УДК 519.224.22 DOI 10.18522/2311-3103-2020-7-68-78

А.К. Мельников

РАСЧЕТ КОЛИЧЕСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАТНОСТИ ТИПОВ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЧАСТОТУ ВСТРЕЧАЕМОСТИ ЗНАКОВ АЛФАВИТА

Рассматривается количество решений уравнения первой кратности типов, составленного из векторов кратности типов, каждый элемент которого представляет собой число вхождений элементов определенного типа (какого-либо знака алфавита) в рассматриваемую выборку. Уравнение первой кратности типов связывает между собой число вхождений элементов всех типов в рассматриваемую выборку и объём этой выборки. Основное внимание в статье уделено выводу и доказательству правильности выражения, определяющего количество неотрицательных целочисленных решений уравнения первой кратности типов в условиях ограничений на частоту встречаемости знаков алфавита. Решение уравнения первой кратности типов является основой расчета точных приближений вероятностей значений статистик методом первой кратности, где в качестве точных приближений выступают Δ–точные распределения, отличающиеся от точных распределений не более чем на заранее заданную, сколь угодно малую величину Δ. Величина, выражающая количество решений уравнения первой кратности типов, является одной из величин определяющих алгоритмическую сложность метода первой кратности, без знания значения которой нельзя определить параметры выборок, для которых при ограничениях на вычислительный ресурс могут быть рассчитаны точные приближения распределений. Также величина выражающая количества решений уравнения первой кратности типов используется в методе первой кратности для ограничения области поиска решений уравнения. Количество решений уравнения первой кратности рассматривается в условиях ограничения на максимальное значение элементов вектора кратности, при этом рассматривается случай, когда один или несколько элементов алфавита могут в выборке отсутствовать. Впервые получено выражение, определяющее количество неотрицательных целочисленных решений уравнения первой кратности типов в условиях ограничений сверху на значения частот встречаемости знаков и возможности отсутствия одного или нескольких знаков алфавита в рассматриваемой выборке. Получены аналитические выражения, позволяющие для любых значений мощности алфавита, объёма выборки и ограничения на значение максимальной частоты встречаемости знаков алфавита вычислять количество целочисленных неотрицательных решений уравнения первой кратности типов. Вид полученного выражения позволяет использовать его при изучении алгоритмической сложности расчетов точных приближений распределений вероятностей значений статистик с заранее указанной точностью Δ.

Вероятность; статистика; точное распределение; точное приближение; вектор кратности типов; линейное уравнение; алгоритмическая сложность.

A.K. Melnikov

CALCULATION OF THE NUMBER OF SOLUTIONS TO THE EQUATION OF THE FIRST MULTIPLICITY OF TYPES UNDER RESTRICTIONS ON THE FREQUENCY OF OCCURRENCE OF ALPHABET CHARACTERS

The article considers the number of solutions to the equation of the first multiplicity of types, composed of vectors of multiplicity of types, each element of which is the number of occurrences of elements of a certain type (any sign of the alphabet) in the sample under consideration. The equation of the first multiplicity of types relates the number of occurrences of elements of all types in the sample under consideration and the volume of this sample. The main attention is paid to the conclusion and proof of the correctness of the expression that determines the number of non-negative integer solutions of the equation of the first multiplicity of types under conditions of restrictions on the frequency of occurrence of alphabet characters. The solution of the equation of *the first multiplicity of types is the basis for calculating exact approximations of the probabilities of statistical values by the first multiplicity method, where the exact approximations are* Δ*–exact distributions that differ from the exact distributions by no more than a predetermined, arbitrarily small value* Δ*. The value that expresses the number of solutions to the equation of the first multiplicity of types is one of the values that determine the algorithmic complexity of the method of the first multiplicity, without knowing the value of which it is impossible to determine the parameters of samples for which, under restrictions on the computational resource, exact approximations of distributions can be calculated. Also, the value expressing the number of solutions to the equation of the first multiplicity of types is used in the method of the first multiplicity to limit the search area for solutions to the equation. The number of solutions to the equation of the first multiplicity is considered under conditions of restriction on the maximum value of the elements of the multiplicity vector, and the case is considered when one or more elements of the alphabet may be missing in the sample. First obtained the expression that defines the number of nonnegative integer solutions to equations of the first multiplicity of types in terms of restrictions on the values of the frequencies of occurrence of signs and the possibility of absence of one or more characters of the alphabet in the sample reviewed. Analytical expressions are obtained that allow calculating the number of integer nonnegative solutions of the equation of the first multiplicity of types for any values of the alphabet power, the sample size, and the limit on the maximum frequency of occurrence of alphabet characters. The form of the obtained expression allows you to use it when studying the algorithmic complexity of calculating exact approximations of probability distributions of statistical values with a pre-specified accuracy* Δ.

