Мансур Али Махмуд – Южный федеральный университет; e-mail: mansur@sfedu.com; г. Таганрог, Россия; тел.: 88634371651; кафедра систем автоматизированного проектирования; аспирант.

Мохаммад Жуман Хуссайн – e-mail: zmohammad@sfedu.ru; кафедра систем автоматизированного проектирования; аспирант.

Кравченко Юрий Алексеевич – e-mail: yakravchenko@sfedu.ru; тел.: +79289080151; кафедра систем автоматизированного проектирования, доцент.

Mansour Ali Mahmoud – Southern Federal University; e-mail: mansur@sfedu.com; Taganrog, Russia; phone: +78634371651; the department of computer aided design; graduate student.

Mohammad Juman Hussain – e-mail: zmohammad@sfedu.ru; the department of computer aided design, graduate student.

Kravchenko Yury Alekseevich – e-mail: yakravchenko@sfedu.ru; phone: +79289080151; the department of computer aided design, associate professor.

УДК 519.224.22 DOI 10.18522/2311-3103-2021-2-167-181

А.К. Мельников

ОГРАНИЧЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА РАЗЛИЧНЫХ ОПРОБУЕМЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ВСЕХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ КРАТНОСТИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Статья посвящена нахождению всех целочисленных неотрицательных решений системы линейных уравнений второй кратности типов, далее с.л.у., методом последовательного опробования векторов на принадлежность к решениям системы. Рассматривается количество различных векторов, опробование которых на принадлежности к решениям с.л.у. приведет к получению всех решений с.л.у. Вектор опробований с.л.у. состоит из элементов определяющих число знаков алфавита, имеющих одинаковое число вхождений в выборку. С.л.у. связывает между собой число вхождений элементов всех типов в рассматриваемую выборку, мощность алфавита, объём выборки и ограничение на максимальное число вхождений знаков алфавита в выборку. Решение с.л.у. является основой расчета точных распределений вероятностей значений статистик и их точных приближений методом второй кратности, где в качестве точных приближений выступают Δ–точные распределения, отличающиеся от точных распределений не более чем на заранее заданную, сколь угодно малую величину Δ. Величина, выражающая количество опробуемых векторов, является одной из величин определяющих алгоритмическую сложность метода второй кратности, без знания значения которой нельзя определить параметры выборок, для которых при ограничениях на вычислительный ресурс могут быть рассчитаны точные распределения и их точные приближения. Количество различных опробуемых векторов рассматривается в условиях ограничения на максимальное значение числа вхождений элементов алфавита в выборку, так и без ограничений. Найдены аналитические выражения, позволяющие для любых значений мощности алфавита, объёма выборки и ограничения на значение максимального числа вхождений знаков алфавита в выборку вычислять количество опробований различных векторов для получения всех целочисленных неотрицательных решений системы линейных уравнений второй кратности типов. Вид полученного аналитического выражения для количества опробований векторов позволяет использовать его при изучении алгоритмической сложности расчетов точных распределений и их точных приближений с заранее указанной точностью Δ.

Вероятность; точное распределение; точное приближение; система линейных уравнений; алгоритмическая сложность; многопроцессорная вычислительная система.

A.K. Melnikov

LIMITING THE NUMBER OF DIFFERENT TEST VECTORS TO OBTAIN ALL SOLUTIONS OF A SYSTEM OF THE SECOND MULTIPLICITY LINEAR EQUATIONS ON MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEM

In the paper we consider calculation of all integer nonnegative solutions of a linear equation system (LES) of the second types order by a method of sequential vector testing. The method checks whether a vector is a solution of the LES. We consider different vectors and test if they belong to the set of the LES solutions. As a result, after such testing we obtain all solutions of the LES. The LES testing vector consists of the elements which are the numbers of some alphabet signs with the same number of occurrences in the sample. The LES unites the number of occurrences of the elements of all types into the considering sample, the power of the alphabet, the size of the sample, and the limitation for the maximum number of occurrences of the alphabet signs into the sample. The LES solution is the base for calculation of exact statistics probability distributions and their exact approximations by the method of the second types order. Here, the exact approximations are Δ*–exact distributions. The difference between the* Δ*–exact distributions and the exact distributions does not exceed the predefined arbitrary small value* Δ*. The number of test vectors is one of those which defines algorithmic complexity of the method of second types order. Without it, it is impossible to define the parameters of samples, and to calculate exact distributions and their exact approximations for limited hardware resource. We consider various test vectors for the limited maximum number of occurrences of the alphabet signs in the sample, and for the unlimited one. We have obtained formulas to calculate the number of tests for various vectors. Here, the values of the power of the alphabet, the size of the sample, and the limitations for the maximum number of occurrences of the alphabet signs into the sample can be arbitrary. Using the obtained formulas, we can get all integer nonnegative solutions of the LES of the second types order. We can use the obtained formula for analysis of algorithmic complexity of calculations of exact distributions and their exact approximations with the predefined accuracy* Δ*.*

Probability; exact distribution; exact approximation; linear equations system; algorithmic complexity; multiprocessor computer system.

Введение. Информационные технологии позволяют рационально использовать современные достижения в области развития многопроцессорных вычислительных систем (МВС) [1, 2] и средств автоматизации [3] для решения задачи статистического анализа последовательностей. Данная задача возникает при распознавании текстов на естественных языках [4, 5], обработки информации в дискретных каналах связи [6] и при противодействии кибератакам на вычислительные ресурсы [7].

Статистический анализ последовательностей при необходимости разделения гипотез поводится, в частности при помощи критериев согласия. Для получения наибольшей относительной эффективности [8,9] критерия необходимо применять точные распределения [10]. Применение распределений отличных от точных например таких как предельные распределения ведет к потери эффективности обработки, что выражается в увеличении ложно принятых решений о справедливости проверяемых гипотез.

Расчет точных распределений является вычислительно трудоёмкой задачей [11], поэтому для расширения диапазона значений параметров выборок, для которых возможен расчет точных распределений, наряду с использованием возможностей МВС необходимо модернизировать методы их расчета. Ограничение числа опробований при поиске всех решений уравнения второй кратности типов позволит уменьшить алгоритмическую сложность метода расчета точных распределений и увеличить диапазон параметров выборок для проведения эффективной статистической обработки последовательностей.

