Полуянович Николай Константинович – Южный федеральный университет; e-mail: nik1-58@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89185693365; кафедра электротехники и мехатроники.

Дубяго Марина Николаевна – e-mail: w_m88@mail.ru; тел.: 89281758225; кафедра электротехники и мехатроники; аспирант.

Poluyanovich Nikolay Konstanti – Southern Federal University; e-mail: nik1-58@mail.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79185693365; the department of electric technics and mechatronics.

Dubyago Marina Nikolaevna – e-mail: w_m88@mail.ru; phone: +79281758225; the department of electrical engineering and mechatronics; graduate student.

УДК 51.74 DOI 10.18522/2311-3103-2020-6-88-99

С.Г. Буланов

КОМПЬЮТЕРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен подход к анализу устойчивости в смысле Ляпунова систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В основе подхода лежат критерии устойчивости в виде необходимых и достаточных условий, полученные на основе матричных мультипликативных преобразований разностных схем численного интегрирования. Матричная, мультипликативная форма критериев влечет возможность их циклической программной реализации в виде цикла по числу сомножителей. Математически обосновано, что необходимая в процессе программирования замена бесконечного матричного произведения на конечное произведение, сохраняет достоверность анализа устойчивости по предложенным критериям. Проведено исследование зависимости достоверности компьютерного анализа устойчивости от погрешности разностного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С целью повышения точности разностных приближений решения и линеаризации системы используется метод варьируемого кусочно-полиномиального приближения решения. Метод дает непрерывные и непрерывно-дифференцируемые приближения искомых решений на всем промежутке интегрирования. Требуемые приближения получаются на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации интерполяционными полиномами Ньютона, преобразованными к форме полинома с числовыми коэффициентами. Компьютерная аппроксимация подынтегральных функций повышает точность вычисления интеграла. Тем самым повышается точность вычисления выражений в каждом сомножителе матричных произведений, как следствие повышается достоверность анализа по критериям устойчивости. Проведен программный и численный эксперимент по анализу устойчивости системы Лоренца при заданных начальных условиях и вариации параметров. На основе численных данных, полученных в ходе эксперимента, однозначно установлен характер устойчивости исследуемой системы. В целом предложенный подход дает возможность выполнить анализ устойчивости произвольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в режиме реального времени без обращения к методам качественной теории дифференциальных уравнений и системам компьютерной математики.

Устойчивость по Ляпунову; компьютерный анализ устойчивости; разностные решения дифференциальных уравнений.

S.G. Bulanov

COMPUTER METHOD FOR ANALYZING THE STABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS

This article proposes approach to the stability analysis in the sense of Lyapunov for systems of ordinary differential equations. The approach is based on stability criteria in the form of necessary and sufficient conditions obtained on the basis of matrix multiplicative transformations of difference schemes of numerical integration. The matrix, multiplicative form of criteria implies the possibility of their cyclic program implementation in the form of a cycle by the number of multipliers. It is mathematically proved that the replacement of an infinite matrix product with a finite product, which is necessary in the programming process, preserves the certainty of the stability analysis according to the proposed criteria. The dependence of the certainty of computer stability analysis on the error of the difference solution of a system of ordinary differential equations is investigated. In order to improve the accuracy of difference approximations of the solution and linearization of the system, the method of variable piecewise polynomial approximation of the solution is used. The method gives continuous and continuously differentiable approximations of the desired solutions over the entire integration interval. The required approximations are obtained on the basis of a piecewise-polynomial approximation by Newtonian interpolation polynomials converted to the form of a polynomial with numerical coefficients. Computer approximation of integrands increases the accuracy of integral calculation. This increases the accuracy of calculating expressions in each multiplier of matrix products, and consequently increases the certainty of analysis using stability criteria. A program and numerical experiment was conducted to analyze the stability of the Lorentz system under given initial conditions and parameters changes. Based on the numerical data obtained during the experiment, the stability nature of the system under study is unambiguously established. In General, the proposed approach makes it possible to perform a stability analysis arbitrary systems of ordinary differential equations in real time mode without access to methods of the qualitative theory of differential equations and systems of computer mathematics.

Lyapunov stability; computer stability analysis; difference solutions of differential equations.