Probability; statistics; exact distribution; an accurate approximation of the vector of multiplicity of types; the linear equation algorithmic complexity.

Введение. Для расчета точных распределений [1] и их точных приближений (Δ-точных распределений [2]) может применяться метод, основанный на решении уравнения первой кратности типов [3], объединяющего информацию о частотах встречаемости знаков алфавита мощности N в последовательности (выборки) длины (объёма) n. Для оценки алгоритмической сложности [4] метода расчета точных приближений, основанного на решении уравнения первой кратности, необходимо уметь рассчитывать количество решений этого уравнения.

Данная работа посвящена расчету количества решений уравнения первой кратности типов.

Постановка задачи. Необходимо рассчитать $K_h(N, n, r)$ количество целочисленных упорядоченных неотрицательных решений уравнения первой кратности типов

$$h_1 + h_2 + ... + h_N = n, \tag{1}$$

где N мощность алфавита $A_N = \{a_1, a_2, ... , a_N\}$, n длина последовательности (объёма выборки) и h_i частота встречаемости a_i знака алфавита A_N. Условия расчета следующие:

1. N, n, и $m \in \mathrm{N}$ − множеству натуральных чисел (целых положительных чисел больших нуля),
2. N мощность алфавита $A_N = \{a_1, a_2, ... , a_N\}$,
3. n длина последовательности или объём выборки, $N \le n$,
4. $\{0 \le h_i \le n \mid \forall i = \overline{1.N}\}$ вектор первой кратности типов (вектор частот встречаемости знаков алфавита в последовательности),
5. r ограничение на значения координат (частот) вектора первой кратности типов $0 \le h_i \le r \mid \forall i = \overline{1.N}$, $r \le n$;

Обозначим условия ограничения на координаты вектора кратности типов через

$$\{0 \le h_i \le r \mid \forall i = \overline{1, N}\}. \tag{2}$$

Условие упорядоченности решений, означает, что каждая переменная вектора решений $\{h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, ..., h_N^{(i)}\}$ уравнения (1) пронумерована.

Условия не отрицательности и упорядоченности решений уравнения (1) можно продемонстрировать двумя вырожденными решениями, которые считаются различными.

$$\underbrace{0+0+...+0}_{N-1}+n=n \qquad n+\underbrace{0+0+...+0}_{N-1}=n$$

Известно, что в частном случае, при $r=n$ число $K_h(N, n, n)$ целочисленных неотрицательных упорядоченных решений уравнения (1) в условиях

$$0 \le h_i \le n \mid \forall i = \overline{1, N}$$

равно числу сочетаний с повторениями $\overline{C}_N^n$

$$K_h(N,n,n) = \overline{C}_N^n = C_{N+n-1}^n = \binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)!\cdot}{n!\cdot(N-1)!}$$

Данная проблематика подробно рассматривалась Боровков А.А. [5], Колчиным В.Ф. [6], Сачковым В.Н. [7] и Зуевым Ю.А. [8]. Получение количества решений уравнения в общем случае рассмотрим с помощью двух методов: метода взаимно однозначного соответствия и метода включения-исключения.

Метод взаимно однозначного соответствия. Для рассмотрения общего случая для $0 \le r \le n$ несколько преобразуем уравнение (1) путем прибавления единицы к каждой неизвестной h_i левой части уравнения и N к правой части уравнения (1). Получим

$$(h_1+1)+(h_2+1)+....+(h_N+1) = n+N\cdot \tag{3}$$

Условие (2) преобразуем путем прибавления 1 (единиц) к неизвестной h_i и значениям нижней и верхней границы. Получим

$$1 \le (h_i+1) \le r+1 \mid \forall i = \overline{1, N}\cdot \tag{4}$$

Теперь установим взаимно однозначного соответствия между числом целочисленных положительных решений уравнения (1) в условии (2) и числом целочисленных положительных решений уравнения (3) в условии (4) описанным у многих авторов методом, в частности у известного американского математика Marshall Hall (М. Холл) [10] на стр. 11 при рассмотрении вопроса о числе сочетаний с повторениями, и на портале [11].

Обязательно отметим очевидный факт, что ввиду проведения тождественных преобразований и установления взаимно однозначного соответствия между {(1), (2)} и {(3), (4)} число решений уравнения (1) в условиях (2) равно числу решений уравнения (3) в условиях (4).

