{j+1}],\; P = 2^{k_0}\,,\; k_0 = \{0, 1, \ldots\}\,. \tag{7}$$

При каждом $i \geq 1$ полагается $y_k(a_i) = y_{k-1}(b_{i-1})$, $y_k(a_0) = y_{k0}$. На каждом подынтервале из (7) строится кусочно-интерполяционное приближение функции правой части (1). Количество подынтервалов $P = 2^{k_0}$ и степень полинома n_0 выбираются так, чтобы было минимальным значение

$$\delta_{k\,i\,j}(t) = |\,\psi_{k\,j\,n_0}(t) - f_k(t,\, z_{1j}(t), \ldots, z_{n\,j}(t))\,|\,,\ t \in [t_j\,, t_{j+1}]\,,$$

$$j = \overline{0,\, P-1},\ \ k \in \overline{1,\, n}\,,$$

где $\psi_{k\,j\,n_0}(t) \approx f_k(t,\, y_1, \ldots, y_n)$, $z_{k\,j}(t) = y_{k\,j} + \int\limits_{t_j}^{t} \psi_{k\,j\,n_0}(t)\,dt$ – полином с числовыми коэффициентами, приближающий искомое решение. При этом значения в узлах интерполяции на каждом подынтервале первоначально считаются равными значению в левой границе.

При каждом j подынтервал $[t_j\,, t_{j+1}]$ из (7) разбивается на n_0 равноотстоящих узлов с шагом h_0:

$$t_{j\,p} = t_j + p\,h_0\,,\ \ p = \overline{0,\, n_0}\,,\ \ h_0 = \frac{t_{j+1} - t_j}{n_0}\,.$$

Соответственно приближение правой части примет вид:

$$\varphi_{k\,j\,p} = f_k(t_{j\,p},\, \bar{y}_{1\,j\,p}, \ldots, \bar{y}_{n\,j\,p}),\ \ p = \overline{0,\, n_0}\,,\ \ k \in \overline{1,\, n}\,,$$

где $\bar{y}$ обозначает вычисляемое приближение точного решения y. Далее строится полином Лагранжа степени n_0, который приводится к виду:

$$\psi_{k\,j\,n_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n_0} a_{k\,j\,\ell} \left(\frac{t - t_{j0}}{h_0}\right)^{\ell},\ \ a_{k\,j\,\ell} = \sum_{p=0}^{n_0} \frac{\varphi_{k\,j\,p}\, d_{\ell\,p}}{G_{n_0\,p}}\,. \tag{8}$$

Полином (8) приближает производную решения задачи (1). Приближение самого решения строится как первообразная от (8) с постоянной, принимающей значение $\bar{y}_{k\,j\,0}$. Приближение решения $y_k(t)$ на j-м подынтервале находится по формуле

$$z_{k\,j}(t) = \bar{y}_{k\,j\,0} + h_0 \sum_{\ell=0}^{n_0} \frac{a_{k\,j\,\ell}}{\ell+1} \left(\frac{t - t_{j0}}{h_0}\right)^{\ell+1}. \tag{9}$$

Вычисление значений полинома (9) производится по схеме Горнера при $x = \dfrac{t - t_{j0}}{h_0}$:

$$z_{k\,j}(x) = \bar{y}_{k\,j\,0} + h\left(\ldots\left(\left(\frac{a_{k\,j\,n_0}}{n_0+1}\, x + \frac{a_{k\,j\,(n_0-1)}}{n_0}\right) x + \frac{a_{k\,j\,(n_0-2)}}{n_0-1}\right) x + \ldots + a_{k\,j\,0}\right) x\,.$$

Получаемые в процессе компьютерной реализации приближения решения целесообразно принять за новые уточненные значения для последующего интерполирования. Данный рекуррентный процесс позволяет существенно уточнить полученные приближения. Одновременно с приближением решения имеет место непрерывное на всем рассматриваемом интервале приближение производной от решения.

Численный и программный эксперимент. Эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-4460 в среде программирования Delphi. Написаны программы, реализующие конструкцию критериев (5), (6) [17, 18]. В ходе анализа устойчивости жестких нелинейных систем ОДУ для каждого уравнения системы вычисляется значение выражение из левой части критерия (5) и определяется векторная норма, численное поведение которой, определяет характер устойчивости системы. Приближенные значения возмущенного и невозмущенного решения, входящие в конструкцию критериев (5), (6) будут находиться на основе кусочно-интерполяционного метода.