Метод второй кратности [12] расчета распределений вероятностей значений статистик [13], основанный на решении системы линейных уравнений второй кратности типов [14], применяется как для расчета точных распределений вероятностей значений статистик [15], далее точных распределений, так и для расчета их точных приближений, отличающихся от точных распределений не более чем на заранее заданную, сколь угодно малую величину Δ (Δ-точных распределений [16]). Для оценки алгоритмической сложности [17] метода второй кратности при расчете точных распределений и их точных приближений, требуется оценить количество различных опробуемых векторов, необходимое для нахождения всех решений системы линейных уравнений второй кратности типов [14].

Данная работа посвящена расчету количества различных опробуемых векторов, необходимых для получения всех решений системы линейных уравнений второй кратности.

Постановка задачи. Основой применения метода второй кратности для расчета точных распределений [15] является получение всех решений системы линейных уравнений (с.л.у.) второй кратности типов

$$\begin{cases} \mu_0 + \mu_1 + ... + \mu_n = N \ , \\ 1\mu_1 + 2\mu_2 + ... + n\mu_n = n \end{cases} \qquad (1)$$

где N мощность алфавита $A_N = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$, n длина последовательности (объёма выборки [18]), а μ_j есть количество знаков алфавита A_N, встретившихся в последовательности (выборке) j раз. Для получения всех решений с.л.у (1) может использоваться метод последовательного перебора (м.п.п.), состоящий из генерации всех векторов $\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)},..., \mu_n^{(i)})\}$ длины $(n+1)$

$$\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)},..., \mu_n^{(i)}), i = 1,..., L_{\mu(N,n,n)}\},$$

с одновременной подстановкой каждого $\mu^{(i)}$ в с.л.у. (1) и их непосредственной проверкой, опробованием, на возможность быть его решением, а $L_{\mu(N,n,n)}$.есть количество опробуемых векторов $\mu^{(i)}$. Опробование может проводится в лексикографическом порядке [19, 20], начиная с вектора $\mu^{(1)}$,

$$\mu^{(1)} = (\underbrace{0, 0, ... 0, 1}_{n+1})$$

с учетом ограничений, накладываемых видом с.л.у. второй кратности типов.

Алгоритмическая сложность [17] получения всех решений с.л.у. вида (1) методом последовательного перебора напрямую зависит от количества опробуемых векторов поэтому получение точной оценки числа опробуемых векторов является важнейшей задачей при определении алгоритмической сложности расчета точных распределений.

Применение метода второй кратности [12] для расчета точных приближений распределений [16] состоит в нахождении решений с.л.у. с ограничениями вида

$$\begin{cases} \mu_0 + \mu_1 + ... + \mu_r = N \ , \\ 1\mu_1 + 2\mu_2 + ... + n\mu_r = n. \end{cases} \qquad (2)$$

где r выступает в качестве параметра ограничения и $r \le n$.

Получение решений с.л.у. вида (2) также проводится методом последовательного перебора в лексикографическом порядке всех векторов $\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)},..., \mu_r^{(i)})\}$ длины $(r+1)$

$$\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, ..., \mu_r^{(i)}), i = 1, ..., L_{\mu(N,n,r)}\}$$

с последующей подстановкой в с.л.у. (2) и непосредственной проверкой, опробованием, где $L_{\mu(N,n,r)}$.количество перебираемых векторов.

Особо подчеркнем, что ведется поиск только неотрицательных целочисленных решений с.л.у (1) и (2), т.е. для с.л.у. (1) справедливо $\{\forall \mu_j^{(i)} \in \mathrm{N}, \mu_j^{(i)} \ge 0 \mid i = 1,\dots,L_{\mu(N,n,r)};\ j = 1,\dots,n\}$, а для с.л.у. (2) справедливо $\{\forall \mu_j^{(i)} \in \mathrm{N}, \mu_j^{(i)} \ge 0 \mid i = 1,\dots,L_{\mu(N,n,r)};\ j = 1,\dots,r\}$.

Алгоритмическая сложность получения всех $K_{\mu(N,n,r)}$ решений [21] с.л.у. вида (2) методом последовательного перебора тоже напрямую зависит от количества опробуемых векторов $L_{\mu(N,n,r)}$ поэтому получение точной оценки числа опробуемых векторов также является важнейшей задачей при определении алгоритмической сложности расчета точных приближений. Процедура последовательного опробования векторов и получения решений схематично показана на рис. 1.

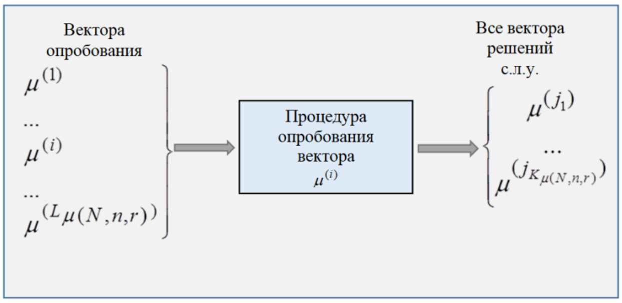

Рис. 1. Процедура последовательного опробования векторов для получения всех решений с.л.у.

Общая задача состоит в оценке значений $L_{\mu(N,n,n)}$ и $L_{\mu(N,n,r)}$ для дальнейшего использования этих оценок при вычислении алгоритмической сложности расчетов точных распределений и их точных приближений.

Оценка количества опробований. Оценим значение $L_{\mu(N,n,r)}$. Из построения с.л.у. второй кратности типов (2) координата $\mu_0^{(i)}$ есть число не встретившихся знаков $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{\mu_0}})$ алфавита $A_N=\{a_1, a_2, \dots , a_N\}$ в исследуемой последовательности (выборке) длины n, составленной из знаков алфавита A_N мощности N. Следовательно координата $\mu_0^{(i)}$ может изменяться от 0 до N.

Отметим, что $\mu_0^{(i)} = N$ означает тот случай, когда в исследуемой последовательности не встретился ни один из знаков алфавита A_N, но это означает то, что последовательность не была реализована на практике, либо все её символы из другого алфавита. Но для общности будем рассматривать и этот случай, т.е. $0 \le \mu_0^{(i)} \le N$.