Более общий случай для числа решений уравнения с ограничением на значения всех неизвестных рассматривается Сачковым В.Н. [7] при рассмотрении в параграфе 3 коммутативного несимметричного n-базиса, являющегося частным случаем обобщенной комбинаторной схемы, приведен результат (3.23 стр. 215), определяющий число решений $K_{nm}(s)$ (число композиций) уравнения

$$x_1+x_2+...+x_n=m, \tag{5}$$

где под n подразумевается мощность алфавита, под m длина последовательности и под s ограничение на значения неизвестных (координаты вектора первой кратности)

$$1 \le x_i \le s \mid \forall i = \overline{1,n}\cdot \tag{6}$$

Этот результат следующий

$$K_{nm}(s) = \sum_{k=0}^{\min(n,\frac{m-n}{s})} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{m-sk-1}{n-1}. \tag{7}$$

Здесь и далее под максимальным значением для индекса суммирования k понимается целое неотрицательное число меньшее или равное $\min(n,\frac{m-n}{s})$

$$\max k \le \min(n,\frac{m-n}{s})\cdot$$

Отличие условия (2) от условия (6) в том, что мы рассматриваем модель когда некоторые знаки алфавита $A_N = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ могут не реализоваться в рассматриваемой нами последовательности и поэтому некоторые $h_i = 0$ могут равняться 0. В условиях (6) рассматривается более узкий случай, когда все знаки алфавита реализованы в рассматриваемой последовательности и поэтому $x_i \ne 0 \mid \forall i = \overline{1,n}$, где здесь n мощность алфавита.

Теперь определим взаимно однозначное соответствие между уравнениями (3) и (5):

$$(h_1+1)+(h_2+1)+\ldots+(h_N+1) = n+N$$

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=m.$$

Взаимно однозначное соответствие может быть определено при

$$n=N,\ x_i = h_i+1 \mid \forall i = \overline{1,N} \text{ и } m=n+N. \tag{8}$$

Взаимно однозначное соответствие между условиями (4) и (6):

$$1 \le (h_i+1) \le r+1 \mid \forall i = \overline{1,N}$$

$$1 \le x_i \le s \mid \forall i = \overline{1,n}$$

определяется, учитывая что $n=N$ при

$$x_i = h_i+1 \mid \forall i = \overline{1,N} \text{ и } s=r+1. \tag{9}$$

Теперь при применении взаимно однозначного соответствия (8) и (9) выражение (7) принимает вид

$$K_h(N,n,r) = \sum_{i=0}^{\min(N,\frac{n}{r+1})} (-1)^i \binom{N}{i}\binom{n+N-(r+1)i-1}{N-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\min(N,\frac{n}{r+1})} (-1)^i \binom{N}{i}\binom{N+n-1-(r+1)i}{N-1}. \tag{10}$$

В случаи $r=n$, исходя из (10) $K_h(N,n,r)$ будет равняться $K_h(N,n,n)$

$$K_h(N,n,n)=\sum_{i=0}^{\min(N,\frac{n}{n+1})}(-1)^i\binom{N}{i}\binom{n+N-(n+1)i-1}{N-1}=\sum_{i=0}^{0}(-1)^0\binom{N}{0}\binom{n+N-1}{N-1}=$$

$$=1\cdot1\cdot\binom{N+n-1}{N-1}=\binom{N+n-1}{n}=\overline{C}_N^n=C_{N+n-1}^n, \tag{11}$$

что полностью согласуется с приведенным ранее результатом. Таким образом изложение метода нахождения числа решений линейного уравнения, основанного на построении взаимно однозначных соответствий, завершено.

Метод включения-исключения. Для подтверждения правильности полученного решения о количестве упорядоченных неотрицательных целочисленных решений уравнения первой кратности типов в условиях (2), кратко, приведем пример другого решения данной задачи, предложенного Колодзеем А.В. и основанного на применения общеизвестного метода включения-исключения, рассматриваемого, например, в [12, 13].