В качестве жесткой задачи исследуется модель периодической реакции Белоусова-Жаботинского [19]

$$y_1' = 77.27(y_2 + y_1(1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)),\ y_2' = 77.27^{-1}(y_3 - y_2(1 + y_1)),\ y_3' = 0.161(y_1 - y_3)\,. \quad (10)$$

Система (10) относится к таким, которые затруднительно решить с высокой точностью классическими методами. Причина заключается в периодических резких скачках на несколько порядков значений решения на коротких промежутках. Решение таких систем традиционно выполняется с помощью специализированных программ, например в [19] представлено решение системы (10) с помощью программы RODAS, основанной на методе Розенброка. В статье система (10) решается с помощью кусочно-интерполяционного метода с параметрами $n_0 = 2$ – степень полинома, $k_0 = 10$, 2^{k_0} – количество подынтервалов, $\nabla = 0.01$ – длина подынтервала.

Первоначально анализ устойчивости выполняется на основе критериев (5), (6) при начальных условиях $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$ на промежутке $[0,\ 1000]$. В этом случае у системы наблюдаются периодические устойчивые циклы. В табл. 1 представлены численные значения нормы (максимальное значение выражения критерия (5) при $k \in \overline{1,\ n}$), соответствующие первому скачку на отрезке $[0,\ 1000]$. Время работы программы 5 мин., 41 с.

Таблица 1

Результаты анализа устойчивости системы (10) при начальных условиях $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$

t	11	13	15	17	19
norma	3.262	4.693	7.639	16.153	84.062
t	21	23	25	27	29
norma	3.986×10^5	1.843×10^6	7.682×10^4	5.567×10^4	4.034×10^4
t	31	33	35	37	39
norma	2.924×10^4	2.119×10^4	1.535×10^4	1.112×10^4	8.065×10^3
t	41	43	45	47	49
norma	5.845×10^3	4.235×10^3	3.069×10^3	2.224×10^3	1.612×10^3

Ограниченное изменение значений нормы в соответствии с критерием (5) следует трактовать как устойчивость решения системы (10).

Характер поведения нормы на всем промежутке $[0,\ 1000]$ приводится на рис. 1.

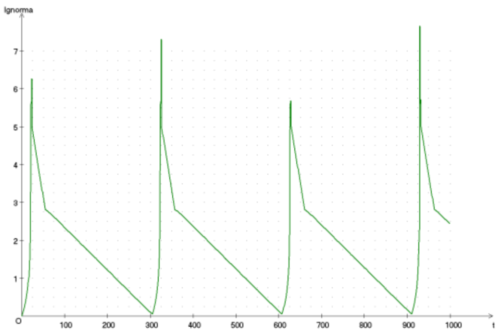

Рис. 1. Колебание значений нормы при анализе устойчивости системы (10) с начальными условиями $y_1(0)=1$, $y_2(0)=2$, $y_3(0)=3$

График решения y_1 системы (10) представлен на рис. 2.

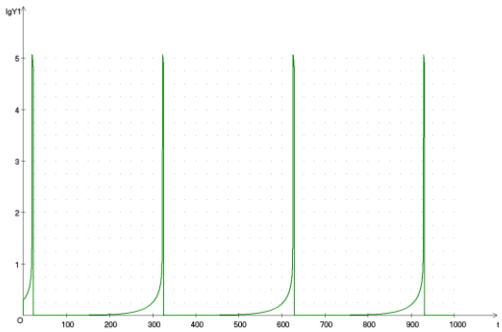

Рис. 2. Колебание решения y_1 *системы (10) при начальных условиях* $y_1(0)=1$, $y_2(0)=2$, $y_3(0)=3$

Таким образом, на основе критериев (5), (6) достоверно определяется характер устойчивости жесткой системы (10). Время анализа существенно уменьшится, если увеличить длину подынтервала до единицы, за исключением участков всплеска значений решений.

Далее выполняется анализ устойчивости системы (10) при начальных условиях $y_1(0)=4$, $y_2(0)=1.1$, $y_3(0)=4$. В табл. 2 представлены результаты численного эксперимента.

Таблица 2

Результаты анализа устойчивости системы (10) при начальных условиях $y_1(0)=4$, $y_2(0)=1.1$, $y_3(0)=4$

t	1	2	3	4	5
norma	1.602×10^4	1.781×10^5	2.131×10^5	4.495×10^4	3.826×10^4
t	6	7	8	9	10
norma	3.257×10^4	2.773×10^4	2.361×10^4	2.009×10^4	1.711×10^4
t	11	12	13	14	15
norma	1.456×10^4	1.239×10^4	1.055×10^4	8.985×10^3	7.649×10^3
t	16	17	18	19	20
norma	6.512×10^3	5.543×10^3	4.719×10^3	4.017×10^3	3.420×10^3

Как и в предыдущем случае, ограниченные колебания значений нормы свидетельствуют об устойчивости решения системы (10).