Введение. Быстрый (в режиме реального времени) и достоверный анализ устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) требуется проводить при решении задач прикладной математики, механики, физики, теории сверхоперативного управления [1–3].

Компьютеризация математических и системных исследований приводит к вопросу о выполнимости достоверного анализа устойчивости средствами вычислительной техники [4–6]. В статье представлены сравнительно доступные и достоверные средства анализа для автоматизированного контроля устойчивости. Разрабатываемый метод анализа устойчивости систем ОДУ строится на основе мультипликативных преобразованиях разностных схем численного интегрирования [7–9]. Для анализа устойчивости используется также вектор-функция правой части системы ОДУ и ее производная. В отдельных разновидностях предлагаемый подход дает возможность аналитического применения [10], в целом трактуется как компьютерно-ориентированный.

Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \; Y(t_0) = Y_0. \tag{1}$$

Предполагается, что существует $\delta_0 > 0$, при котором выполнены все условия существования и единственности для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0, \infty)$ и для каждого его возмущения с начальным вектором из окрестности $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta_0$. Предполагается также, что в области $R: \{t_0 \le t < \infty;\, Y(t),\, \forall \tilde{Y}(t): \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta_0\}$

функция $F(t, Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t, компоненты этой функции удовлетворяют неравенству

$$\left| f_k(t,Y) - f_k(t,\widetilde{Y}) \right| \le L \left| y_k - \widetilde{y}_k \right|, \; L = \text{const}, \; \forall t \in [t_0, \infty), \; \forall (t,Y), \; (t,\widetilde{Y}) \in R,$$
$$\forall k \in \overline{1, n}.$$

Ставится задача разработать метод анализа устойчивости решения задачи (1) в смысле Ляпунова [11].

Описание метода. С помощью замены $V(t) = Y(t) - Z(t)$, $Y(t) \in R$, $Z(t)$ – невозмущенное решение, система (1) преобразуется к системе

$$\frac{dV}{dt} = U(t, V), \; V(t_0) = V_0, \tag{2}$$

для которой $U(t, 0) \equiv 0$ [12].

Для системы (2) справедливы следующие утверждения:

1) Производная функций $u_k(t, V(t))$, $u_k(t, \widetilde{V}(t))$, $\forall k \in \overline{1, n}$ ограничена: $\left| u'_k(t, V(t)) \right| \le c_1$, $\left| u'_k(t, \widetilde{V}(t)) \right| \le c_1$, $c_1 = \text{const}$ $\forall t \in [t_0, \infty)$.

2) Выполняется неравенство: $\left| u_k(t,V) - u_k(t,\widetilde{V}) \right| \le L_0 \left| v_k - \widetilde{v}_k \right|$, $L_0 = \text{const}$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, $\forall k \in \overline{1, n}$.

Выполним следующее преобразование системы (2):

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{u_k(t, v_1, \ldots, v_n)}{v_k} v_k, \; k \in \overline{1, n},$$

или, в матричной форме [13]

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \\ \ldots \\ \dfrac{dv_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u_1(t, v_1, \ldots, v_n)}{v_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{u_2(t, v_1, \ldots, v_n)}{v_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{u_n(t, v_1, \ldots, v_n)}{v_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Возмущение нулевого решения системы (3) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге имеет вид:

$$\widetilde{V}_{i+1} = (E + hA(t_i, \widetilde{V}_i))\widetilde{V}_i + \widetilde{Q}_i, \; i = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

где

$$A(t_i, \widetilde{V}_i) = \begin{pmatrix} \dfrac{u_1(t_i, \widetilde{v}_{1i}, \ldots, \widetilde{v}_{ni})}{\widetilde{v}_{1i}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{u_2(t_i, \widetilde{v}_{1i}, \ldots, \widetilde{v}_{ni})}{\widetilde{v}_{2i}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{u_n(t_i, \widetilde{v}_{1i}, \ldots, \widetilde{v}_{ni})}{\widetilde{v}_{ni}} \end{pmatrix},$$

$\left\| \tilde{Q}_i \right\| \le c_1 h^2$. Остаточным членом метода Эйлера на шаге будем считать разность между точным решением и его приближением по методу Эйлера.

