Раздел IV. Информационный анализ и распознавание образов

УДК 004.932.2 DOI 10.18522/2311-3103-2021-2-141-154

А.Н. Каркищенко, В.Б. Мнухин

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИ МНОЖЕСТВЕННОМ СРАВНЕНИИ ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

Целью работы является исследование влияния зашумления на изображении на результат сравнения конечного множества изображений, одинаковых по форме и размеру. Данная задача неизбежно возникает при анализе сцен, детекции отдельных объектов, обнаружении симметрии и пр. Фактор зашумленности необходимо принимать во внимание, поскольку различие цифровых объектов может быть вызвано не только несовпадением сравниваемых изображений реальных объектов, но и искажениями из-за шумов, что практически всегда имеет место. Это отличие оказывается пропорциональным уровню шумовой составляющей. Основным результатом данной статьи являются аналитическая оценка для вероятности заданного уровня погрешности, которая может возникать при множественном сравнении конечного числа соразмерных цифровых изображений. Эта оценка основана на низкоуровневом анализе, сводящемся к попиксельному вычислению различия изображений с помощью эвклидовой метрики. При этом делается стандартное предположение о независимом нормальном зашумлении интенсивностей изображения с нулевым математическим ожиданием и априорно установленным среднеквадратическим отклонением в каждом пикселе. Приведенные в статье доказательства позволяют утверждать, что полученную оценку следует рассматривать как достаточно «осторожную» и можно ожидать, что в реальности разброс меры, вызванный шумами на изображении, будет существенно меньше, чем теоретически найденная граница. Полученные в данной работе оценки оказываются полезными также для обнаружения различных видов симметрии на изображениях, которое, как правило, приводит к необходимости вычислять различие произвольного количества соразмерных цифровых областей. Кроме того, найденные оценки могут использоваться как теоретически обоснованные пороговые значения в задачах, требующих принятия решения о совпадении или различии изображений. Такие пороговые значения неизбежно появляются на различных этапах обработки зашумленных изображений, и вопрос об их конкретных значениях, как правило, остается открытым, в лучшем случае предлагаются эвристические соображения для их выбора.

Сравнение цифровых изображений; симметрия изображений; нормальное зашумление; оценка погрешности; оценка вероятности ошибки зашумления.

A.N. Karkishchenko, V.B. Mnukhin

ERROR ESTIMATION FOR MULTIPLE COMPARISON OF NOISY IMAGES

The aim of this work is to study the effect of noise on the image on the quality of comparison of a finite set of images of the same shape and size. This task inevitably arises when analyzing scenes, detecting individual objects, detecting symmetry, etc. The noise factor must be taken into account, since the difference between digital objects can be caused not only by the mismatch of the compared images of real objects, but also by distortions due to noise, which is almost always takes place. This difference

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-07-00873.

turns out to be proportional to the level of the noise component. The main result of this article is an analytical estimate for the probability of a given level of error, which may arise in the multiple comparison of a finite set of commensurate digital images. This estimate is based on a low-level comparison, which is a pixel-by-pixel calculation of image differences using the Euclidean metric. In this case, a standard assumption is made about the independent normal noise of image intensities with zero mathematical expectation and a priori established standard deviation in each pixel. The evidence presented in the article allows us to assert that the obtained estimate should be regarded as sufficiently "cautious" and it can be expected that in reality the scatter of the measure caused by noise in the image will be significantly less than the theoretically found boundary. The estimates obtained in this work are also useful for detecting various types of symmetry in images, which, as a rule, lead to the need to calculate the difference of an arbitrary number of commensurate digital areas. In addition, they can be used as theoretically grounded threshold values in tasks requiring a decision on the coincidence or difference of images. Such threshold values inevitably appear at various stages of processing noisy images, and the question of their specific values, as a rule, remains open; at best, heuristic considerations are proposed for their selection.

Comparison of digital images; image symmetry; normal noise; error estimate; noise error probability estimate.

Введение. В задачах анализа изображений, как правило, возникает необходимость детекции отдельных объектов, присутствующих на изображении. Обнаружение таких объектов является необходимым этапом при формировании общего «понимания» сцены, представленной на изображении [1]. Детекция объектов и дальнейшее их распознавание, как правило, сводится к сопоставлению части изображения с некоторым эталонным изображением, имеющимся в базе известных объектов [2]. Подобное сопоставление сводится к выявлению и измерению сходства или, в двойственной интерпретации, – различия определенных областей на изображении с изображением известного объекта. Для количественной оценки различия двух частей изображения X_1 и X_2, имеющих в геометрическом смысле одинаковую форму и одинаковые размеры, обычно вводится некоторая метрика $d\left(X_1, X_2\right)$ [3, стр. 167-185], [4]. В наиболее употребительном случае $d\left(X_1, X_2\right)$ – эвклидова метрика, применяемая попиксельно.

В более сложном случае требуется оценить разброс предположительно одинаковых объектов $X_1, X_2, ..., X_m$. В этом случае, опираясь на введенную метрику $d\left(X_i, X_j\right)$, позволяющую вычислять попарное различие произвольных объектов X_i и X_j, необходимо ввести некоторую функцию, агрегирующую эти различия на всем множестве. Необходимость в этом возникает, например, в кластерном анализе при оценке параметров образующихся кластеров [5, стр. 22]. В частности, для характеристики кластера вводится так называемая мера общего рассеяния $s_d = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} d\left(X_i, X_j\right)$, которая представляет собой сумму всех попарных расстояний между объектами $X_1, X_2, ..., X_m$. С этой мерой связана мера среднего рассеяния $\bar{s}_d = \frac{2s_d}{m(m-1)}$, которая является просто усреднением меры общего рассеяния. Введение мер рассеяния (или разнородности) существенно опирается на содержательный смысл решаемой задачи анализа совокупности объектов. В случае анализа разброса объектов, вызванного естественными зашумлениями, для получения гарантированных с заданной вероятностью характеристик разброса целесообразно характеризовать этот разброс *диаметром* M сферы, с заданной вероятностью содержащей внутри себя все регистрируемые объекты $X_1, X_2, ..., X_m$:

$$M = \max_{1 \le j < i \le m} d\left(X_i, X_j\right).$$

Типичный случай, когда реально возникает такая задача характеризации множественного рассеяния – определение симметрии объектов на изображении. Обнаружение и анализ симметрии – важная задача в таких областях как машинное зрение, медицинская диагностика, классификация паттернов, визуальное восприятие, дизайн и проектирование и др. [6, 7]. В большинстве случаев установление наличия любого вида симметрии приводит к необходимости анализа всей совокупности попарных различий блоков изображений (см., напр. [8–12]).