Обозначим через Ω – множество всех упорядоченных целочисленных неотрицательных решений уравнения (1) в условиях (2) без учёта ограничений $0\le h_i\le n\mid\forall i=\overline{1,N}$. Тогда, как указывалось выше, число таких решений $|\Omega|$ равно числу сочетаний с повторениями *n* по N – $\overline{C}_N^n$.

$$|\Omega|=K_h(N,n,n)=\overline{C}_N^n=\binom{N+n-1}{N-1}=\binom{N+n-1}{n}=C_{N+n-1}^n.$$

Обозначим через Ω_j множество всех упорядоченных целочисленных неотрицательных решений уравнения (1) при условии $h_j>r$. Ясно, что число решений уравнения (1) в условиях $\{0\le h_i\le r\mid\forall i=\overline{1,N}\}$ равно

$$K_h(N,n,r)=|\Omega|-\left|\bigcup_{j=1}^{N}\Omega_j\right|. \tag{12}$$

Для вычисления $\left|\bigcup_{j=1}^{N}\Omega_j\right|$ применим метод включения – исключения, см., например [11].

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{j=1}^{N}\Omega_j\right|&=\sum_{i-1}^{N}|\Omega_i|-\sum_{1\le i_1<i_2\le N}\left|\Omega_{i_1}\bigcap\Omega_{i_2}\right|+\ldots+\\&+(-1)^{k-1}\cdot\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N}\left|\Omega_{i_1}\bigcap\Omega_{i_2}\bigcap\ldots\bigcap\Omega_{i_k}\right|+\ldots\\&+(-1)^{n-1}\cdot\left|\Omega_1\bigcap\Omega_2\bigcap\ldots\bigcap\Omega_N\right|.\end{aligned} \tag{13}$$

В каждой *k*–й сумме

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N}\left|\Omega_{i_1}\bigcap\Omega_{i_2}\bigcap\ldots\bigcap\Omega_{i_k}\right|$$

из (13) число слагаемых равно биномиальному коэффициенту C_N^k [14].

Рассмотрим отдельно каждое k-е слагаемое $k=\overline{2,N}$ из (13). Оно, по построению, есть число упорядоченных целочисленных неотрицательных решений уравнения (1)

$$h_1+h_2+....+h_N=n$$

при условии, что k переменных $h_{i_j}>r\mid j=\overline{1,k}$.

Теперь для этого k–ого слагаемого из (13) и представляющего его уравнения (1) вычтем из каждой переменной $h_{i_j}>r\mid j=\overline{1,k}$, число $(r+1)$, тогда уравнение (1) примет вид

$$h_1+(h_{j_1}-r-1)+....+(h_{j_2}-r-1)+...+(h_{j_k}-r-1)+...+h_N= \tag{14}$$

$$=n-k(r+1).$$

Теперь преобразуем уравнение (14) следующим образом:

♦ переменным h_i, не подвергшимся уменьшению, присвоим значения переменных y_i,

♦ переменным $(h_{j_\nu}-r-1)$, подвергшимся уменьшению, также присвоим значения переменных y_{j_ν}.

Таким образом переопределив переменные уравнения (14) получаем эквивалентное уравнение

$$y_1+y_2+....+y_N=n-k(r+1), \tag{15}$$

число упорядоченных целочисленных неотрицательных решений которого равно числу целочисленных решений уравнения (14).

Как известно из [8, 9] число упорядоченных целочисленных неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_N=m$, равно

$$\binom{N+m-1}{N-1},$$

а тогда число решений уравнения (15) при $m=n-k(r+1)$ равно

$$\binom{N+n-k(r+1)-1}{N-1}.$$

Теперь в соответствии с (12), (13) и (14) и числу слагаемых в каждой k–й сумме искомое количество решений $K_h(N,n,r)$ равняется

$$K_h(N,n,r)=|\Omega|-\left|\bigcup_{j=1}^{N}\Omega_j\right|=\binom{N+n-1}{N-1}-\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\binom{N}{k}\binom{N+n-k(r+1)-1}{N-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}(-1)^{k}\binom{N}{k}\binom{N+n-k(r+1)-1}{N-1}. \tag{16}$$

Выражение (16), полученное в результате применения метода включения – исключения, соответствует выражению (10), независимо полученному методом взаимно однозначного соответствия. Данный факт может служить дополнительным подтверждением правильности значения (10).

Анализ количества решений уравнения. Для параметров выборок на границе Фишера Р.А. [15] n=5N и соответствующих им ограничениям на значения статистики максимальной частоты $r = m(N{,}5N{,}10^{-5})$ для точности Δ=10^{-5}, рассчитанным в соответствии с [16, 17] с помощью [18] для мощностей алфавита N от 2 до 27 были проведены расчеты количества решений уравнения первой кратности без ограничений $K_h(N,n,n)$ на значения частоты и с ограничением на это значение $K_h(N,n,r)$. Результаты частично представлены в табл. 1.