Всюду ниже, при любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, h и переменный индекс i предполагаются связанными соотношениями:

$$t = t_{i+1}, \; h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, \; i = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Рекуррентное преобразование (4), влечет выражение для величины возмущения через возмущение начальных данных

$$\tilde{V}_{i+1} = \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}, \tilde{V}_{i-\ell}))\tilde{V}_0 + S_i, \tag{6}$$

где $S_i = \sum_{k=1}^{i} \prod_{\ell=0}^{i-k} (E + hA(t_{i-\ell}, \tilde{V}_{i-\ell}))\tilde{Q}_{k-1} + \tilde{Q}_i$.

Лемма 1. В рассматриваемых условиях имеет место соотношение $\left\| S_i \right\| = O(h)$ [14].

Следствием леммы 1 является равенство

$$\lim_{h \to 0} S_i = \vec{0}. \tag{7}$$

Предельный переход в равенстве (6) при любом t из (5) влечет равенство

$$\tilde{V}(t) = \lim_{h \to 0} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}, \tilde{V}_{i-\ell}))\tilde{V}_0 + \lim_{h \to 0} S_i.$$

Стремление h к нулю равносильно стремлению i к бесконечности. Следовательно, с учётом (7), для любого $t \in [t_0, \infty)$ выполнено:

$$\tilde{V}(t) = \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}, \tilde{V}_{i-\ell}))\tilde{V}_0. \tag{8}$$

На основании (8) следует, что для произвольного t величина возмущения равна бесконечному матричному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. Следовательно, бесконечное матричное произведение определяет величину возмущения.

Теорема 1. Для того чтобы решение задачи (2) было устойчиво, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left\| \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}, \tilde{V}_{i-\ell})) \right\| \le \tilde{c}_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty). \tag{9}$$

Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (9) и выполняется соотношение

$$\left\| \lim_{t \to \infty} \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}, \tilde{V}_{i-\ell})) \right\| \to 0. \tag{10}$$

Критерии (9), (10) позволяют определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости нелинейной системы ОДУ без представления решения в аналитической форме и использования методов качественной теории дифференциальных уравнений [15–17]. Форма выражений под знаком предела позволяет запрограммировать вычисление выражений в виде цикла по числу сомножителей. Это влечет возможность компьютерного анализа устойчивости в режиме реального времени [18].

Для вычисления диагональных элементов матрицы $A(t_i, \tilde{V}_i)$ с более высокой точностью, чем на основе разностных методов, используется метод варьируемого кусочно-полиномиального приближения решения задачи Коши для ОДУ [19, 20]. Приближение решения и правой части (2) на $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{R-1} [a_i, b_i]$ сводится к последовательному приближению на подынтервалах

$$[a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{P-1} [t_j, t_{j+1}], \; P = 2^{k_0}, \; k_0 = \{0, 1, \ldots\}. \tag{11}$$

При каждом $i \geq 1$ полагается $\tilde{v}_k(a_i) = \tilde{v}_{k-1}(b_{i-1})$, $\tilde{v}_k(a_0) = \tilde{v}_0$. На каждом подынтервале из (11) строится кусочно-полиномиальное приближение функции правой части (2). Количество подынтервалов $P = 2^{k_0}$ и степень интерполяционного полинома n_0 выбираются так, чтобы было минимальным значение

$$\delta_{kij}(t) = |\, \psi_{kjn_0}(t) - u_k(t, z_{1j}(t), \ldots, z_{nj}(t)) \,|, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = \overline{0, P-1},$$

$$k \in \overline{1, n},$$

где $\psi_{kjn_0}(t) \approx u_k(t, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$, $z_{kj}(t) = \tilde{v}_{kj} + \int_{t_j}^{t} \psi_{kjn_0}(t)\,dt$ – полином с числовыми коэффициентами, приближающий искомое решение. При этом приближенные значения решений в узлах интерполяции первоначально вычисляются по методу Эйлера.