Если, например, объект имеет *вращательную* симметрию порядка m, то можно считать, что он состоит из m одинаковых блоков изображений, совпадающих друг с другом при действии любого оператора φ_k поворота на угол $\frac{2\pi k}{m}$, $k = 0,1,...,m-1$, вокруг центра симметрии. В идеальном случае для любой метрики d эти блоки должны удовлетворять условиям $d\left(X_i, \varphi_k X_j\right) = 0$, $k = 0,1,...,m-1$, $i, j \in \{1, 2,..., m\}$. Установление степени нарушения этих равенств собственно и представляет собой задачу анализа вращательной симметрии в заданной точке.

Аналогичная задача возникает и при обнаружении *трансляционной* симметрии. В этом случае такой вид симметрии описывается бесконечной циклической абелевой группой. Следовательно, в идеальном случае это должно проявляться в наличии бесконечного числа одинаковых блоков на изображении $X_1, X_2, \ldots$ (фундаментальных областей этой группы). На реальном изображении этих блоков может быть зарегистрировано лишь конечное число $X_1, X_2,..., X_m$, поэтому приходится предполагать, что это лишь наблюдаемая конечная совокупность симметричных блоков трансляционно-симметричного изображения. Поэтому теоретически различие между любой парой таких блоков также должно быть равно нулю по любой метрике.

Анализ *зеркальной* симметрии приводит к необходимости вычислять различие лишь двух блоков X_1 и X_2, т.е. должно выполняться $d\left(X_1, rX_2\right) = 0$, где r – оператор отражения относительно некоторой оси.

В идеальном случае симметричные части объекта или фигуры должны в точности совпадать при наложении. Таких симметричных частей может быть много – в случае отражательной симметрии – две, в случае вращательной – столько, каков порядок вращательной симметрии, в случае трансляционной симметрии – бесконечное количество (на практике, как отмечалось, конечное число наблюдаемых симметричных частей). В реальности меры различия никогда не обращаются в нуль по двум основным причинам: во-первых, объекты могут иметь существенные отличия (например, из-за реального несовпадения или, как в приведенном примере, из-за отсутствия полной симметрии), а во-вторых, из-за наличия естественных шумов, неизбежно присутствующих на изображении и поэтому исключающих возможность точного решения задачи. В работе [13], посвященной изучению влияния гауссовского зашумления на изображения, отмечается, что с помощью предварительной фильтрации можно снизить уровень шума на изображении, однако от него невозможно избавиться полностью, зашумление все равно сохраняется, независимо от того какие алгоритмы фильтрации применяются.

В связи со сказанным выше возникает основной вопрос – в каком случае различие между сравниваемыми объектами вызвано их существенным несовпадением, а в каком – это лишь следствие естественного зашумления.

Частично ответ на этот вопрос состоит в том, что если вычисленная мера различия объектов не превосходит уровень различия, которое вызвано шумами, то можно делать правдоподобный вывод о том, что сравниваемые цифровые объекты совпадают. Так, в случае анализа симметричности можно с очень большой вероятностью утверждать, что объект обладает заданным типом симметрии. Основная задача, которая при этом возникает и требует теоретического решения, – определить заранее максимальное значение различия объектов, которое обусловлено шумами.

В большинстве случаев под «зашумлением» понимается упрощенная и идеализированная модель возникающих искажений в цифровых изображениях реальных объектов, не учитывающая многих факторов, влияющих на яркость в каждом пикселе, в том числе и влияние пространственных характеристик окрестности пикселя. Тем не менее, в системах машинного зрения используются простые и достаточно эффективные модели зашумления. Для полутоновых изображений, как правило, рассматривают так называемую аддитивную модель шума, в которой считается, что зашумленное изображение $\mathrm{Im}(x,y)$ в пикселе с координатами (x,y) образуется из незашумленного изображения $\mathrm{Im}(x,y)$ по закону $\mathrm{Im}(x,y)=\mathrm{Im}(x,y)+\xi(x,y)$, где $\xi(x,y)$ – случайная шумовая составляющая. В большинстве приложений зависимость шума от координат пикселя (пространственный фактор) считается несущественной. Исходя из *закона больших чисел*, закон распределения аддитивной шумовой компоненты описывается однопараметрическим семейством *нормальных* распределений $\mathcal{N}(0,\sigma)$ с нулевым математическим ожиданием и среднеквадатическим отклонением σ. Таким образом, считается, что $\xi(x,y)$ – случайная величина, которая подчиняется нормальному распределению, т.е. $\xi(x,y)\sim\mathcal{N}(0,\sigma)$.

Теоретическая оценка погрешностей, связанных с анализом зашумленных изображений, представляет в большинстве случаев непростую задачу. По этой причине большинство известных публикаций, посвященных разработке методов и алгоритмов обработки цифровых изображений, содержат только экспериментальную оценку точности методов. В тех случаях, когда анализ погрешностей проводится, обычно прибегают к статистическим оценкам на основе этих экспериментальных исследований. Данный подход не позволяет получить обоснованные теоретические выводы при всевозможных значениях параметров, описывающих как изображение, так и саму процедуру распознавания.

Теоретические оценки и методы их получения существенно зависят от используемой меры близости изображений $d\left(X_i,X_j\right)$. Традиционной и наиболее употребительной является эвклидова метрика. Вместе с тем, известен ряд более сложных в вычислительном плане метрик – нормализованная метрика Хаусдорфа, метрика на основе локального расстояния, метрика на глобальных признаках, метрика на основе симметрии [14]. Эти метрики учитывают также пространственные факторы окрестности, влияющие на яркость пикселей, поэтому иногда воспринимаются как в большей степени соответствующие человеческому восприятию различий.