Таким образом результаты анализа устойчивости оказались в полном соответствии с известными оценками [19], что в частности свидетельствует о целесообразности применения данного метода на практике. Наряду с данным методом возможно применять подходы для оценки характера устойчивости представленные в [20–22]. Эти подходы, основаны на построении функций Ляпунова, допускают компьютерную реализацию.

Заключение. Представлен метод анализа устойчивости жестких систем ОДУ на основе критериев, полученных в результате векторно-матричных преобразований разностных схем численного интегрирования. Форма критериев позволяет реализовать их программно и тем самым автоматизировать процесс анализа устойчивости. При выполнении анализа устойчивости жестких нелинейных систем ОДУ необходимо находить значение возмущенного и невозмущенного решения с высокой степенью точности. Для достижения этой цели в работе используется метод кусочно-интерполяционного приближения решения и правой части системы полиномами Лагранжа с числовыми коэффициентами. Приближения решения, получаемые на этой основе, по точности превосходят приближения, получаемые на основе разностных методов. В дополнение к точности существенно сокращается время на вычисление требуемых приближений, что дает возможность проводить анализ устойчивости на промежутках существенно большей длины и устанавливать асимптотические свойства исследуемых систем ОДУ. На основе программного и численного эксперимента достоверно определяется характер устойчивости модели периодической реакции Белоусова-Жаботинского при заданных начальных условиях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мельников Г.И., Мельников В.Г., Дударенко Н.А., Талапов В.В.* Устойчивость движения нелинейных динамических систем при постоянно действующих возмущениях // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2019. – Т. 19, № 2. – С. 216-221.
2. *Миронов В.В., Митрохин Ю.С.* Технологический подход к исследованию устойчивости динамических систем: прикладные вопросы // Вестник РГРТУ. – 2017. – № 59. – С. 127-135.
3. *Александров А.Ю., Жабко А.П., Косов А.А.* Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных систем на основе декомпозиции // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1215-1233.
4. *Hammarling S.J.* Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation // IMA J. of Num. Analysis. – 1982. – Vol. 2, Issue 3. – P. 303-323.
5. *Luyckx L., Loccufier M., Noldus E.* Computational methods in nonlinear stability analysis: stability boundary calculations // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – Vol. 168, Issue 12. – P. 289-297.
6. *Giesl P., Hafstein S.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming // J. Difference Equ. Appl. – 2014. – Vol. 20, Issue 4. – P. 610-640.
7. *Olgac N., Sipahi R.* A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems // Automatica. – 2004. – Vol. 40, Issue 5. – P. 847-853.
8. *Hafstein S.* A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations // Dynamical Systems. –2005. – Vol. 20. – P. 281-299.
9. *Ромм Я.Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 107-124.
10. *Буланов С.Г.* Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 9. – С. 542-549.

11. *Ромм Я.Е., Буланов С.Г.* Программные критерии устойчивости решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений на основе разностных схем численного интегрирования // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. Специальный выпуск «Математическое моделирование и компьютерные технологии». – 2004. – С. 75-80.
12. *Ромм Я.Е., Буланов С.Г.* Численный эксперимент по компьютерному анализу устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений на основе критериев матричного вида // Деп. в ВИНИТИ. – 14.08.17. – № 89. – 20 с.
13. *Ромм Я.Е., Буланов С.Г.* Компьютерный анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой // Деп. в ВИНИТИ. – 11.03.10. – № 147. – 33 с.
14. *Ромм Я.Е.* Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20, № 12. – С. 105-118.
15. *Ромм Я.Е., Джанунц Г.А.* Кусочная интерполяция функций, производных и интегралов с приложением к решению обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 12 (часть 2). – С. 291-316.
16. *Джанунц Г.А., Ромм Я.Е.* Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 10. – С. 1641-1660.
17. *Ромм Я.Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости решений дифференциальных систем // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 4. – С. 42-63.
18. *Bulanov S.G.* Computer analysis of differential systems stability based on linearization and matrix multiplicative criteria // Journal of Physics: Conf. Series. – 2021. – 1902 012101.
19. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
20. *Doban A., Lazar M.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear differential equations via a Yoshizawa-type construction // 10th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems NOLCOS: IFAC-PapersOnLine. – 2016. – P. 29-34.
21. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations // J. Appl. Math. Comput. – 2008. – Vol. 202, Issue 1. – P. 44-53.
22. *Xiao-Lin L., Yao-Lin J.* Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems // J. Appl. Math. Comput. – 2009. – Vol. 29, Issue 1-2. – P. 247-262.