Коэффициенты кусочно-полиномиальной аппроксимации вычисляются следующим образом. При каждом j подынтервал $[t_j, t_{j+1}]$ из (11) разбивается на n_0 равноотстоящих узлов с шагом h_0:

$$t_{jp} = t_j + p h_0, \; p = \overline{0, n_0}, \; h_0 = \frac{t_{j+1} - t_j}{n_0}. \tag{12}$$

В каждом из узлов (12) вычисляются значения $u_k(t_{jp}, \bar{v}_{1jp}, \ldots, \bar{v}_{njp})$, где $\bar{v}_{kjp}$ определяется по методу Эйлера:

$$\bar{v}_{kjp} = \bar{v}_{kj(p-1)} + h_0 \cdot u_k(t_{j(p-1)}, \bar{v}_{1j(p-1)}, \ldots, \bar{v}_{nj(p-1)}), \quad p = \overline{1, n_0}, \; k \in \overline{1, n}. \tag{13}$$

При этом в качестве $\bar{v}_{j0}$ берется значение на границе справа из окончательного приближения на предыдущем подынтервале: $\bar{v}_{kj0} = \bar{v}_{k(j-1)n_0}$, для начального подынтервала из (11) $\bar{v}_{k00} = \tilde{v}_{k0}$. Значения $u_k(t_{jp}, \bar{v}_{1jp}, \ldots, \bar{v}_{njp})$ принимаются за значения в узлах интерполяции:

$$\varphi_{kjp} = u_k(t_{jp}, \bar{v}_{1jp}, \ldots, \bar{v}_{njp}), \quad p = \overline{0, n_0}, \; k \in \overline{1, n}. \tag{14}$$

Далее $\bar{v}$ будет обозначать вычисляемое приближение точного решения $\tilde{V}$. По условиям интерполяции (14) строится интерполяционный полином Ньютона степени n_0, который приводится к виду [20]:

$$\psi_{k\,j n_0}(t) = a_{k\,j0} + \sum_{\ell=1}^{n_0} a_{k\,j\ell} \left(\frac{t - t_{j0}}{h_0} \right)^{\ell}, \; a_{k\,j0} = \varphi_{k\,j0},$$

$$a_{k\,j\ell} = \sum_{m=\ell}^{n_0} \frac{b_{k\,jm}\, d_{m\ell}}{m!}, \; b_{k\,jm} = \Delta^m \varphi_{k\,j0}. \tag{15}$$

Полином (15) приближает производную решения задачи (2). Приближение самого решения строится как первообразная от (15) с постоянной, принимающей значение $\bar{v}_{k\,j0}$. Семейство первообразных от полинома $\psi_{k\,jn_0}(t)$ на j-м подынтервале имеет вид $\int \psi_{k\,jn_0}(x)dx = C + h\sum\limits_{\ell=0}^{n_0} \frac{a_{k\,j\,\ell}}{\ell+1} x^{\ell+1}$. Фиксирование в правой части значения нижнего предела и замена константы C на $\bar{v}_{k\,j0}$ определяет функцию $z_{k\,j}(t) = \bar{v}_{k\,j0} + \int\limits_{t_{j0}}^{t} \psi_{k\,jn_0}(t)dt$, или

$$z_{k\,j}(t) = \bar{v}_{k\,j0} + h_0 \sum_{\ell=0}^{n_0} \frac{a_{k\,j\ell}}{\ell+1} \left(\frac{t - t_{j0}}{h_0} \right)^{\ell+1}. \tag{16}$$

Полином (16) принимается за приближение решения $\tilde{v}_k(t)$ на j-м подынтервале: $\tilde{v}_k(t) \approx z_{k\,j}(t), \quad t \in [t_j, t_{j+1}]$. Вычисление значений полинома (16) производится по схеме Горнера при $x = \frac{t - t_{j0}}{h_0}$:

$$z_{k\,j}(x) = \bar{v}_{k\,j0} + h\left(\ldots \left(\left(\frac{a_{k\,jn_0}}{n_0+1} x + \frac{a_{k\,j(n_0-1)}}{n_0} \right) x + \frac{a_{k\,j(n_0-2)}}{n_0-1} \right) x + \ldots + a_{k\,j0} \right) x.$$

Значения $\bar{v}_{k\,jp} = z_{k\,j}(t_{jp}), \quad p = \overline{1, n_0}$, из (16) в процессе компьютерной реализации оказываются более точными приближениями решения, чем получаемые непосредственно с помощью разностного метода. Эти значения принимаются за новые уточненные значения в интерполяционных узлах для последующего интерполирования. Данный рекуррентный процесс позволяет существенно уточнить полученные приближения.