В частном случае, для вращательной симметрии третьего порядка задача теоретического получения верхней оценки погрешности была решена в работе авторов [15]. В данной статье рассматривалась гексагональная пиксельная решетка, которая обладает рядом преимуществ перед традиционной квадратной решеткой [16]. Одним из свойств гексагональной решетки является ее естественная симметрия относительно группы вращений третьего порядка.

Обнаружение вращательной симметрии третьего порядка имеет важные практические приложения. Распознавание симметрии 3-го порядка востребовано в различных областях кристаллографии [17, 18], вирусологии [19], анализе изображений, полученных с электронного микроскопа [20] и др.

Данная работа обобщает полученный в [15] результат по оценке диаметра рассеяния на случай произвольного конечного числа анализируемых паттернов. Полученная в работе оценка погрешности применима, в том числе, для других типов симметрии, которые приводят к необходимости вычислять различие произвольного количества соразмерных цифровых областей одинакового размера.

Постановка задачи. Пусть требуется осуществить сравнение m одинаковых по форме и размерам цифровых блоков $X_1, X_2, ..., X_m$. Введем в этих блоках произвольную, но фиксированную и единообразную одноиндексную нумерацию пикселей, например слева-направо и сверху-вниз. Это позволяет представить заданное полутоновое изображение в виде вектора интенсивностей яркости. Будем считать, что количество пикселей в каждом блоке, значит, и размерность вектора равны n. Таким образом, вычисление расстояния между парой цифровых изображений сводится к вычислению расстояния между представляющими их векторами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m \in R^n$.

В силу сделанных выше предположений о характере аддитивного зашумления будем считать, что ε_i – независимые случайные векторы, компоненты которых зашумлены по нормальному закону $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией компонент σ^2. Требуется найти вероятностную оценку для диаметра сферы рассеяния, т.е. для величины

$$M = \max_{1 \le j < i \le m} \left\| \varepsilon_j - \varepsilon_i \right\|,$$

где $\|\bullet\|$ – эвклидова норма.

Оценка влияния шума на сравниваемые изображения. Рассмотрим случайные векторы $\mu_{ij} = \varepsilon_j - \varepsilon_i$, $1 \le j < i \le m$. Заметим, что они могут быть выражены как линейные комбинации векторов $\mu_{m1}, \mu_{m2}, ..., \mu_{m,m-1}$, т.е. являются неслучайными функциями случайных векторов. Рассмотрим блочные векторы

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} \text{ и } \mu = \begin{pmatrix} \mu_{m1} \\ \mu_{m2} \\ \vdots \\ \mu_{m,m-1} \end{pmatrix}.$$

Введенные обозначения устанавливают простую связь между этими векторами, которая с помощью блочной матрицы может быть выражена следующим образом:

$$\mu = \begin{pmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 & -I_n \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & -I_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & -I_n \end{pmatrix} \varepsilon = A\varepsilon,$$

где символ I_n обозначает единичную матрицу размера $n \times n$. Блочная структура матрицы A позволяет представить ее в виде кронекерова произведения:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}\otimes I_n. \tag{1}$$

В силу предположения о независимости ковариационные матрицы компонент случайных векторов $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_m$ имеют вид $K_{\varepsilon_1}=K_{\varepsilon_2}=...=K_{\varepsilon_m}=\sigma^2 I_n$, значит, ковариационная матрица K_ε вектора ε равна $K_\varepsilon=\sigma^2 I_{mn}$, где I_{mn} – единичная матрица размера $mn\times mn$. Учитывая, что $\mu-M[\mu]=A(\varepsilon-M[\varepsilon])$, найдем ковариационную матрицу компонент вектора μ:

$$K_\mu=AM\left\lfloor(\varepsilon-M[\varepsilon])(\varepsilon-M[\varepsilon])^T\right\rfloor A^T=AK_\varepsilon A^T=\sigma^2 AA^T.$$

Далее будем пользоваться следующим свойством, связывающим кронекерово произведение матриц с обычным умножением матриц. Пусть A,B,C,D – матрицы такие, что произведения AC и BD определены. Тогда $(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$. Кроме того, справедливо очевидное равенство $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$ [21, стр. 19]. Применяя эти свойства и учитывая представление (1), получаем, что

$$AA^T=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}\otimes I_n\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}\otimes I_n\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}\otimes I_n=\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}}_{B}\otimes I_n=B\otimes I_n.$$

Заметим, что матрица B имеет, очевидно, размер $(m-1)\times(m-1)$. Таким образом, $K_\mu=\sigma^2 AA^T=\sigma^2 B\otimes I_n$.

Последнее выражение показывает, что векторы $\mu_{m1},\mu_{m2},...,\mu_{m,m-1}$ коррелированны (в случае нормального распределения это означает, что они также и статистически зависимы). Найдем декоррелирующее преобразование, позволяющее перейти к статистически независимым случайным векторам. Для этого перейдем к базису, состоящему из собственных векторов ковариационной матрицы K_μ. Поскольку матрица K_μ симметрична и положительно определена, то она имеет простую структуру, следовательно, указанный базис существует. Найдем его.

Для отыскания собственных векторов матрицы K_μ необходимо найти все ее собственные значения. Как известно [21, стр. 39], собственные значения кронекерова произведения $A\otimes B$ произвольных матриц A и B равны всевозможным произведениям собственных значений матриц A и B, а соответствующие собственные векторы получаются как кронекеровы произведения собственных векторов, отвечающих соответствующим собственным значениям. Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что матрица $\sigma^2 B$ имеет собственное значение σ^2 кратности $m-2$ и однократное собственное значение $m\sigma^2$. Собственные значения удобно записать в виде диагональной матрицы $\Lambda=\mathrm{diag}(\sigma^2,...,\sigma^2,m\sigma^2)$.