Таблица 1

Количество решений уравнения первой кратности типов с ограничениями и без ограничений для параметров на границе Фишера *n*=5*N*

№ п/п	Параметры			$K_h(N,n,n)$	$K_h(N,n,r)$	$K_h(N,n,n) - K_h(N,n,r)$
	N	n	r			
1	*2*	*2*	*4*	*5*	*6*	*7*
	2	10	10	$1{,}10 \times 10^{1}$	$1{,}10 \times 10^{1}$	0
1	*2*	*2*	*4*	*5*	*6*	*7*
	3	15	14	$1{,}36 \times 10^{2}$	$1{,}33 \times 10^{2}$	$3{,}00 \times 10^{0}$
	5	25	17	$2{,}38 \times 10^{4}$	$2{,}21 \times 10^{4}$	$1{,}65 \times 10^{3}$
	6	30	17	$3{,}25 \times 10^{5}$	$2{,}88 \times 10^{5}$	$3{,}71 \times 10^{4}$
	9	45	18	$8{,}86 \times 10^{8}$	$7{,}23 \times 10^{8}$	$1{,}63 \times 10^{8}$
	10	50	18	$1{,}26 \times 10^{10}$	$9{,}84 \times 10^{9}$	$2{,}72 \times 10^{9}$
	11	55	19	$1{,}79 \times 10^{11}$	$1{,}44 \times 10^{11}$	$3{,}49 \times 10^{10}$
	16	80	19	$1{,}10 \times 10^{17}$	$7{,}53 \times 10^{16}$	$3{,}51 \times 10^{16}$
	17	85	19	$1{,}60 \times 10^{18}$	$1{,}06 \times 10^{18}$	$5{,}44 \times 10^{17}$
	18	90	19	$2{,}32 \times 10^{19}$	$1{,}48 \times 10^{19}$	$8{,}39 \times 10^{18}$
	19	95	19	$3{,}37 \times 10^{20}$	$2{,}08 \times 10^{20}$	$1{,}29 \times 10^{20}$
	20	100	20	$4{,}91 \times 10^{21}$	$3{,}27 \times 10^{21}$	$1{,}64 \times 10^{21}$
	21	105	20	$7{,}16 \times 10^{22}$	$4{,}64 \times 10^{22}$	$2{,}51 \times 10^{22}$
	22	110	20	$1{,}04 \times 10^{24}$	$6{,}60 \times 10^{23}$	$3{,}84 \times 10^{23}$
	27	135	20	$7{,}00 \times 10^{29}$	$3{,}86 \times 10^{29}$	$3{,}13 \times 10^{29}$

Разница в количестве решений с ограничениями и без представлена на рис. 1. На рис. 2 представлено процентное отношение числа решений с ограничениями к общему числу решений.

Рис. 1. Разность общего число решений уравнения первой кратности и числа его решений с ограничениями

Анализ значений в колонках 5, 6 и 7 табл. 1 и рис. 1 и 2 позволяет сделать следующие основные выводы о количестве решений уравнения первой кратности типов.

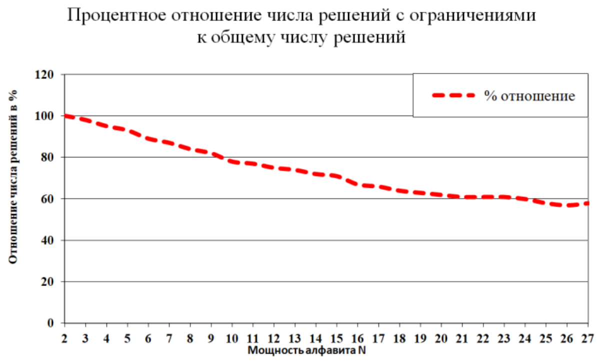

Рис. 2. Процентное отношение числа решений с ограничениями к общему числу решений уравнения первой кратности

Общее число решений уравнения практически всегда больше числа решений с ограничениями.

Разность в количестве решений увеличивается с ростом мощности алфавита N и объёма выборки n.

Для ограничения r на максимальную частоту встречаемости знаков алфавита, вычисляемого из точности $\Delta=10^{-5}$, процентное отношение числа решений с ограничениями к общему числу решений уравнения падает с ростом мощности алфавита N и объёма выборки n.

Как показывалось в [19] для оценки алгоритмической сложности расчета точных приближений распределений вероятностей значений статистик методом первой кратности необходимо, для всех значений параметров выборок N и n, уметь оценивать, как общее число перебираемых векторов возможных решений рассматриваемого нами уравнения первой кратности, так и само количество получаемых решений. Вид полученного выражения (10) аналитически прост, не содержит предельных и остаточных членов, как в предельных разложениях [20], и может быть вычислен для любых параметров выборок как с ограничениями на значения частоты так и без ограничений.