В итоге матрица $A(t_i, \tilde{V}_i)$ преобразуется к виду:

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\psi_{1\,jn_0}(t)}{z_{1\,j}(t)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\psi_{2\,jn_0}(t)}{z_{2\,j}(t)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{\psi_{n\,jn_0}(t)}{z_{n\,j}(t)} \end{pmatrix}, \; t \in [t_j, t_{j+1}], \; \forall\, j = \overline{0, P-1}.$$

Выполненная линеаризация позволяет применять методы анализа устойчивости систем линейных ОДУ [7, 9] для исследования системы вида (2).

Если в представленных выше критериях найдётся $i_0 = \text{const}$, такое что для всех $i \ge i_0$ выполнено

$$\left\| \prod_{\ell=0}^{i} (E + h\tilde{A}(t_{i-\ell})) \right\| \le \tilde{c}_2 = \text{const},\ \tilde{c}_2 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \tag{17}$$

то решение задачи (2) устойчиво. Доказательство следует из предельного перехода в неравенстве (17) и из (9).

Критерии устойчивости получены на основе разностных приближений решения системы ОДУ. Следовательно, численное значение бесконечных произведений, составляющих основу критериев, зависит от погрешности разностной схемы. Проблема заключается в замене точного выражения решений из (6) на их разностные приближения по Эйлеру. В предложенных критериях это повлечёт замену точных значений $\tilde{V}_i$, на приближённые $\tilde{V}_{Ei}$, на каждом шаге с номером i. Требуется выяснить, как это отразится на достоверности критериев устойчивости.

По аналогии с (6) получим соотношение, определяющее величину возмущения

$$\tilde{V}_{Ei+1} = \prod_{\ell=0}^{i} (E + h\tilde{A}(t_{i-\ell}))\tilde{V}_0 \,. \tag{18}$$

Разность соотношений (6) и (18) с учетом линеаризации матрицы $A(t_{i-\ell}, \tilde{V}_{i-\ell})$ влечет оценку $\| \tilde{V}_{i+1} - \tilde{V}_{Ei+1} \| = O(h)$. Поэтому практическое применение критериев устойчивости осуществимо на основе метода Эйлера.

При компьютерной реализации не может быть вычислено точное значение бесконечного произведения из левой части критериев. Следовательно, необходимо исследовать влияние на достоверность критериев замены бесконечных произведений произведением начальных сомножителей в произвольно фиксированном количестве.

В [9] установлено, что при любом выборе $T = \text{const}$, $T \in [t_0, \infty)$, для любых $\tilde{V}$ из (2) на промежутке $[t_0, T]$ имеет место равномерная сходимость $P_i \tilde{V}_0 \rightrightarrows \lim\limits_{i\to\infty} P_i \tilde{V}_0 \quad \forall t \in [t_0, T]$, $P_i = \prod_{\ell=0}^{i} (E + h\tilde{A}(t_{i-\ell}))$. При этом сходимость является равномерной как по всем t, так и по всем $\tilde{V}$ из (2) в данных ограничениях. Если, кроме того, $|\tilde{v}_{0(k)}| > \varepsilon_1$, $0 < \varepsilon_1 = \text{const} \quad \forall k = 1, \dots, n$, то для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $i_0 = i_0(T, \tilde{V}_0, \varepsilon)$, такое что $\left\| P_i - \lim\limits_{i\to\infty} P_i \right\| \le \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, T],\ \forall i \ge i_0$. Следовательно, если решение задачи (2) устойчиво, то на любом промежутке $[t_0, T]$ существует $i_0 = i_0(T, \tilde{V}_0, \varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство $\| P_i \| \le \tilde{c}_3$, $\tilde{c}_3 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, T]$, $\forall i \ge i_0$, при этом константа $\tilde{c}_3$ не зависит от выбора T и $\tilde{V}$ при данных ограничениях.