Найдем собственные векторы. Поскольку матрица $\sigma^2 B$ имеет простую структуру, то собственное значение σ^2 имеет геометрическую кратность $m-2$, следовательно, существует большой произвол в выборе ортонормированной системы собственных векторов, отвечающих данному собственному значению. Нетрудно убедиться, что ортонормированную систему собственных векторов матрицы $\sigma^2 B$ можно, в частности, выбрать в виде

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} & \frac{1}{\sqrt{m-1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} & \frac{1}{\sqrt{m-1}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} & \frac{1}{\sqrt{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} & \frac{1}{\sqrt{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{m-2}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} & \frac{1}{\sqrt{m-1}} \end{pmatrix}.$$

В данной матрице первые $m-2$ столбцов являются собственными векторами, соответствующими собственному значению σ^2, а последний столбец соответствует $m\sigma^2$. В силу ортонормированности матрица T удовлетворяет соотношениям $T^T T = I_{m-1}$. Таким образом, учитывая свойства кронекерова произведения, получаем, что все собственные значения матрицы K_μ могут быть записаны в виде диагональной матрицы $\Lambda \otimes I_n$, а соответствующие собственные векторы – в виде матрицы $T \otimes I_n$. Таким образом, $K_\mu (T \otimes I_n) = (\sigma^2 B \otimes I_n)(T \otimes I_n) = T\Lambda \otimes I_n$.

Рассмотрим теперь матрицу $\sqrt{\Lambda^{-1}} \otimes I_n = \mathrm{diag}\left(\sigma^{-1},...,\sigma^{-1},\left(\sqrt{m}\right)^{-1}\sigma^{-1}\right) \otimes I_n$ и введем преобразование $\nu = \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} T^T \otimes I_n\right)\mu$. Тогда ковариационная матрица K_ν компонент вектора ν имеет вид:

$$K_\nu = M\left[\nu\nu^T\right] = \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} T^T \otimes I_n\right) M\left[\mu\mu^T\right]\left(T\sqrt{\Lambda^{-1}} \otimes I_n\right) =$$

$$= \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} T^T \otimes I_n\right)\left(\sigma^2 B \otimes I_n\right)\left(T\sqrt{\Lambda^{-1}} \otimes I_n\right) = \sqrt{\Lambda^{-1}} T^T \left(\sigma^2 B\right) T\sqrt{\Lambda^{-1}} \otimes I_n = I_{(m-1)n}.$$

Матрица K_ν диагональная, следовательно, все компоненты вектора ν некоррелированны, т.е. $\nu = \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} T^T \otimes I_n\right)\mu$ является искомым декоррелирующим преобразованием. Выразим вектор ν через исходный случайный вектор μ в явном виде:

$$\nu = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma\sqrt{m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{-2}{\sqrt{3\cdot 2}} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3}} & \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3}} & \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} & \frac{1}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} & \cdots & \frac{-(m-2)}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} \\ \frac{1}{\sqrt{(m-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(m-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(m-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(m-1)}} \end{pmatrix} \otimes I_n \right) \mu =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\left(\mu_{m1}-\mu_{m2}\right) \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{3\cdot 2}}\left(\mu_{m1}+\mu_{m2}-2\mu_{m3}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{(m-1)(m-2)}}\left(\mu_{m1}+\ldots+\mu_{m,m-2}-(m-2)\mu_{m,m-1}\right) \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{m(m-1)}}\left(\mu_{m1}+\mu_{m2}+\ldots+\mu_{m,m-2}+\mu_{m,m-1}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\mu_{21} \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{3\cdot 2}}\left(\mu_{31}+\mu_{32}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{(m-1)(m-2)}}\left(\mu_{m-1,1}+\ldots+\mu_{m-1,m-2}\right) \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{m(m-1)}}\left(\mu_{m1}+\ldots+\mu_{m,m-2}+\mu_{m,m-1}\right) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, все компоненты блочного вектора ν статистически независимы, причем имеют распределение $\mathcal{N}(0,I)$. Рассмотрим теперь случайные величины

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \tfrac{1}{2\sigma^2}\left\|\mu_{21}\right\|^2, \\ \gamma_2 &= \tfrac{1}{3\cdot 2\sigma^2}\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{m-2} &= \tfrac{1}{(m-1)(m-2)\sigma^2}\left\|\mu_{m-1,1}+\mu_{m-1,2}+\ldots+\mu_{m-1,m-2}\right\|^2, \\ \gamma_{m-1} &= \tfrac{1}{m(m-1)\sigma^2}\left\|\mu_{m1}+\mu_{m2}+\ldots+\mu_{m,m-2}+\mu_{m,m-1}\right\|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Далее потребуется следующее

Утверждение 1. *Пусть* $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m \in R^n$ *и* $\mu_{ij}=\varepsilon_j-\varepsilon_i$, $1\le j<i\le m$. *Тогда*

$$\max_{1\le j<i\le m}\left\|\mu_{ij}\right\| \le \max\left(\left\|\sum_{j=1}^{m-1}\mu_{mj}\right\|,\left\|\sum_{j=1}^{m-2}\mu_{m-1,j}\right\|,\ldots,\left\|\mu_{21}\right\|\right),\ m=2,3,\ldots\ . \tag{3}$$

Доказательство. Применим индукцию по числу m векторов $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m$. Для $m=2$ имеем $\max\left\|\mu_{21}\right\|\le\max\left\|\mu_{21}\right\|$, и нестрогое неравенство выполняется как равенство. Докажем, что неравенство справедливо и для $m=3$, т.е. что

$$\max\left(\left\|\mu_{31}\right\|,\left\|\mu_{32}\right\|,\left\|\mu_{21}\right\|\right)\le\max\left(\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|,\left\|\mu_{21}\right\|\right).$$

Применяя неравенство треугольника, и учитывая, что $\mu_{21}=\mu_{31}-\mu_{32}$, запишем очевидные соотношения:

$$2\left\|\mu_{31}\right\|=\left\|\left(\mu_{31}+\mu_{32}\right)+\left(\mu_{31}-\mu_{32}\right)\right\|\le\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|+\left\|\mu_{31}-\mu_{32}\right\|=\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|+\left\|\mu_{21}\right\|,$$

$$2\left\|\mu_{32}\right\|=\left\|\left(\mu_{31}+\mu_{32}\right)+\left(\mu_{32}-\mu_{31}\right)\right\|\le\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|+\left\|\mu_{32}-\mu_{31}\right\|=\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|+\left\|\mu_{21}\right\|.$$