Каждая координата $\mu_j^{(i)}$, по определению является числом знаков алфавита A_N, встретившихся *j* раз, и, исходя из второго уравнения с.л.у. (2), не может превосходить минимума от *N* и $[n/j]$

$$\{ 0 \le \mu_j^{(i)} \le \min(N, [n/j]) \mid j = \overline{1, r} \}$$

и значит координаты $\{ \mu_j^{(i)} \mid j = \overline{1, r} \}$ в случае $\{ N \le [n/j] \mid j = \overline{1, r} \}$ изменяются в диапазоне $0 \le \mu_j^{(i)} \le N$ и каждая из них может принимать (*N*+1) различное значение.

Теперь, исходя из вышесказанного можно сделать вывод, что каждая из координат $\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, ..., \mu_r^{(i)})\}$ может изменять в диапазоне $\{0 \le \mu_j^{(i)} \le N \mid j = \overline{1, r}\}$ и принимать (*N*+1) различное значение, всего координат $(r+1)$, следовательно в соответствии с [22] все вместе они могут принимать $(N+1)^{r+1}$ значений. Следовательно верхняя грубая оценка $P_1(L_{\mu(N,n,r)})$ значения $L_{\mu(N,n,r)}$ равна

$$L_{\mu(N,n,r)} \le P_1(L_{\mu(N,n,r)}) = (N+1)^{r+1}. \tag{3}$$

Последовательно опробуя различные вектора $\mu^{(i)}$ мы можем и раньше найти все $K_\mu(N, n, r)$ [21] решения с.л.у. (2), так как не знаем как они распределены, но опробовав все $P_1(L_{\mu(N,n,r)})$ мы гарантировано получим все решения с.л.у. (2).

Далее, используя свойства координат $\mu_j^{(i)}$ векторов решений с.л.у. (2) $\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, ..., \mu_r^{(i)})\}$ можно сформулировать и доказать утверждение, позволяющее получить более точную, ограниченную оценку $L_{\mu(N,n,r)}$ числа опробуемых векторов, при которой не будет потеряно ни одно из целочисленных неотрицательных решений с.л.у. вида (2).

Утверждение.

При опробовании векторов $\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, ..., \mu_r^{(i)})\}$ для поиска решений с.л.у. (2), с ограничениями *r* на число переменных $\mu_j^{(i)}$, $j \le r \le n$, методом последовательного перебора количество опробуемых векторов $L_{\mu(N,n,r)}$ ограничивается оценкой $P_2(L_{\mu(N,n,r)})$ принимающей следующее значение:

$$L_{\mu(N,n,r)} \le P_2(L_{\mu(N,n,r)}) =$$
$$= (N+1)^{\min([n/N],r)+1} \times \frac{(\min([n/N],r))!}{(n + \min([n/N],r))!} \cdot \frac{(n+r)!}{r!}, \tag{4}$$

где *N* мощность алфавита $A_N = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$, *n* длина последовательности (объёма выборки) и $r \le n$ ограничение на количество переменных с.л.у. (2).

Доказательство.

Попробуем найти для $L_{\mu(N,n,r)}$ более точную оценку $P_2(L_{\mu(N,n,r)})$. Для этого рассмотрим всевозможные соотношения между *N*, *n* и *r*.

В начале рассмотрим случай $N \le n$.

При выполнении условия $N \le n$ очевидно, что всегда найдется такое минимальное *k*, что

$$k \cdot N = n + \sigma,$$

где σ остаток от целочисленного деления *n* на *N*, а *k* есть антье от частного от деления *n* на *N*

$$k=[\, n / N \,].$$

Рассмотрим диапазон изменений координаты $\mu_1^{(i)}$, являющейся числом знаков алфавита A_N, встретившихся в исследуемой последовательности только один раз. Исходя из второго уравнения в с.л.у. (2)

$$1\mu_1 + 2\mu_2 + ... + r\mu_r = n$$

координата $\mu_1^{(i)}$ может изменяться в следующем диапазоне $0 \le \mu_1^{(i)} \le \min(N, n)$, что эквивалентно выражению $0 \le \mu_1^{(i)} \le \min(N, [n/1])$.

Тогда при рассматриваемом случае $N \le n$ координата $\mu_1^{(i)}$ может изменяться в диапазоне $0 \le \mu_1^{(i)} \le N$ и, следовательно, $\mu_1^{(i)}$ может принимать (*N*+1) различных значений.

Напомним, что при ограничении на число координат $\{\mu_j^{(i)},\ j \le r \le n\}$, при которых все остальные $\{\mu_j^{(i)} \mid j = \overline{r+1, n}\}$ равняются 0 и следовательно могут принимать только одно значение.

Рассмотрим изменение координат $\{\ \mu_j^{(i)} \mid j = \overline{1, r}\ \}$.

Если $k < r \le n$ то:

Координаты $(\ \mu_1^{(i)}, ..., \mu_k^{(i)})$ могут изменяться в диапазоне $\{0 \le \mu_j^{(i)} \le N \mid j = \overline{1, k}\}$, так как для $\{\mu_j^{(i)} \mid j = \overline{1, k}\}$ в условиях *k*=[*n* / *N*] и $\{\, j = \overline{1, k}\,\}$ всегда справедливо $\{\ \min(N, [n/j]) = N \mid j = \overline{1, k}\ \}$ и каждая координата может принимать (*N*+1) различное значение, а все вместе они могут принимать значений $(N+1)^k$ значений.