Таким образом, бесконечное произведение сомножителей под знаком предела можно заменить частичным произведением. Это даёт возможность практической программной реализации полученных критериев устойчивости. Компьютерная реализация критериев выполняется с постоянным шагом на фиксированном промежутке. Анализ устойчивости, проводимый на этой основе, приводит к исчерпывающе достоверным оценкам характера устойчивости исследуемых систем [7, 8, 18].

Численный и программный эксперимент. Исследуется на устойчивость система Лоренца

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \sigma(y_2 - y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 y_3 + r y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 y_2 - b y_3. \end{cases} \qquad (19)$$

Необходимо на основе численного эксперимента проверить достоверность анализа устойчивости по предложенному методу. Эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-4460 в среде программирования Delphi.

Система (19) исследуется при начальных условиях $y_{10} = y_{20} = \sqrt{b(r-1)}$, $y_{30} = r - 1$ и значениях параметров $\sigma = 10{,}1$, $r = 24{,}7$, $b = 8/3$.

После преобразования системы (19) к виду (2) получим

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = \sigma\big((v_2 + z_2) - (v_1 + z_1)\big) - \sigma(z_2 - z_1), \\ \dfrac{dv_2}{dt} = -(v_1 + z_1)(v_3 + z_3) + r(v_1 + z_1) - (v_2 + z_2) + z_1 z_3 - r z_1 + z_2, \\ \dfrac{dv_3}{dt} = (v_1 + z_1)(v_2 + z_2) - b(v_3 + z_3) - z_1 z_2 + b z_3. \end{cases}$$

Анализ устойчивости выполняется на основе критерия (17). Исследование проводится на промежутке $[0, 1000]$ с шагом $h = 0.00001$, величина возмущения начальных данных равна 0.00001. На каждом шаге работы программы находится численное значение нормы текущего матричного произведения из (17). На основе этих значений делается вывод о характере устойчивости исследуемой системы. Ограниченное изменение значений нормы соответствует устойчивости, монотонное стремление к нулю характеризует асимптотическую устойчивость, неограниченный рост свидетельствует о неустойчивости.

Таблица 1

Результаты анализа устойчивости системы (19) при значении параметров $\sigma = 10{,}1$, $r = 24{,}7$, $b = 8/3$

t	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
norma	1,36	1,45	1,04	1,15	0,86	0,87	0,75	0,63	0,64	0,47

Значение нормы ограничено константой, что является признаком устойчивости.

Далее выполняется анализ устойчивости системы (19) при значении параметров $\sigma = 10{,}1$, $r = 24$, $b = 8/3$ с неизменными начальными условиями.

Таблица 2

Результаты анализа устойчивости системы (19) при значении параметров

$\sigma = 10{,}1$, $r = 24$, $b = 8/3$

t	100	200	300	400	500
$norma$	1.67×10^{-1}	1.79×10^{-2}	1.86×10^{-3}	1.85×10^{-4}	2.06×10^{-5}
t	600	700	800	900	1000
$norma$	1.92×10^{-6}	2.27×10^{-7}	1.99×10^{-8}	2.48×10^{-9}	2.09×10^{-10}

Монотонное убывание значений нормы по критерию (17) свидетельствует об асимптотической устойчивости.

Ниже выполняется анализ устойчивости системы (19) при значении параметров $\sigma = 10{,}1$, $r = 25{,}2$, $b = 8/3$ с прежними начальными условиями.

Таблица 3

Результаты анализа устойчивости системы (19) при значении параметров

$\sigma = 10{,}1$, $r = 25{,}2$, $b = 8/3$

t	100	200	300	400	500
$norma$	6,71	26	117	396	1.97×10^{3}
t	600	700	800	900	1000
$norma$	6.39×10^{3}	3.15×10^{4}	1.25×10^{5}	1.54×10^{6}	1.87×10^{6}

Монотонный рост значений нормы соответствует неустойчивости. Трактовка характера устойчивости системы (19) при вариации параметров оказалась в полном соответствии с известной. Это свидетельствует о практической пригодности представленного метода. Наряду с данным методом целесообразно применять методы описанные в [21–23]. Эти методы, основанные на построении функций Ляпунова, предполагают аналитическое применение, в отдельных разновидностях допускают компьютерную реализацию [24, 25].