Но $\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|+\left\|\mu_{21}\right\|\le 2\max\left(\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|,\left\|\mu_{21}\right\|\right)$, поэтому получаем неравенство $\max\left(\left\|\mu_{31}\right\|,\left\|\mu_{32}\right\|\right)\le\max\left(\left\|\mu_{31}+\mu_{32}\right\|,\left\|\mu_{21}\right\|\right)$. Геометрически последнее неравенство означает, что длина любой из сторон параллелограмма не превышает длины его большей диагонали. Теперь остается только заметить, что добавление величины $\left\|\mu_{21}\right\|$ под знаком максимума в левой части не может нарушить полученное нестрогое неравенство.

Предположим теперь, что неравенство (3) выполняется при некотором $m=k>3$:

$$\max_{1\le j<i\le k}\left\|\mu_{ij}\right\|\le\max\left(\left\|\sum_{j=1}^{k-1}\mu_{kj}\right\|,\left\|\sum_{j=1}^{k-2}\mu_{k-1,j}\right\|,\ldots,\left\|\mu_{21}\right\|\right). \tag{4}$$

Докажем, что неравенство справедливо и при $m = k+1$. С этой целью для произвольных j,t, $1 \le j,t \le k$, запишем очевидное равенство:

$$\varepsilon_j - \varepsilon_{k+1} = \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{k+1}\right) + \left(\varepsilon_j - \varepsilon_t\right) \text{ или } \mu_{k+1,j} = \mu_{k+1,t} + \mu_{tj}.$$

Просуммируем последнее выражение по t:

$$\mu_{k+1,j} = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}\mu_{k+1,t} + \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}\mu_{tj}.$$

Применяя необходимое число раз неравенство треугольника, получаем:

$$\left\|\mu_{k+1,j}\right\| \le \frac{1}{k}\left\|\sum_{t=1}^{k}\mu_{k+1,t}\right\| + \frac{1}{k}\left\|\sum_{t=1}^{k}\mu_{tj}\right\| \le \frac{1}{k}\left\|\sum_{t=1}^{k}\mu_{k+1,t}\right\| + \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}\left\|\mu_{tj}\right\|.$$

Заметим, что в правой части для любого $j = 1,2,...,k$ норма $\left\|\mu_{jj}\right\| = 0$. Поэтому правая часть содержит не более k ненулевых слагаемых. Следовательно,

$$\left\|\mu_{k+1,j}\right\| \le \max\left(\left\|\sum_{t=1}^{k}\mu_{k+1,t}\right\|, \left\|\mu_{1j}\right\|, \left\|\mu_{2j}\right\|, ..., \left\|\mu_{kj}\right\|\right) = \max\left(\left\|\sum_{t=1}^{k}\mu_{k+1,t}\right\|, \max_{1\le i\le k}\left\|\mu_{ij}\right\|\right).$$

Поскольку данное неравенство справедливо для любого $j = 1,2,...,k$, то, учитывая, что $\left\|\mu_{ij}\right\| = \left\|\mu_{ji}\right\|$ и $\left\|\mu_{ii}\right\| = 0$ для всех i, j, получаем, что

$$\max_{1\le j\le k}\left\|\mu_{k+1,j}\right\| \le \max\left(\left\|\sum_{t=1}^{k}\mu_{k+1,t}\right\|, \max_{1\le j<i\le k}\left\|\mu_{ij}\right\|\right).$$

Заметим теперь, что неравенство не нарушится, если переписать его следующим образом:

$$\max\left(\max_{1\le j\le k}\left\|\mu_{k+1,j}\right\|, \max_{1\le j<i\le k}\left\|\mu_{ij}\right\|\right) = \max_{1\le j<i\le k+1}\left\|\mu_{ij}\right\| \le \max\left(\left\|\sum_{t=1}^{k}\mu_{k+1,t}\right\|, \max_{1\le j<i\le k}\left\|\mu_{ij}\right\|\right).$$

Если теперь воспользоваться предположением индукции и заменить $\max\limits_{1\le j<i\le k}\left\|\mu_{ij}\right\|$ в правой части последнего неравенства в соответствии с выражением (4), то получим доказываемое утверждение. ■

С учетом этого утверждения, вводя для удобства новую случайную величину L, можно записать:

$$M = \max_{1\le j<i\le m}\left\|\varepsilon_j - \varepsilon_i\right\| = \max_{1\le j<i\le m}\left\|\mu_{ij}\right\| \le \max\left(\left\|\sum_{j=1}^{m-1}\mu_{mj}\right\|, \left\|\sum_{j=1}^{m-2}\mu_{m-1,j}\right\|, ..., \left\|\mu_{21}\right\|\right) = L.$$

Вероятностная оценка сверху для диаметра сферы разброса. Основной результат дает следующее

Утверждение 2. *Для некоторого положительного δ имеет место следующая оценка вероятности P того, что диаметр M сферы разброса не превысит δ:*

$$P\left(M \le \delta\right) \ge P\left(L^2 \le \delta^2\right) = \prod_{k=2}^{m}\Phi\left(\frac{\delta^2 - k(k-1)n\sigma^2}{\sqrt{2n}k(k-1)\sigma^2}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Доказательство. Как известно [22], случайные величины (2) имеют χ^2-распределение с n степенями свободы. При этом χ^2- распределение с ростом n асимптотически сходится к нормальному распределению $\mathcal{N}(n,2n)$. Поэтому при достаточно большом значении n ($n>50$, см., напр. [23]) можно считать, что $\frac{\gamma_i - n}{\sqrt{2n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, $i=1,2,...,m-1$. Отсюда следует, что

$$\|\mu_{21}\|^2 \sim \mathcal{N}\left(2n\sigma^2, 8n\sigma^4\right),$$
$$\|\mu_{31}+\mu_{32}\|^2 \sim \mathcal{N}\left(6n\sigma^2, 72n\sigma^4\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots\dots$$
$$\|\mu_{m-1,1}+\mu_{m-1,2}+...+\mu_{m-1,m-2}\|^2 \sim \mathcal{N}\left((m-1)(m-2)n\sigma^2, 2(m-1)^2(m-2)^2n\sigma^4\right),$$
$$\|\mu_{m1}+\mu_{m2}+...+\mu_{m,m-2}+\mu_{m,m-1}\|^2 \sim \mathcal{N}\left(m(m-1)n\sigma^2, 2m^2(m-1)^2n\sigma^4\right).$$