Следующие $r-k$ координат $(\mu_{k+1}^{(i)}, ..., \mu_r^{(i)})$ изменяются в рамках диапазона

$$\{\ 0 \le \mu_j^{(i)} \le \min\ (N, [n/j]) \mid j = \overline{k+1, r}\ \},$$

а так как

$$\{\ \min\ (N, [n/j]) = [n/j] \mid j = \overline{k+1, r}\ \}$$

то значит координаты $\{\ \mu_j^{(i)} \mid j = \overline{k+1, r}\ \}$ могут изменяются в диапазоне $0 \le \mu_j^{(i)} \le [n/j]$ и каждая из них может принимать $[n/j]+1$ различных значений. Тогда все вместе координаты $\{\ \mu_j^{(i)} \mid j = \overline{k+1, r}\ \}$ могут принимать [23] не более

$$\prod_{j=k+1}^{r}\left(\left[\frac{n}{j}\right]+1\right)\le\left(\left[\frac{n}{k+1}\right]+\frac{k+1}{k+1}\right)\cdot\left(\left[\frac{n}{k+2}\right]+\frac{k+2}{k+2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\frac{r}{r}\right)=$$

$$=\left(\frac{n+k+1}{k+1}\right)\cdot\left(\frac{n+k+2}{k+2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+r}{r}\right)=\frac{(n+k+1)\cdot(n+k+2)\cdot\ldots\cdot(n+r)}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot r}=$$

значений. Что умножением полученного значения на 1 равную

$$1=\frac{k!}{k!}\cdot\frac{(n+k)!}{(n+k)!}$$

и соответствующей группировкой сомножителей

$$=\frac{k!}{k!}\cdot\frac{(n+k)!}{(n+k)!}\cdot\frac{(n+k+1)\cdot(n+k+2)\cdot\ldots\cdot(n+r)}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot r}=$$

$$=\frac{k!}{(n+k)!}\cdot\frac{(n+k)!}{k!}\cdot\frac{(n+k+1)\cdot(n+k+2)\cdot\ldots\cdot(n+r)}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot r}=$$

$$=\frac{k!}{(n+k)!}\cdot\frac{(n+k)!\cdot(n+k+1)\cdot(n+k+2)\cdot\ldots\cdot(n+r)}{k!\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot r}=$$

приводится к виду

$$=\frac{k!}{(n+k)!}\cdot\frac{(n+r)!}{r!}.$$

При выполнении условия $k<r\le n$ координаты $\{\mu_j^{(i)}\mid j=\overline{r+1,n}\}$ вектора $\{\mu^{(i)}\mid(\mu_0^{(i)},\mu_1^{(i)},\ldots,\mu_k^{(i)},\mu_{k+1}^{(i)},\ldots,\mu_r^{(i)},\mu_{r+1}^{(i)},\ldots,\mu_n^{(i)})\}$ по определению равны 0, т.е. могут принимать единственное значение

$$\{\mu_j^{(i)}=0\mid j=\overline{r+1,n}\}.$$

Теперь выпишем число различных значений, которое могут принимать все координаты $\{\mu^{(i)}\mid(\mu_0^{(i)},\mu_1^{(i)},\mu_2^{(i)},\ldots,\mu_k^{(i)},\mu_{k+1}^{(i)},\ldots,\mu_r^{(i)},\mu_{r+1}^{(i)},\ldots,\mu_n^{(i)})\}$ при одновременном выполнении условий $N\le n$ и $k<r\le n$. Это число будет равно произведению числа значений [23], которое могут принимать координаты: $\mu_0^{(i)}$, $\{\mu_j^{(i)}\mid j=\overline{1,k}\}$, $\{\mu_j^{(i)}\mid j=\overline{k+1,r}\}$ и $\{\mu_j^{(i)}\mid j=\overline{r+1,n}\}$:

- координата $\mu_0^{(i)}$ – $(N+1)$ различных значений,
- координаты $\{\mu_j^{(i)}\mid j=\overline{1,k}\}$ – $(N+1)^k$ и числа значений,
- координаты $\{\mu_j^{(i)}\mid j=\overline{k+1,r}\}$ – $=\frac{k!}{(n+k)!}\cdot\frac{(n+r)!}{r!}$ различных значений,
- координаты $\{\mu_j^{(i)}\mid j=\overline{r+1,n}\}$ – единственное нулевое значение.

Таким образом

$$\{P_2(L_{\mu(N,n,r)})/(N\le n,k<r\le n)\}=(N+1)^{k+1}\times\frac{k!}{(n+k)!}\cdot\frac{(n+r)!}{r!}. \qquad (5).$$

Где в (5) под выражением $\{P_2(L_{\mu(N,n,r)})/(N\le n,k<r\le n)\}$ понимаем значение оценки $P_2(L_{\mu(N,n,r)})$ при выполнении условия $(N\le n,k<r\le n)$.

При рассмотренных условиях $N \le n$ и $k < r \le n$ выполняется $\min([n/N], r) = [n/N] = k$ и выражение (4) из условия утверждения принимает вид,

$$P_2(L_{\mu(N,n,r)}) = (N+1)^{\min([n/N],r)+1} \times \frac{(\min([n/N],r))!}{(n+\min([n/N],r))!} \cdot \frac{(n+r)!}{r!} =$$
$$= (N+1)^{k+1} \times \frac{k!}{(n+k)!} \cdot \frac{(n+r)!}{r!}$$

равный выражению (5).

В рассматриваемом случае $N \le n$ при условии $r \le k \le n$ будет следующее:

Каждая координата $\mu_j^{(i)}$, по определению являющаяся числом знаков алфавита A_N, встретившихся j раз, исходя из второго уравнения с.л.у. (2), не может превосходить минимума от N и $[n/j]$

$$\{\, 0 \le \mu_j^{(i)} \le \min\,(N, [n/j]) \mid j = \overline{1,r} \,\}$$

и значит координаты $\{\, \mu_j^{(i)} \mid j = \overline{1,r} \,\}$ изменяются в диапазоне $0 \le \mu_j^{(i)} \le N$ и каждая из них может принимать (N+1) различное значение.

Теперь, исходя из вышесказанного можно сделать вывод, что каждая из координат $\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, ..., \mu_r^{(i)})\}$ может изменяться в диапазоне $\{0 \le \mu_j^{(i)} \le N \mid j = \overline{1,r}\,\}$ и принимать (N+1) различное значение, а все вместе они могут принимать значений $(N+1)^{r+1}$, следовательно

$$\{P_2(L_{\mu(N,n,r)}) / (N \le n,\, r \le k \le n)\} = (N+1)^{r+1}. \tag{6}$$

В условиях $N \le n$ и $r \le k \le n$ выполняется $\min([n/N], r) = r$ и выражение (4) из утверждения принимает вид,

$$P_2(L_{\mu(N,n,r)}) = (N+1)^{\min([n/N],r)+1} \times \frac{(\min([n/N],r))!}{(n+\min([n/N],r))!} \cdot \frac{(n+r)!}{r!} =$$
$$= (N+1)^{r+1} \times \frac{(r)!}{(n+r)!} \cdot \frac{(n+r)!}{r!} = (N+1)^{r+1}.$$

равный выражению (6).