Заключение. Предложен подход к анализу устойчивости систем ОДУ на основе критериев, полученных в результате матричных мультипликативных преобразований разностных схем численного интегрирования. Выполнена линеаризация исходной системы на основе кусочно-полиномиального приближения решения и правой части системы в виде полиномов с числовыми коэффициентами. Форма критериев позволяет реализовать их программно в виде цикла по числу сомножителей. По числовым данным, полученным в ходе компьютерного анализа, однозначно определяется характер устойчивости исследуемых систем. При построении и реализации критериев не используются методы качественной теории дифференциальных уравнений. На основе программного и численного эксперимента в режиме реального времени достоверно определяется характер устойчивости системы Лоренца при заданных начальных условиях и вариации параметров.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мельников Г.И., Мельников В.Г., Дударенко Н.А., Талапов В.В.* Устойчивость движения нелинейных динамических систем при постоянно действующих возмущениях // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2019. – Т. 19, № 2. – С. 216-221.
2. *Миронов В.В., Митрохин Ю.С.* Технологический подход к исследованию устойчивости динамических систем: прикладные вопросы // Вестник РГРТУ. –2017. – № 59. – С. 127-135.
3. *Александров А.Ю., Жабко А.П., Косов А.А.* Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных систем на основе декомпозиции // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1215-1233.

4. *Hammarling S.J.* Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation // IMA J. of Num. Analysis. – 1982. – Vol. 2, Issue 3. – P. 303-323.
5. *Luyckx L., Loccufier M., Noldus E.* Computational methods in nonlinear stability analysis: stability boundary calculations // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – Vol. 168, Issue 12. – P. 289-297.
6. *Giesl P., Hafstein S.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming // J. Difference Equ. Appl. – 2014. – Vol. 20, Issue 4. – P. 610-640.
7. *Буланов С.Г.* Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 9. – С. 542-549.
8. *Ромм Я.Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 107-124.
9. *Ромм Я.Е., Буланов С.Г.* Компьютерный анализ устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений. – Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. пед. ин-та им. А.П. Чехова, 2012. – 148 с.
10. *Ромм Я.Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости решений дифференциальных систем // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 4. – С. 42-63.
11. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 478 с.
12. *Демидович Д.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
13. *Ромм Я.Е., Буланов С.Г.* Численный эксперимент по компьютерному анализу устойчивости линеаризованных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Деп. в ВИНИТИ. – 14.07.2016. – № 102. – 18 с.
14. *Bulanov S.G.* Differential systems stability analysis based on matrix multiplicative criteria // Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. 1479 012103.
15. *Barreau M., Seuret A., Gouaisbaut F., Baudouin L.* Lyapunov stability analysis of a string equation coupled with an ordinary differential system // IEEE Trans. Automatic Control. – 2018. available on HAL.
16. *Baudouin L., Seuret A., Gouaisbaut F.* Lyapunov stability analysis of a linear system coupled to a heat equation // In 20th IFAC World Congress, Toulouse. – 2017. – Vol. 50. – P. 11978-11983.
17. *Feng G.* Stability Analysis of Piecewise Discrete-Time Linear Systems IEEE Trans // Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, Issue 7. – P. 1108-1112.
18. *Ромм Я.Е.* Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20., № 12. – С. 105-118.
19. *Буланов С.Г., Джанунц Г.А.* Программный анализ устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе мультипликативных преобразований разностных схем и кусочно-полиномиальных приближений решения // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2015. – № 2. – С. 10-20.
20. *Джанунц Г.А., Ромм Я.Е.* Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 10. – С. 1641-1660.
21. *Doban A., Lazar M.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear differential equations via a Yoshizawa-type construction // 10th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems NOLCOS: IFAC-PapersOnLine. – 2016. – P. 29-34.
22. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations // J. Appl. Math. Comput. – 2008. – Vol. 202, Issue 1. – P. 44-53.
23. *Xiao-Lin L., Yao-Lin J.* Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems // J. Appl. Math. Comput. – 2009. – Vol. 29, Issue 1-2. – P. 247-262.
24. *Olgac N., Sipahi R.* A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems // Automatica. – 2004. – Vol. 40, Issue 5. – P. 847-853.
25. *Hafstein S.* A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations // Dynamical Systems. – 2005. – Vol. 20. – P. 281-299.