Но функция распределения максимума независимых случайных величин равна произведению функций распределения этих величин [24]. Поэтому

$$L^2 = \max\left(\left\|\sum_{j=1}^{m-1}\mu_{mj}\right\|^2, \left\|\sum_{j=1}^{m-2}\mu_{m-1,j}\right\|^2, ..., \|\mu_{21}\|^2\right) \sim \prod_{k=2}^{m}\mathcal{N}\left(k(k-1)n\sigma^2, 2k^2(k-1)^2n\sigma^4\right).$$

Тогда для некоторого положительного δ получаем следующую оценку вероятности P того, что M не превысит δ:

$$P(M \le \delta) \ge P\left(L^2 \le \delta^2\right) = \prod_{k=2}^{m}\Phi\left(\frac{\delta^2 - k(k-1)n\sigma^2}{\sqrt{2n}k(k-1)\sigma^2}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. ■

Следствие 1. *Имеет место неравенство*

$$P(M \le \delta) > \Phi^{m-1}\left(\frac{\delta^2 - m(m-1)n\sigma^2}{\sqrt{2n}m(m-1)\sigma^2}\right).$$

Доказательство. Заметим, что при $k_1 < k_2$

$$\frac{\delta^2 - k_1(k_1-1)n\sigma^2}{\sqrt{2n}k_1(k_1k_1-1)\sigma^2} > \frac{\delta^2 - k_2(k_2-1)n\sigma^2}{\sqrt{2n}k_2(k_2-1)\sigma^2}.$$

Поэтому в силу монотонности функции $\Phi(x)$ в рассматриваемой области

$$\prod_{k=2}^{m}\Phi\left(\frac{\delta^2 - k(k-1)n\sigma^2}{\sqrt{2n}k(k-1)\sigma^2}\right) > \Phi^{m-1}\left(\frac{\delta^2 - m(m-1)n\sigma^2}{\sqrt{2n}m(m-1)\sigma^2}\right). \blacksquare$$

Следствие 2. *Величина* δ, *которую* M *не превысит с вероятностью заведомо большей* α, *т.е.* $P(M \le \delta) > \alpha$, *равна*

$$\delta = \sigma\sqrt{m(m-1)\left(n + \sqrt{2n}\Phi^{-1}\left(\sqrt[m-1]{\alpha}\right)\right)}. \qquad (5)$$

Доказательство. В силу Следствия 1 указанное условие можно записать в виде $\Phi^{m-1}\left(\dfrac{\delta^2 - m(m-1)n\sigma^2}{\sqrt{2n}m(m-1)\sigma^2}\right) = \alpha$, откуда следует доказываемое равенство. ■

Из формулы (5) видно, что верхняя оценка диаметра сферы, содержащей зашумленные значения линейно зависит от σ и почти линейно от числа m сравниваемых блоков изображений.

Пример. Рассчитаем с помощью Следствия 2 величину погрешности δ, которую M не превысит с вероятностью заведомо большей $\alpha = 0.99$ при условии, что $m = 5$ и $\sigma = 0.01$. По формуле (5) получаем

$$\delta = 0.01\sqrt{5\cdot 4\left(n + \sqrt{2n}\Phi^{-1}\left(\sqrt[4]{0.99}\right)\right)} \approx 0.045\sqrt{n + 1.414\cdot\Phi^{-1}(0.998)\cdot\sqrt{n}} \approx$$

$$\approx 0.045\sqrt{n + 1.414\cdot 3.03\cdot\sqrt{n}} = 0.045\sqrt{n + 4.285\sqrt{n}} .$$

В таблице ниже приведены значения погрешности δ при различных значениях размера n квадратного окна со стороной в $l = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ пикселей.

$n\ \left(=l^2\right)$	100	400	900	1 600	2 500	3 600	4 900	6 400
δ	0.538	0.992	1.443	1.984	2.344	2.795	3.245	3.695

Заключение. Основным новым результатом данной статьи является аналитическая оценка для вероятности погрешности, которая может возникать при множественном сравнении конечного числа соразмерных цифровых изображений. Эта оценка основана на низкоуровневом сравнении, сводящемся к попиксельному вычислению разностей изображений с помощью эвклидовой метрики. При этом делается стандартное предположение о независимом нормальном зашумлении интенсивностей изображения с нулевым математическим ожиданием и априорно установленным среднеквадратическим отклонением в каждом пикселе.

Приведенные в статье доказательства позволяют утверждать, что полученная верхняя оценка для меры различия множества изображений является достаточно «осторожной», т.е. можно ожидать, что в реальности разброс меры, вызванный шумами на изображении, будет значительно меньше теоретически найденной границы.

Приведенные в работе оценки погрешностей могут использоваться как теоретически обоснованные числовые пороговые значения в задачах, требующих принятия решения о совпадении или различии изображений. Такие пороговые значения неизбежно вводятся на различных этапах обработки зашумленных изображений (например, сегментации), и вопрос об их конкретных значениях, как правило, остается открытым, в лучшем случае предлагаются эвристические соображения для их выбора.