Теперь рассмотрим случай, когда $N > n$.

В этом случае координата $\mu_0^{(i)}$ так же может изменяться от 0 до N

$$0 \le \mu_0^{(i)} \le N,$$

следовательно $\mu_0^{(i)}$ может принимать (N+1) различных значений.

Число k=[n / N], определяющее сколько мощностей алфавитов полностью укладывается в объёме выборки, равно 0 в нашем случае $N > n$.

Каждая координата $\mu_j^{(i)}$, по определению являющаяся числом знаков алфавита A_N, встретившихся j раз, исходя из второго уравнения с.л.у. (2), не может превосходить минимума от N и $[n/j]$

$$\{\, 0 \le \mu_j^{(i)} \le \min\ (N, [n/j]) \mid j = \overline{1, r}\, \},$$

но

$$\{\, \min\ (N, [n/j]) = [n/j] \mid j = \overline{1, r}\, \}$$

и значит координаты $\{\, \mu_j^{(i)} \mid j = \overline{1, r}\, \}$ могут изменяться в диапазоне $0 \le \mu_j^{(i)} \le [n/j]$ и каждая из них может принимать ([n/j]+1) различное значение.

Теперь, исходя из вышесказанного можно сделать вывод, что общее количество значений, принимаемых первыми координатами $\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, ..., \mu_r^{(i)})\}$ при одновременном выполнении условий $N > n$ и $r \le n$ равен произведению количества значений, принимаемых координатой $\mu_0^{(i)}$ и координатами $\{0 \le \mu_j^{(i)} \le N \mid j = \overline{1, r}\}$. Это значение равно

$$(N+1)\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(\left[\frac{n}{i}\right]+1\right) \le \left(\frac{n}{1}+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\frac{n}{2}+\frac{2}{2}\right)\cdot\left(\frac{n}{3}+\frac{3}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n}{r}+\frac{r}{r}\right) =$$
$$= (N+1)\cdot\left(\frac{n+1}{1}\right)\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{n+3}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+r}{r}\right) =$$
$$= (N+1)\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r} =$$

и далее умножая полученное значение на 1 равную $n!/n!$ и группируя члены получаем

$$= (N+1)\cdot\frac{n!}{n!}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r} = (N+1)\cdot\frac{(n+r)!}{n!\cdot r!}.$$

Следовательно

$$\{P_2(L_{\mu(N,n,r)})/(N > n)\} = (N+1)\cdot\frac{(n+r)!}{n!\cdot r!}. \tag{7}$$

В случае $N > n$ при условии $r \le n$ всегда выполняется $[n/N] = 0$ и $\min([n/N], r) = \min(0, r) = 0$, и тогда доказываемое выражение (4) из утверждения принимает вид,

$$P_2(L_{\mu(N,n,r)}) = (N+1)^{\min([n/N],r)+1} \times \frac{(\min([n/N], r))!}{(\, n + \min([n/N], r)\,)!}\cdot\frac{(n+r)!}{r!} =$$
$$= (N+1)^{0+1} \times \frac{(\min(0, r))!}{(\, n + \min(0, r)\,)!}\cdot\frac{(n+r)!}{r!} = (N+1)\times\frac{(0)!}{(\, n+0\,)!}\cdot\frac{(n+r)!}{r!} =$$
$$= (N+1)\times\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+r)!}{r!} = (N+1)\times\frac{(n+r)!}{n!\cdot r!}$$

равный выражению (7).

Таким образом для всевозможные соотношений между N, n и r рассмотрены и значение $L_{\mu(N,n,r)}$ при всех соотношениях равно (4). Утверждение доказано.

Аналитическое выражение (4) определяет количество опробуемых векторов для получения всех решений с.л.у (2) и ограничивает грубую предварительную оценку (3). Выражение (4) учитывает зависимость необходимого количества опробований различных векторов для получения всех решений с.л.у. (2) от мощности алфавита N, длины последовательности n и значения ограничения r, напрямую учитывая соотношение длины последовательности n и мощности алфавита N.

Следствие из утверждения.

При опробовании векторов $\{\mu^{(i)} \mid (\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, ..., \mu_n^{(i)})\}$ для поиска решений с.л.у. (1), без ограничениями на число координат $\{\mu_j^{(i)} \mid, j = \overline{1,n}\}$, методом последовательного перебора, количество опробуемых векторов $L_{\mu(N,n,n)}$ принимает следующее значение:

$$P_2(L_{\mu(N,n,n)}) = (N+1)^{[n/N]+1} \times \frac{[n/N]!}{(n+[n/N])!} \cdot \frac{(2n)!}{n!}. \tag{8}$$

Доказательство.

Как следует из утверждения

$$P_2(L_{\mu(N,n,n)}) = (N+1)^{\min([n/N],r)+1} \times \frac{(\min([n/N],r))!}{(n+\min([n/N],r))!} \cdot \frac{(n+r)!}{r!},$$

но при выполнении условия n=r всегда будет выполнено

$$\min([n/N],r)) = \min([n/N],n) = [n/N]$$

и простой подстановкой в выражение (4) значений r=n и $\min([n/N],r)) = [n/N]$ получаем (8).

Следствие доказано.

Сравнение оценок количества опробований. Для сравнения оценок количества опробований $P_1(L_{\mu(N,n,n)})$ и $P_2(L_{\mu(N,n,n)})$ при нахождении решений с.л.у. (1), использующейся при расчете точных распределений, рассмотрим их отношение $d(N,n,n)$, назовём его коэффициентом ограничения опробования векторов,

$$d(N,n,n) = P_1(L_{\mu(N,n,n)}) / P_2(L_{\mu(N,n,n)}).$$

Используя результаты грубой оценки (3) для r=n и результаты следствия (8) получаем

$$d(N,n,n) = \frac{(N+1)^{n+1}}{(N+1)^{k+1}} \cdot \frac{(n+k)!}{k!} \cdot \frac{n!}{(2n)!} = (N+1)^{n-k} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{(k+i)}{(n+i)}, \tag{9}$$

где k=$[n/N]$ определяет полное число алфавитов мощности N, помещающихся в последовательности длиной n. Рассчитанные согласно (9) коэффициенты ограничения для различных мощностей алфавита частично показаны в табл. 1. Графики изменения коэффициентов ограничения для разных значений мощности алфавита N=2, 10, 26 и 64 приведены на рис. 2.