REFERENCES

1. *Mel'nikov G.I., Mel'nikov V.G., Dudarenko N.A., Talapov V.V.* Ustoychivost' dvizheniya nelineynykh dinamicheskikh sistem pri postoyanno deystvuyushchikh vozmushcheniyakh [tability of nonlinear dynamical system motion under constantly acting perturbations], *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki* [Scientific and technical journal of information technologies, mechanics and optics], 2019, Vol. 19, No. 2, pp. 216-221.
2. *Mironov V.V., Mitrokhin Yu.S.* Tekhnologicheskiy podkhod k issledovaniyu ustoychivosti dinamicheskikh sistem: prikladnye voprosy [Constructive approach to the research of dynamic systems stability: applied problems], *Vestnik RGRTU* [Vestnik of RSREU]. 2017, No. 59, pp. 127-135.
3. *Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P., Kosov A.A.* Analiz ustoychivosti i stabilizatsiya nelineynykh sistem na osnove dekompozitsii [Analysis of stability and stabilization of nonlinear systems via decomposition], *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2015, Vol. 56, No. 6, pp. 1215-1233.
4. *Hammarling S.J.* Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation, *IMA J. of Num. Analysis*, 1982, Vol. 2, No. 3, pp. 303-323.
5. *Luyckx L., Loccufier M., Noldus E.* Computational methods in nonlinear stability analysis: stability boundary calculations, *J. Comput. Appl. Math*, 2004, Vol. 168, No. 12, pp. 289-297.
6. *Giesl P., Hafstein S.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming, *J. Difference Equ. Appl*, 2014, Vol. 20, No. 4, pp. 610-640.

7. *Olgac N., Sipahi R.* A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems, *Automatica*, 2004, Vol. 40, No. 5, pp. 847-853.
8. *Hafstein S.* A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations, *Dynamical Systems*, 2005, Vol. 20, pp. 281-299.
9. *Romm Ya.E.* Komp'yuterno-orientirovannyy analiz ustoychivosti na osnove rekurrentnykh preobrazovaniy raznostnykh resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Computer-oriented stability analysis based on recurrent transformation of difference solutions of ordinary differential equations], *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis], 2015, Vol. 51, No. 3, pp. 107-124.
10. *Bulanov S.G.* Analiz ustoychivosti sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy na osnove preobrazovaniya raznostnykh skhem [Stability analysis of systems of linear differential equations based on transformation of difference schemes], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie], 2019, Vol. 20, No. 9, pp. 542-549.
11. *Romm Ya.E., Bulanov S.G.* Programmnye kriterii ustoychivosti resheniya zadachi Koshi dlya sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy na osnove raznostnykh skhem chislennogo integrirovaniya [Program stability criteria for the solution of the Cauchy problem for systems of linear differential equations based on difference numerical integration schemes], *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki. Spetsial'nyy vypusk «Matematicheskoe modelirovanie i komp'yuternye tekhnologii»* [University news. North-caucasian region. Technical sciences series. Special issue «Mathematical Modeling and Computer Technologies»], 2004, pp. 75-80.
12. *Romm Ya.E., Bulanov S.G.* Chislennyy eksperiment po komp'yuternomu analizu ustoychivosti resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy na osnove kriteriev matrichnogo vida [Computer analysis of the stability of systems of linear differential equations with nonlinear addition], *Dep. v VINITI* [Dep. in VINITI], 14.08.17, No. 89, 20 p.
13. *Romm Ya.E., Bulanov S.G.* Komp'yuternyy analiz ustoychivosti sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy s nelineynoy dobavkoy [Computer analysis of the stability of systems of linear differential equations with nonlinear addition], *Dep. v VINITI* [Dep. in VINITI], 11.03.10, No. 147, 33 p.
14. *Romm Ya.E.* Modelirovanie ustoychivosti po Lyapunovu na osnove preobrazovaniy raznostnykh skhem resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Modeling of stability according to Lyapunov based on difference schemes transformations for solutions of ordinary differential equations], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Modeling], 2008, Vol. 20, No. 12, pp. 105-118.
15. *Romm Ya.E., Dzhanunts G.A.* Kusochnaya interpolyatsiya funktsiy, proizvodnykh i integralov s prilozheniem k resheniyu obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Piecewise interpolation of functions, derivatives and integrals with application to the solution of ordinary differential equations], *Sovremennye naukoemkie tekhnologii* [Modern high technologies], 2020, No. 12 (part 2), pp. 291-316.
16. *Dzhanunts G.A., Romm Ya.E.* Var'iruemoe kusochno-interpolyatsionnoe reshenie zadachi Koshi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s iteratsionnym utochneniem [The varying piecewise interpolation solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations with iterative refinement], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal], 2017, Vol. 57, No. 10, pp. 1616-1634.
17. *Romm Ya.E.* Komp'yuterno-orientirovannyy analiz ustoychivosti resheniy differentsial'nykh sistem [Computer-oriented stability analysis of solutions of differential systems], *Sovremennye naukoemkie tekhnologii* [Modern high technologies], 2020, No. 4, pp. 42-63].
18. *Bulanov S.G.* Computer analysis of differential systems stability based on linearization and matrix multiplicative criteria, *Journal of Physics: Conf. Series*, 2021, 1902 012101.
19. *Khayrer E., Vanner G.* Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi [Solving ordinary differential equations. Rigid and differential-algebraic problems]. Moscow: Mir, 1999, 685 p.
20. *Doban A., Lazar M.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear differential equations via a Yoshizawa-type construction, *10th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems NOLCOS: IFAC-PapersOnLine*, 2016, pp. 29-34.

21. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations, *J. Appl. Math. Comput*, 2008, Vol. 202, No. 1, pp. 44-53.
22. *Xiao-Lin L., Yao-Lin J.* Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems, *J. Appl. Math. Comput*, 2009, Vol. 29, No. 1-2, pp. 247-262.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.И. Витиска.

Буланов Сергей Георгиевич – Ростовский государственный экономический университет; e-mail: bulanovtgpi@mail.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 89094369543; доцент.

Bulanov Sergei Georgievich – Rostov State University of Economics; e-mail: bulanovtgpi@mail.ru; Taganrog, Russia; phone: 89094369543; associate professor.

УДК 004.021 DOI 10.18522/2311-3103-2021-3-64-71

И.О. Шепель

АЛГОРИТМ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ИСТОЧНИКОВ ДАННЫХ В ОБЩУЮ КАРТУ ЗАНЯТОСТИ

В работе рассматривается проблема построения модели проходимости окружающего пространства в среде с большим количеством динамических объектов по данным от нескольких различных сенсоров. Целью работы является качественное улучшение алгоритма построения карты занятости путем добавления способа обработки данных как от существующих алгоритмов детектирования движущихся препятствий, так и от автомобильного радара миллиметрового диапазона. В исследовании решается задача объединения данных о статичном окружении и о динамических объектах в одну общую модель проходимости для дальнейшего планирования траектории движения. Представленная в статье модификация алгоритма способна комплексировать данные как карт занятости, построенных по трехмерному облаку точек от любого датчика, так и данные, представленные в виде массива трехмерных объектов с известными координатами, размерами и ориентацией. Комплексирование данных происходит на уровне построения карт занятости и не накладывает дополнительных требований на источник информации о динамических препятствиях. Алгоритм способен уточнять данные о позиции и размерах динамического объекта скоростью от радара, что позволяет планировать траекторию с учетом движения динамических объектов. Одновременное использование классического подхода к построению карт позволяет обнаруживать препятствия в случае ошибки алгоритма обнаружения динамических препятствий. Разработанный алгоритм работает в реальном масштабе времени на модуле Jetson AGX Xavier*, и протестирован в реальных условиях на мобильной робототехнической платформе в автономном режиме. Сформулированы перспективные направления дальнейших исследований по улучшению представленного подхода.*

Карта занятости; лидар; радар; облако точек; комплексирование данных; обнаружение препятствий; динамический объект; автономное движение.

I.O. Shepel

ALGORITHM FOR COMPLEXING MULTIPLE DATA SOURCES INTO A SINGLE OCCUPANCY MAP

The paper deals with the problem of constructing a passability model of environment with a large number of dynamic objects based on data from several different sensors. ***The aim of the work is to improve the algorithm for constructing the occupancy map by adding data from both existing algorithms for moving obstacles detection and from millimeter-wave automotive radar. The study solves the problem of combining data on static environment and dynamic objects into one general passability model for further trajectory planning. The modification of the algorithm presented in the article is able to combine data from both occupancy maps based on a three-*