Являясь обобщением результатов, полученных в предшествующей работе авторов [15], данная работа также допускает и предполагает обобщения, которые могут быть связаны с нижними оценками вероятности заданного различия для других мер различия (или сходства), основанных на низкоуровневом сравнении изображений. Основным мотивом для этого является то обстоятельство, что в отличие от рассматриваемой в данной работе эвклидовой метрики, которая основана только на различиях интенсивностей, известны другие метрики, которые учитывают также и пространственные зависимости пикселей. Можно ожидать, что такие более тонкие меры будут в большей степени соответствовать восприятию сходства и различия множественных изображений человеком.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Li-Jia Li, Socher Richard, Li Fei-Fei*. Towards Total Scene Understanding: Classification, Annotation and Segmentation in an Automatic Framework // Computer Vision and Pattern Recognition. – 2009.
2. *Dornaika F., Chakik F.* Efficient Object Detection and Matching using Feature Classification // 2010 International Conference on Pattern Recognition, ICPR 2010. – 2010. – P. 3073-3076.
3. *Mitchell H.B.* Image Fusion. Theories, Techniques and Applications. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010. – 247 p.
4. *Di Gesù Vito, Starovoitov Valery.* Distance-based functions for image comparison // Pattern Recognition Letters. Elsevier. – 1999. – No. 20. – P. 207-214.
5. *Дюран Б., Оделл П.* Кластерный анализ. – М.: Статистика, 1977.
6. *Gool L., Moons T., Ungureanu D., Pauwels E.* Symmetry from Shape and Shape from Symmetry // Int. J. Robotics Res. – 1995. – 14 (5). – P. 407-424.
7. *Martinet A., Soler C., Holzschuch N., Sillion F.* Accurate Detection of Symmetries in 3D Shapes // ACM Trans. Graph. – 2006. – 25 (2). – P. 439-464.
8. *Каркищенко А.Н., Горбань А.С.* Моделирование и классификация поточечных мер сходства // Тр. международной конференция AIS/CAD'08. – Таганрог, 2008.
9. *Karkishchenko A.N., Gorban A.S.* Detection of Symmetry of Images Based on Similarity Measures of Sets // 9th International Conference "Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies" (PRIA-9-2008): Conf. Proceedings. – Nizhniy Novgorod, 2008. – Vol. 1. – P. 261-264.
10. *Каркищенко А.Н., Горбань А.С.* К определению мер сходства полутоновых изображений // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 4 (81). – С. 98-103.
11. *Каркищенко А.Н., Мнухин В.Б.* Классификация изображений периодических структур на основе непрерывного преобразования симметрии // Тр. 8-й Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации – 2010». – Пафос, Кипр, 2010. – С. 359-362.
12. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Fourfold Symmetry Detection in Digital Images Based on Finite Gaussian Fields // Proceedings of the First International Scientific Conference "Intelligent Information Technologies for Industry" (IITI'16). – Vol. 2. – Vol. 451 of the series Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer, 2016. – P. 153-163.
13. *Ameen Mohammed Abd-Alsalam Selami, Ahmed Freidoon Fadhil.* A Study of the Effects of Gaussian Noise on Image Features // Kirkuk University Journal / Scientific Studies (KUJSS). – September, 2016. – Vol. 11. – Iss. 3. – P. 152-169.
14. *Di Gesù Vito, Starovoitov Valery.* Distance-based functions for image comparison // Pattern Recognition Letters, – Elsevier, 1999. – No. 20. – P. 207-214.
15. *Каркищенко А.Н., Мнухин В.Б.* О влиянии зашумления на распознавание симметрии 3-го порядка в гексагональных изображениях // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2020. – № 5 (215). – С. 171-184.
16. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Threefold Symmetry Detection in Hexagonal Images Based on Finite Eisenstein Fields // Analysis of Images, Social Networks, and Texts. 5th International Conference, AIST'2016. Selected Papers. Communications in Computer and Information Science 661. – Springer, 2017. – P. 281-292.
17. *Hundt R., Schön J.C., Hannemann A., Jansen M.* Determination of Symmetries and Idealized Cell Parameters for Simulated Structures // Journal of Applied Crystallography. – 1999. – Vol. 32. – P. 413-416.
18. *Spek A.L.* Structure Validation in Chemical Crystallography // Acta Crystallographica. – 2009. – D65. – P. 148-155.
19. *Zeyun Yu, Bajaj C.* Automatic Ultrastructure Segmentation of Reconstructed CryoEM Maps of Icosahedral Viruses // IEEE Transactions on Image Processing. – 2005. – 14 (9). – P. 1324-1337.
20. *Seiichi Kondo, Mark Lutwyche, Yasuo Wada.* Observation of Threefold Symmetry Images due to a Point Defect on a Graphite Surface Using Scanning Tunneling Microscope (STM) // Japanese Journal of Applied Physics. – 1994. – 33 (9B). – P. 1342-1344.
21. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
22. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

23. *Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. – М.: Физматлит, 2013. – 232 с.
24. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