Заключение и выводы. Получены аналитические выражения, позволяющие для любых значений мощности алфавита N, объёма выборки n и ограничения на значение максимальной частоты встречаемости знаков алфавита r вычислять количество целочисленных неотрицательных решений уравнения первой кратности типов. Впервые решения получены для самых минимальных условий на выборку, учитывающих возможность отсутствия в выборке одного либо нескольких знаков из рассматриваемого алфавита. Достоверность полученных выражений подтверждается его логическим доказательством и применением при его выводе известных методов.

Вид полученного выражения позволяет использовать его при изучении алгоритмической сложности расчетов точных приближений распределений вероятностей значений статистик с заранее указанной точностью Δ. В частности полученной выражение используется для получения выражения алгоритмической сложности расчета точных приближений вероятностей распределений значений статистик методом первой кратности.

Анализ сравнения вычисленных значений количества решений уравнения первой кратности с ограничениями на частоту и без ограничений показывает их значительную разницу, увеличивающуюся с ростом мощности алфавита и объема выборки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мельников А.К.* Сложность расчета точных распределений вероятности симметричных аддитивно разделяемых статистик и область применения предельных распределений // Доклады ТУСУР. – Томск, 2017. – Т. 20, № 4. – С. 126-130. – ISSN 1818-0442.
2. *Мельников А.К., Ронжин А.Ф.* Обобщенный статистический метод анализа текстов, основанный на расчете распределений вероятности значений статистик // Информатика и её применения. – 2016. – Т. 10. – Вып. 4. – С. 91-97. – ISSN 1992-2264.
3. *Melnikov A.K.* Application of the calculation method of near-exact statistics probability distributions // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2018. – Т. 25. – Вып. 2. – С. 153-154. – ISSN 0869-8325. – https://tvp.ru/conferen/vsppmXIX/repso050.pdf (дата обращения: 24.01.2019).
4. *Юдин Д.Б., Юдин А.Д.* Математики измеряют сложность. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2018. – 192 с. – ISBN 978-5-397-06042-4.
5. *Боровков А.А.* Математическая статистика. – Новосибирск: Изд-во ИМ СОРАН, Наука, 1997. – 772 с.
6. *Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Случайные размещения. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 224 с.
7. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 384 стр.
8. *Зуев Ю.А.* Современная дискретная математика: От перечислительной комбинаторики до криптографии XXI века. – М.: ЛЕНАРД, 2019. – 720 с. (Основы защиты информации № 17). – IBSN 978-5-9710-5660-7.
9. *Зуев Ю.А.* Современная дискретная математика: От перечислительной комбинаторики до криптографии XXI века. Более 700 задач с решениями. – М.: ЛЕНАРД, 2019. – 304 с. (Основы защиты информации № 18). – ISBN 978-5-9710-5662-1.
10. *Холл М.* Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 424 с.
11. http://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30719.
12. *Эндрюс Г.* Теория разбиений: пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 256 с.
13. *Дж. Риордан.* Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во иностранной лит., 1963. – 288 с.
14. *Дж. Риордан.* Комбинаторные тождества. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 255 с.
15. *Фишер Р.А.* Статистические методы для исследователей: пер. с англ. – М.: Госстатиздат, 1958. – 73 с.
16. *Мельников А.К.* Относительная алгоритмическая сложность расчета точных приближений распределений вероятностей значений статистик // Модели, методы и технологии интеллектуального управления (ИУ-2019): Матер. 12-й Мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2019): в 4 т. Т. 1. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2019. – С. 108-112. – ISBN 978-5-9275-3189-9.
17. *Мельников А.К.* Относительная алгоритмическая сложность расчета точных приближений распределений вероятностей значений статистик // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2019. – № 7 (209). – С. 35-45.
18. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018664980. Расчет вероятностей значений статистики максимальной частоты. Правообладатель Мельников А.К. Автор: Мельников А.К. и Зелюкин Н.Б. Заявка № 2018662123. Дата поступления 01 ноября 2018 г. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 27 ноября 2018 г.
19. *Мельников А.К.* Методика расчета распределения вероятностей значений симметричных аддитивно разделяемых статистик, приближенных к их точному распределению // Научный вестник НГТУ. – 2018. – № 1 (70). – С. 153-166. – ISBN 1814-1196. – Doi: 10.17212/1814-1196-2018-1-153-166.
20. *Hutchinson T.P.* 1979. The validity of the chi-squared test when expected frequencis are small: A list of recent research references // Commun. Stat. A Theor. – Vol. 8, No. 4. – P. 327-335.