Анализ аналитического выражения (9) для коэффициента ограничения $d(N,n,n)$ показывает, что величина $d(N,n,n)$ является возрастающей функцией по N и n.

Анализ значений коэффициента ограничения количества опробуемых векторов при поиске решений с.л.у. второй кратности, приведенных в табл. 1 и на рис. 2, показывает, что найденная уточненная оценка числа опробований уменьшает количество опробуемых векторов от $d(2,1,1) = 1{,}5$ раз до $d(64,85,85) = 1{,}81 \times 10^{104}$ и более раз по сравнению с грубой оценкой (3) и подтвердил вывод о возрастающем характере величины $d(N,n,n)$.

Таблица 1

Коэффициент ограничения количества опробований векторов СЛУ второй кратности для алфавитов разной мощности *N*

№ п/п	Длина текста *n*	Коэффициент ограничения количества опробований векторов для алфавитов разной мощности *N* *d(N,n,n)*			
		Мощность алфавита *N=2*	Мощность алфавита *N=10*	Мощность алфавита *N=26*	Мощность алфавита *N=64*
1	1	1,50E+00	5,50E+00	1,35E+01	3,25E+01
2	5	2,25E+00	6,39E+02	5,69E+04	4,60E+06
3	10	3,95E+00	1,40E+05	1,11E+09	7,29E+12
4	15	7,21E+00	3,92E+07	1,90E+13	1,01E+19
5	20	1,29E+01	9,32E+09	3,08E+17	1,31E+25
6	25	2,34E+01	2,49E+12	4,81E+21	1,66E+31
7	30	4,18E+01	6,05E+14	8,47E+25	2,06E+37
8	35	7,58E+01	1,59E+17	1,49E+30	2,52E+43
9	40	1,36E+02	3,90E+19	2,54E+34	3,06E+49
10	45	2,46E+02	1,02E+22	4,23E+38	3,67E+55
11	50	4,42E+02	2,51E+24	6,93E+42	4,38E+61
12	55	7,98E+02	6,51E+26	1,18E+47	5,21E+67
13	60	1,43E+03	1,62E+29	2,05E+51	6,16E+73
14	65	2,59E+03	4,17E+31	3,49E+55	7,38E+79
15	70	4,66E+03	1,04E+34	5,86E+59	9,33E+85
16	75	8,41E+03	2,67E+36	9,73E+63	1,17E+92
17	80	1,51E+04	6,67E+38	1,64E+68	1,46E+98
18	85	2,73E+04	1,71E+41	2,82E+72	1,81E+104

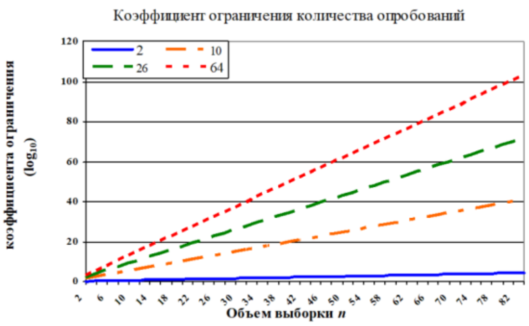

Рис. 2. Значение коэффициентов ограничения количества опробуемых векторов для получения всех решений с.л.у. второй кратности

Заключение и выводы. Рассмотрена задача нахождения всех целочисленных неотрицательных решений системы линейных уравнений второй кратности типов методом последовательного опробования векторов на принадлежность к решениям системы. Учитывая особенности системы линейных уравнений второй кратности типов удалось ограничить число опробуемых векторов, позволяющих получить все решения системы.

Получены аналитические выражения ограниченного числа опробуемых векторов для решения системы линейных уравнений второй кратности с ограничениями на максимальное число вхождений знаков алфавита в выборку и без ограничений.

Вид полученного выражения для ограниченного числа векторов опробования решений позволяет использовать его при изучении алгоритмической сложности расчета точных распределений вероятностей значений статистик и их точных приближений, вычисляемых с заранее заданной точностью Δ.

Применение ограниченного числа опробуемых векторов снижает алгоритмическую сложность получения всех решений системы линейных уравнений второй кратности и как следствие снижает алгоритмическую сложность вычисления точных и предельных распределений. Снижение алгоритмической сложности вычисления распределений позволяет увеличить значения параметров выборки, для которых при ограниченном вычислительном ресурсе могут быть рассчитаны распределения.

Анализ коэффициента ограничения, показывающего количество раз в которое, благодаря уточненной оценке, уменьшается сложность получения всех решений системы линейных уравнений, показывает положительность его значений и рост при увеличении значений мощности алфавита и объема выборки. Коэффициент ограничения растет от 1,5 до 10 в степени 50 и более.

Применение многопроцессорных вычислительных систем для проведения расчетов точных распределений позволяет увеличить вычислительный ресурс для расчета распределений, что вместе со снижением алгоритмической сложности расчета распределений позволит увеличить параметры выборок, для которых эти распределения могут быть рассчитаны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гузик В.Ф., Каляев И.А., Левин И.И.* Реконфигурируемые вычислительные системы / под общ. ред. И.А. Каляева. – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2016. – 472 с. – ISBN 978-5-9275-1918-7.
2. *Корнеев В.В.* Вычислительные системы. – М.: Гелиос АРВ, 2004. – 512 с. – ISBN 5-85438-117-6.
3. *Мельников А.К.* Автоматизация процедуры анализа сообщений на гибридных высокопроизводительных вычислительных комплексах // Суперкомпьютерные технологии (СКТ-2016): Матер. 4-й Всероссийской научно-технической конференции: в 2 т. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 69-73. – ISBN 978-5-9275-2039-8 (Т. 1).
4. *Чеповский А.М.* Информационные модели в задачах обработки текстов на естественных языках. – М.: Национальный открытый университет «ИНТУИТ», 2015. – 228 с. – ISBN 978-5-9556-0176-2.
5. *Двойникова А.А., Карпов А.А.* Аналитический обзор подходов к распознаванию тональности русскоязычных текстовых данных // Информационно-управляющие системы. – 2020. – № 4. – С. 20-30. – Doi: 10.31799/1684-8853-2020-4-20-30.
6. *Мальцев Г.Н., Джумков В.В.* Аддитивная граница вероятности ошибки в дискретном канале передачи информации с помехоустойчивым кодированием и группированием ошибок // Информационно-управляющие системы. – 2020. – № 4. – С. 78-86. – Doi: 10.31799/1684-8853-2020-4-78-86.