REFERENCES

1. *Li-Jia Li, Socher Richard, Li Fei-Fei*. Towards Total Scene Understanding: Classification, Annotation and Segmentation in an Automatic Framework, *Computer Vision and Pattern Recognition*, 2009.
2. *Dornaika F., Chakik F.* Efficient Object Detection and Matching using Feature Classification, *2010 International Conference on Pattern Recognition, ICPR 2010*, 2010, pp. 3073-3076.
3. *Mitchell H.B.* Image Fusion. Theories, Techniques and Applications. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010, 247 p.
4. *Di Gesù Vito, Starovoitov Valery.* Distance-based functions for image comparison, *Pattern Recognition Letters. Elsevier*, 1999, No. 20, pp. 207-214.
5. *Dyuran B., Odell P*. Klasternyy analiz [Cluster analysis]. Moscow: Statistika, 1977.
6. *Gool L., Moons T., Ungureanu D., Pauwels E.* Symmetry from Shape and Shape from Symmetry, *Int. J. Robotics Res*., 1995, 14 (5), pp. 407-424.
7. *Martinet A., Soler C., Holzschuch N., Sillion F.* Accurate Detection of Symmetries in 3D Shapes, *ACM Trans. Graph*., 2006, 25 (2), pp. 439-464.
8. *Karkishchenko A.N., Gorban' A.S.* Modelirovanie i klassifikatsiya potochechnykh mer skhodstva [Modeling and Classification of Pointwise Similarity Measures], *Tr. mezhdunarodnoy konferentsiya AIS/CAD'08* [Proceedings of the International Conference AIS/CAD'08]. Taganrog, 2008.
9. *Karkishchenko A.N., Gorban A.S.* Detection of Symmetry of Images Based on Similarity Measures of Sets, *9th International Conference "Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies" (PRIA-9-2008): Conf. Proceedings*. Nizhniy Novgorod, 2008, Vol. 1, pp. 261-264.
10. *Karkishchenko A.N., Gorban' A.S.* K opredeleniyu mer skhodstva polutonovykh izobrazheniy [To the Definition of Measures of Similarity of Halftone Images], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2008, No. 4 (81), pp. 98-103.
11. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Klassifikatsiya izobrazheniy periodicheskikh struktur na osnove nepreryvnogo preobrazovaniya simmetrii [Classification of images of periodic structures based on continuous symmetry transform], *Tr. 8-y Mezhdunarodnoy konferentsii «Intellektualizatsiya obrabotki informatsii – 2010»* [Proceedings of the 8th International Conference "Intellectualization of Information Processing - 2010"]. Paphos, Cyprus, 2010, pp. 359-362.
12. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Fourfold Symmetry Detection in Digital Images Based on Finite Gaussian Fields, *Proceedings of the First International Scientific Conference "Intelligent Information Technologies for Industry" (IITI'16),* Vol. 2, Vol. 451 of the series Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer, 2016, pp. 153-163.
13. *Ameen Mohammed Abd-Alsalam Selami, Ahmed Freidoon Fadhil.* A Study of the Effects of Gaussian Noise on Image Features, *Kirkuk University Journal / Scientific Studies (KUJSS).* September, 2016, Vol. 11, Iss. 3, pp. 152-169.
14. *Di Gesù Vito, Starovoitov Valery.* Distance-based functions for image comparison, *Pattern Recognition Letters.* Elsevier, 1999, No. 20, pp. 207-214.
15. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B*. O vliyanii zashumleniya na raspoznavanie simmetrii 3-go poryadka v geksagonal'nykh izobrazheniyakh [On the influence of noise on the recognition of the third order symmetry in hexagonal images], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2020, No. 5 (215), pp. 171-184.
16. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Threefold Symmetry Detection in Hexagonal Images Based on Finite Eisenstein Fields, A*nalysis of Images, Social Networks, and Texts. 5th International Conference, AIST'2016. Selected Papers. Communications in Computer and Information Science 661*. Springer, 2017, pp. 281-292.
17. *Hundt R., Schön J.C., Hannemann A., Jansen M.* Determination of Symmetries and Idealized Cell Parameters for Simulated Structures, *Journal of Applied Crystallography*, 1999, Vol. 32, pp. 413-416.

18. *Spek A.L.* Structure Validation in Chemical Crystallography, *Acta Crystallographica,* 2009, D65, pp. 148-155.
19. *Zeyun Yu, Bajaj C.* Automatic Ultrastructure Segmentation of Reconstructed CryoEM Maps of Icosahedral Viruses, *IEEE Transactions on Image Processing,* 2005, 14 (9), pp. 1324-1337.
20. *Seiichi Kondo, Mark Lutwyche, Yasuo Wada.* Observation of Threefold Symmetry Images due to a Point Defect on a Graphite Surface Using Scanning Tunneling Microscope (STM), *Japanese Journal of Applied Physics,* 1994, 33 (9B), pp. 1342-1344.
21. *Markus M., Mink Kh.* Obzor po teorii matrits i matrichnykh neravenstv [Overview of the theory of matrices and matrix inequalities]. Moscow: Nauka, 1972, 232 p.
22. *Kramer G.* Matematicheskie metody statistiki [Mathematical Methods of Statistics]. Moscow: Mir, 1975, 648 p.
23. *Kibzun A.I., Goryainova E.R., Naumov A.V.* Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. Bazovyy kurs s primerami i zadachami [Theory of Probability and Mathematical Statistics. Basic course with examples and tasks]. Moscow: Fizmatlit, 2013, 232 p.
24. *Venttsel' E.S., Ovcharov L.A.* Teoriya veroyatnostey [Theory of Probability]. Moscow: Nauka, 1969, 368 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. Г.В. Куповых.

Каркищенко Александр Николаевич – Научно-исследовательский инсттут робототехники и процессов управления ЮФУ; e-mail: karkishalex@gmail.com; 347928 г. Таганрог, Россия; тел.: +78634371694; д.ф.-м.н.; профессор; в.н.с.

Мнухин Валерий Борисович – Южный федеральный университет; e-mail: mnukhin.valeriy@mail.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +78634371606; к.ф.-м.н; доцент.

Karkishchenko Alexander Nikolaevich – Scientific Research Institute of Robotics and Control Processes of the Southern Federal University; e-mail: karkishalex@gmail.com; Taganrog, Russia; phone: +78634371694, dr. of math. sc.; professor; leading researcher.

Mnukhin Valeriy Borisovich – Southern Federal University; e-mail: mnukhin.valeriy@mail.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634371606; cand. of math. sc.; associate professor.

УДК 004.89 DOI 10.18522/2311-3103-2021-2-154-167

Ю.А. Кравченко, А.М. Мансур, Ж.Х. Мохаммад

ВЕКТОРИЗАЦИЯ ТЕКСТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ*

В задачах интеллектуального анализа текста текстовое представление должно быть не только эффективным, но и интерпретируемым, поскольку это позволяет понять операционную логику, лежащую в основе моделей интеллектуального анализа данных. Традиционные методы векторизации текста, такие как TF-IDF и Bag-of-words, эффективны и имеют интуитивно понятную интерпретируемость, но страдают от «проклятия размерности» и не могут понимать смысл слов. С другой стороны, современные распределенные методы эффективно определяют скрытую семантику, но требуют больших вычислительных ресурсов и времени, а также им не хватает интерпретируемости. В этой статье предлагается новый метод векторизации текстов под названием Bag of weighted Concepts BoWC, который представляет документ в соответствии с содержащейся в нем информацией о концептах. Предлагаемый метод создает концепты посредством кластеризации векторов слов (т.е. встраивания слов), и использует частоты этих кластеров кон-

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-22019.