REFERENCES

1. *Mel'nikov A.K.* Slozhnost' rascheta tochnykh raspredeleniy veroyatnosti simmetrichnykh additivno razdelyaemykh statistik i oblast' primeneniya predel'nykh raspredeleniy [The complexity of calculating the exact probability distributions of symmetric additive-separated statistics and the application of limit distributions], *Doklady TUSUR* [Proceedings of Tomsk State University]. Tomsk, 2017, Vol. 20, No. 4, pp. 126-130. ISSN 1818-0442.
2. *Mel'nikov A.K., Ronzhin A.F.* Obobshchennyy statisticheskiy metod analiza tekstov, osnovannyy na raschete raspredeleniy veroyatnosti znacheniy statistik [Generalized statistical method of text analysis based on calculation of probability distribution of statistical values] *Informatika i ee primeneniya* [Informatics and its applications], 2016, Vol. 10, Issue 4, pp. 91-97. ISSN 1992-2264.
3. *Melnikov A.K.* Application of the calculation method of near-exact statistics probability distributions, Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2018, Vol. 25, Issue 2, pp. 153-154. ISSN 0869-8325. Available at: https://tvp.ru/conferen/vsppmXIX/repso050.pdf (accessed 24 January 2019).
4. *Yudin D.B., Yudin A.D.* Matematiki izmeryayut slozhnost' [Mathematicians measure complexity]. Moscow: Knizhnyy dom "LIBROKOM", 2018, 192 p. ISBN 978-5-397-06042-4.
5. *Borovkov A.A.* Matematicheskaya statistika [Mathematical statistics]. Novosibirsk: Izd-vo IM SORAN, Nauka, 1997, 772 p.
6. *Kolchin V.F., Sevast'yanov B.A., Chistyakov V.P.* Sluchaynye razmeshcheniya [Random placements]. M.: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1976, 224 p.
7. *Sachkov V.N.* Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoy matematiki [Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics]. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1982, 384 p.
8. *Zuev Yu.A.* Sovremennaya diskretnaya matematika: Ot perechislitel'noy kombinatoriki do kriptografii XXI veka [Modern discrete mathematics: From enumerative combinatorics to cryptography of the XXI century]. Moscow: LENARD, 2019, 720 p. (Fundamentals of Information security No. 17). ISBN 978-5-9710-5660-7.
9. *Zuev Yu.A.* Sovremennaya diskretnaya matematika: Ot perechislitel'noy kombinatoriki do kriptografii XXI veka. Bolee 700 zadach s resheniyami [Sovremennaya diskretnaya matematika: Ot perechislitel'noy kombinatoriki do kriptografii XXI veka]. Moscow: LENARD, 2019, 304 p. (Osnovy zashchity informatsii No. 18). ISBN 978-5-9710-5662-1.
10. *Kholl M.* Kombinatorika [Combinatorial theory]. Moscow: Mir, 1970, 424 p.
11. http://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30719.
12. *Endryus G.* Teoriya razbieniy [The theory of partitions]: transl. from engl. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1982, 256 p.
13. *Dzh. Riordan.* Vvedenie v kombinatornyy analiz [Introduction to combinatorial analysis]. Moscow.: Izd-vo inostrannoy lit., 1963, 288 p.
14. *Dzh. Riordan.* Kombinatornye tozhdestva [Combinatorial identities]. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1982, 255 p.
15. *Fisher R.A.* Statisticheskie metody dlya issledovateley [Statistical methods for research workers]: transl. from engl. Moscow: Gosstatizdat, 1958, 73 p.
16. *Mel'nikov A.K.* Otnositel'naya algoritmicheskaya slozhnost' rascheta tochnykh priblizheniy raspredeleniy veroyatnostey znacheniy statistik [Relative algorithmic complexity of exact approximations for probability distributions of statistics values], *Modeli, metody i tekhnologii intellektual'nogo upravleniya (IU-2019): Mater. 12-y Mul'tikonferentsii po problemam upravleniya (MKPU-2019)* [Models, methods and technologies of intelligent management (IU-2019): Materials of the 12th Multi-Conference on Management Problems (ICPU-2019)]: i n 4 vol. Vol. 1. Rostov-on-Don; Taganrog: Izd-vo YuFU, 2019, pp. 108-112. ISBN 978-5-9275-3189-9.
17. *Mel'nikov A.K.* Otnositel'naya algoritmicheskaya slozhnost' rascheta tochnykh priblizheniy raspredeleniy veroyatnostey znacheniy statistik [Relative algorithmic complexity of exact approximations for probability distributions of statistics values], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2019, No. 7 (209), pp. 35-45.
18. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2018664980. Raschet veroyatnostey znacheniy statistiki maksimal'noy chastoty. Pravoobladatel' Mel'nikov A.K. Avtor: Mel'nikov A.K. i Zelyukin N.B. Zayavka № 2018662123. Data postupleniya 01 noyabrya 2018 g. Data gosudarstvennoy registratsii v Reestre programm dlya EVM 27