7. *Дикий Д.И.* Метод обнаружения DoS-атак на прикладном уровне в сетях ≪издатель-подписчик≫ // Информационно-управляющие системы. – 2020. – № 4. – С. 50-60. – Doi: 10.31799/1684-8853-2020-4-50-60.
8. *Ронжин А.Ф.* Асимптотическая локальная относительная эффективность (АЛОЭ) критериев согласия // Тез. докладов Всесоюзной конференции «Вероятностные методы в дискретной математике». – Петрозаводск, 1983. – С. 70-71.
9. *Мельников А.К.* Сравнение эффективности обработки текстов при применении в статистических критериях точных и предельных приближений базовых распределений вероятностей значений тестовых статистик // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2018. – Т. 25. – Вып. 4. – С. 375-378. – ISSN 0869-8325. – https://tvp.ru/conferen/vsppmXIX/repso114.pdf (дата обращения: 14.01.2019).
10. *Мельников А.К.* Применение точных распределений в процедуре двухэтапной обработки текстов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2018. – Т. 25. – Вып. 2. – С. 89−95. – ISSN 0869-8325. – https://tvp.ru/conferen/vsppmXIX/repso051.pdf (дата обращения: 24.01.2019).
11. *Мельников А.К.* Сложность расчета точных распределений вероятности симметричных аддитивно разделяемых статистик и область применения предельных распределений // Доклады ТУСУР. – Томск, 2017. – Т. 20, № 4. – С. 126-130. – ISSN 1818-0442.
12. *Мельников А.К.* Методика расчета распределения вероятностей значений симметричных аддитивно разделяемых статистик, приближенных к их точному распределению // Научный вестник НГТУ. – 2018. – № 1 (70). – С. 153-166. – ISBN 1814-1196. – Doi: 10.17212/1814-1196-2018-1-153-166.
13. *Кендалл М.Г., Стьюарт А.* Теория распределений. – М.: Наука, 1966. – 302 с.
14. *Зуев Ю.А.* Современная дискретная математика: От перечислительной комбинаторики до криптографии XXI века. – М.: ЛЕНАРД, 2019. – 720 с. (Основы защиты информации № 17). – ISBN 978-5-9710-5660-7.
15. *Крамер Г.* Математические методы статистики: пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
16. *Мельников А.К., Ронжин А.Ф.* Обобщенный статистический метод анализа текстов, основанный на расчете распределений вероятности значений статистик // Информатика и её применения. – 2016. – Т. 10. – Вып. 4. – С. 91-97. – ISSN 1992-2264.
17. *Шурыгин В.А.* Сложностный метод теории алгоритмов. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. – 200 с.
18. *Фишер Р.А.* Статистические методы для исследователей: пер. с англ. – М.: Госстатиздат, 1958. – 73 с.
19. *Алексеев В.Е.* Дискретная математика: учеб. пособие. – Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 139 с.
20. *Кнут Д.Э.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. – М.: Мир, 1978. – 844 с.
21. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020664143. Расчет числа решений системы линейных уравнений второй кратности типов. Правообладатель Колодзей А.В. Автор: Колодзей А.В. и Мельников А.К. Заявка № 2020662473. Дата поступления 19 октября 2020 г. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 9 ноября 2020 г.
22. *Холл М.* Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 424 с.
23. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во иностранной лит., 1963. – 288 с.

REFERENCES

1. *Guzik V.F., Kalyaev I.A., Levin I.I.* Rekonfiguriruemye vychislitel'nye sistemy [Reconfigurable computing systems], under the general ed. of I.A. Kalyaeva. Taganrog: Izd-vo YuFU, 2016, 472 p. ISBN 978-5-9275-1918-7.
2. *Korneev V.V.* Vychislitel'nye sistemy [Computing systems]. Moscow: Gelios ARV, 2004, 512 p. ISBN 5-85438-117-6.