noyabrya 2018 g. [Certificate of state registration of computer software № 2018664980. Calculation of probabilities of maximum frequency statistics. Proprietor – A.K. Melnikov. Authors: A.K. Melnikov and N.B. Zeliukin. Application № 2018662123. Date of filing – November 01, 2018. Date of state registration in the Register of computer software – November 27, 2018].
19. *Mel'nikov A.K.* Metodika rascheta raspredeleniya veroyatnostey znacheniy simmetrichnykh additivno razdelyaemykh statistik, priblizhennykh k ikh tochnomu raspredeleniyu [A method for calculating the probability distribution of values of symmetric additively separated statistics that are close to their exact distribution], *Nauchnyy vestnik NGTU* [Science bulle-tin of the Novosibirsk state technical university], 2018, No. 1 (70), pp. 153-166. ISBN 1814-1196. Doi: 10.17212/1814-1196-2018-1-153-166.
20. *Hutchinson T.P*. 1979. The validity of the chi-squared test when expected frequencis are small: A list of recent research references, *Commun. Stat. A Theor*., Vol. 8, No. 4, pp. 327-335.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор И.И. Левин.

Мельников Андрей Кимович – АО «Вычислительные решения»; e-mail: ak@comp-sol.ru; 117587, г. Москва, Варшавское шоссе, 125, тел.: +74952870035; к.т.н.; доцент ВАК; г.н.с.

Melnikov Andrey Kimovich – SC «Computing solutions»; e-mail: ak@comp-sol.ru; 125, Varshavskoye roag, Moscow, 117587, Russia; phone: +784952870035; cand. of eng. sc.; associate professor of SAC; chief research officer.

УДК 519.178 DOI 10.18522/2311-3103-2020-7-78-93

Д.В. Михайлов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ГРАФОВ В ПАРАЛЛЕЛЬНО-КОНВЕЙЕРНУЮ ФОРМУ

Многие задачи цифровой обработки сигналов могут быть представлены в виде информационных графов. Реконфигурируемые вычислительные системы, построенные на основе ПЛИС, могут иметь структуру, непосредственно соответствующую информационному графу решаемой задачи. Построение графа задачи и последующее создание вычислительной структуры может занимать значительное время при выполнении их вручную. В связи с этим возникает необходимость создания алгоритмов преобразования информационных графов, которые могут выполняться автоматически. В статье предложены алгоритмы преобразования однородных графов, содержащих ассоциативные операции, и смешанных графов, содержащих два типа операций, один из которых является дистрибутивным по отношению к другому. Преобразования графов первого типа (состоящих из операций одного типа) сводятся к переходу от последовательной формы графа к пирамидальной для ускорения выполнения всех операций графа. В случае если имеющегося количества оборудования недостаточно для реализации всех операций графа, применяется преобразование, разбивающее исходный граф на изоморфные подграфы. Размер подграфа зависит от имеющегося вычислительного ресурса. В этом случае вычислительная структура будет соответствовать такому подграфу. Преобразования графов второго типа (состоящих из операций двух типов, одни из которых являются дистрибутивными по отношению к другим) сводятся к разделению графа на подграфы, содержащие операции одного типа, соединённые особым образом. После этого эти подграфы могут быть преобразованы в пирамидальную форму для ускорения выполнения всех операций графа. При этом количество вершин с дистрибутивными операциями может значительно возрасти, в связи с чем может потребоваться сокращение их числа. Отсюда следует, что при преобразовании графов второго типа не обходимо выбирать конкретную форму, к которой будет приведён граф, исходя из соотношения его размера и имеющегося вычислительного ресурса. Таким образом, предложенные алгоритмы преобразования информационных графов различных типов могут быть эффективно использованы при разработке вычислительных структур, основанных на ПЛИС.

Графы; реконфигурируемые вычислительные системы; преобразование графов.