3. *Mel'nikov A.K.* Avtomatizatsiya protsedury analiza soobshcheniy na gibridnykh vysokoproizvoditel'nykh vychislitel'nykh kompleksakh [Automation of message analysis procedure on hybrid high performance complexes], *Superkomp'yuternye tekhnologii (SKT-2016): Mater. 4-y Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Proceedings of the 5 th All-Russia Conference on Supercomputer Technologies (SCT-2016)]: in 2 vol. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2016, pp. 69-73. ISBN 978-5-9275-2039-8 (T. 1).
4. *Chepovskiy A.M.* Informatsionnye modeli v zadachakh obrabotki tekstov na estestvennykh yazykakh [Information models in tasks of processing of natural language texts]. Moscow: Natsional'nyy otkrytyy universitet «INTUIT», 2015, 228 p. ISBN 978-5-9556-0176-2.
5. *Dvoynikova A.A., Karpov A.A.* Analiticheskiy obzor podkhodov k raspoznavaniyu tonal'nosti russkoyazychnykh tekstovykh dannykh [Analytical review of approaches to Russian text sentiment recognition], *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2020, No. 4, pp. 20-30. Doi: 10.31799/1684-8853-2020-4-20-30.
6. *Mal'tsev G.N., Dzhumkov V.V.* Additivnaya granitsa veroyatnosti oshibki v diskretnom kanale peredachi informatsii s pomekhoustoychivym kodirovaniem i gruppirovaniem oshibok [Additive boundary of error probability in a discrete data transmission channel with noise-immune coding and grouping of errors. Informatsionno-upravliaiushchie sistemy], *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2020, No. 4, pp. 78-86. Doi: 10.31799/1684-8853-2020-4-78-86.
7. *Dikiy D.I.* Metod obnaruzheniya DoS-atak na prikladnom urovne v setyakh ≪izdatel'-podpischik≫ [DoS attack detection at application level in publish-subscribe networks], *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2020, No. 4, pp. 50-60. Doi: 10.31799/1684-8853-2020-4-50-60.
8. *Ronzhin A.F.* Asimptoticheskaya lokal'naya otnositel'naya effektivnost' (ALOE) kriteriev soglasiya [Asymptotic local relative efficiency (ALRE) of fitting criteria], *Tez. dokladov Vsesoyuznoy konferentsii «Veroyatnostnye metody v diskretnoy matematike»* [Reports of All-USSR conference "Probabilistic methods in discrete mathematics"]. Petrozavodsk, 1983, pp. 70-71.
9. *Mel'nikov A.K.* Sravnenie effektivnosti obrabotki tekstov pri primenenii v statisticheskikh kriteriyakh tochnykh i predel'nykh priblizheniy bazovykh raspredeleniy veroyatnostey znacheniy testovykh statistik [Comparison of the efficiency of text processing when applying accurate and limiting approximations of basic probability distributions values of test statistics in statistical criteria], *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of applied and industrial mathematics], 2018, Vol. 25, Issue 4, pp. 375-378. ISSN 0869-8325. Available at: https://tvp.ru/conferen/vsppmXIX/repso114.pdf (accessed 14 October 2019).
10. *Mel'nikov A.K.* Primenenie tochnykh raspredeleniy v protsedure dvukhetapnoy obrabotki tekstov [Application of exact distributions in the procedure of two-step text processing], *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of applied and industrial mathematics], 2018, Vol. 25, Issue 2, pp. 89-95. ISSN 0869-8325. Available at: https://tvp.ru/conferen/vsppmXIX/repso051.pdf (accessed 24 January 2019).
11. *Mel'nikov A.K.* Slozhnost' rascheta tochnykh raspredeleniy veroyatnosti simmetrichnykh additivno razdelyaemykh statistik i oblast' primeneniya predel'nykh raspredeleniy [The complexity of calculating the exact probability distributions of symmetric additive-separated statistics and the application of limit distributions], *Doklady TUSUR* [Proceedings of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics]. Tomsk, 2017, Vol. 20, No. 4, pp. 126-130. ISSN 1818-0442.
12. *Mel'nikov A.K.* Metodika rascheta raspredeleniya veroyatnostey znacheniy simmetrichnykh additivno razdelyaemykh statistik, priblizhennykh k ikh tochnomu raspredeleniyu [A method for calculating the probability distribution of values of symmetric additively separated statistics that are close to their exact distribution], *Nauchnyy vestnik NGTU* [Science bulle-tin of the Novosibirsk state technical university], 2018, No. 1 (70), pp. 153-166. ISBN 1814-1196. Doi: 10.17212/1814-1196-2018-1-153-166.
13. *Kendall M.G., St'yuart A.* Teoriya raspredeleniy [Distribution theory]. Moscow: Nauka, 1966, 302 p.
14. *Zuev Yu.A.* Sovremennaya diskretnaya matematika: Ot perechislitel'noy kombinatoriki do kriptografii XXI veka [Modern Discrete Mathematics: From Enumerative Combinatorics to XXI century Cryptography]. Moscow: LENARD, 2019, 720 p. (Fundamentals of information security No. 17). ISBN 978-5-9710-5660-7.

15. *Kramer G.* Matematicheskie metody statistiki [Mathematical methods of Statistics]: trans. from engl. Moscow: Mir, 1975, 648 p.
16. *Mel'nikov A.K., Ronzhin A.F.* Obobshchennyy statisticheskiy metod analiza tekstov, osnovannyy na raschete raspredeleniy veroyatnosti znacheniy statistik [Generalized statistical method of text analysis based on the calculation of probability distributions of statistical values], *Informatika i ee primeneniya* [Informatics and its Applications], 2016, Vol. 10, Issue 4, pp. 91-97. ISSN 1992-2264.
17. *Shurygin V.A.* Slozhnostnyy metod teorii algoritmov [The complexity method of the theory of algorithms]. Moscow: Knizhnyy dom "LIBROKOM", 2009, 200 p.
18. *Fisher R.A.* Statisticheskie metody dlya issledovateley [Statistical methods for researchers]: trans. from engl. Moscow: Gosstatizdat, 1958, 73 p.
19. *Alekseev V.E.* Diskretnaya matematika: ucheb. posobie [Discrete mathematics. Training manual]. Nizhniy Novgorod: Nizhegorodskiy gosuniversitet, 2017, 139 p.
20. *Knut D.E.* Iskusstvo programmirovaniya dlya EVM. T. 3. Sortirovka i poisk [The art of computer programming. Vol. 3. Sorting and search]. Moscow: Mir, 1978, 844 p.
21. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2020664143. Raschet chisla resheniy sistemy lineynykh uravneniy vtoroy kratnosti tipov. Pravoobladatel' Kolodzey A.V. Avtor: Kolodzey A.V. i Mel'nikov A.K. Zayavka № 2020662473. Data postupleniya 19 oktyabrya 2020 g. Data gosudarstvennoy registratsii v Reestre pro-gramm dlya EVM 9 noyabrya 2020 g. [Certificate of state registration of computer software № 2020664143. Calculation of the number of solutions to a system of linear equations of the second multiplicity of types. Proprietor Kolodzey A.V. Authors: Kolodzey A.V. and Melnikov A.K. Application № 2020662473. Date of filing – October 19, 2020. Date of state registration in the Register of computer software – November 9, 2020].
22. *Kholl M.* Kombinatorika [Combinatorics]. Moscow: Mir, 1970, 424 p.
23. *Riordan Dzh.* Vvedenie v kombinatornyy analiz [Introduction to combinatorial analysis]. Moscow: Izd-vo inostrannoy lit., 1963, 288 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор И.И. Левин.

Мельников Андрей Кимович – АО «Вычислительные решения»; e-mail: ak@comp-sol.ru, anta-mak@umail.ru; г. Москва, Россия; тел.: +74952870035, +79037660462; к.т.н.; доцент ВАК; г.н.с.

Melnikov Andrey Kimovitch – SC «Computing solutions»; e-mail: ak@comp-sol.ru, anta-mak@umail.ru; Moscow, Russia; phone: +784952870035, +79037660462; cand. of eng. sc.; associate professor of SAC; chief research officer.