REFERENCES

1. *Mel'nikov G.I., Mel'nikov V.G., Dudarenko N.A., Talapov V.V.* Ustoychivost' dvizheniya nelineynykh dinamicheskikh sistem pri postoyanno deystvuyushchikh vozmushcheniyakh [Stability of nonlinear dynamical system motion under constantly acting perturbations], Nauchno-tekhnicheskiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki [Scientific and technical journal of information technologies, mechanics and optics], 2019, Vol. 19, No. 2, pp. 216-221.
2. *Mironov V.V., Mitrokhin Yu.S.* Tekhnologicheskiy podkhod k issledovaniyu ustoychivosti dinamicheskikh sistem: prikladnye voprosy [Constructive approach to the research of dynamic systems stability: applied problems], *Vestnik RGRTU* [Vestnik of RSREU], 2017, No. 59, pp. 127-135.
3. *Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P., Kosov A.A.* Analiz ustoychivosti i stabilizatsiya nelineynykh sistem na osnove dekompozitsii [Analysis of stability and stabilization of nonlinear systems via decomposition], *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal], 2015, Vol. 56, No. 6, pp. 1215-1233.
4. *Hammarling S.J.* Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation, *IMA J. of Num. Analysis*, 1982, Vol. 2, Issue 3, pp. 303-323.
5. *Luyckx L., Loccufier M., Noldus E.* Computational methods in nonlinear stability analysis: stability boundary calculations, *J. Comput. Appl. Math*., 2004, Vol. 168, Issue 12. pp. 289-297.
6. *Giesl P., Hafstein S.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming, *J. Difference Equ. Appl*., 2014, Vol. 20, Issue 4, pp. 610-640.
7. *Bulanov S.G.* Analiz ustoychivosti sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy na osnove preobrazovaniya raznostnykh skhem [Stability analysis of systems of linear differential equations based on transformation of difference schemes], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie], 2019, Vol. 20, No. 9, pp. 542-549.
8. *Romm Ya.E.* Komp'yuterno-orientirovannyy analiz ustoychivosti na osnove rekurrentnykh preobrazovaniy raznostnykh resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Computer-oriented stability analysis based on recurrent transformation of difference solutions of ordinary differential equations], *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis], 2015, Vol. 51, No. 3, pp. 107-124.
9. *Romm Ya.E., Bulanov S.G.* Komp'yuternyy analiz ustoychivosti po Lyapunovu sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy [Computer analysis of Lyapunov stability for systems of linear differential equations]. Taganrog: Izd-vo Taganrog. gos. ped. in-ta im. A.P. Chekhova, 2012, 148 p.
10. *Romm Ya.E.* Komp'yuterno-orientirovannyy analiz ustoychivosti resheniy differentsial'nykh sistem [Computer-oriented stability analysis of solutions of differential systems], *Sovremennye naukoemkie tekhnologii* [Modern high technologies], 2020, No. 4, pp. 42-63.
11. *Chezari L.* Asimptoticheskoe povedenie i ustoychivost' resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations]. Moscow: Mir, 1964, 478 p.
12. *Demidovich D.P.* Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on Mathematical Theory of Stability]. Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
13. *Romm Ya.E., Bulanov S.G.* Chislennyy eksperiment po komp'yuternomu analizu ustoychivosti linearizovannykh sistem nelineynykh differentsial'nykh uravneniy [Numerical experiment on computer analysis of stability of linearized systems of nonlinear differential equations], *Dep. v VINITI* [Dep. in VINITI], 14.07.2016, No. 102, 18 p.
14. *Bulanov S.G.* Differential systems stability analysis based on matrix multiplicative criteria, *Journal of Physics: Conf. Series*, 2020,1479 012103.
15. *Barreau M., Seuret A., Gouaisbaut F., Baudouin L.* Lyapunov stability analysis of a string equation coupled with an ordinary differential system, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2018. available on HAL.
16. *Baudouin L., Seuret A., Gouaisbaut F.* Lyapunov stability analysis of a linear system coupled to a heat equation, *In 20th IFAC World Congress, Toulouse*, 2017, Vol. 50, pp. 11978-11983.
17. *Feng G.* Stability Analysis of Piecewise Discrete-Time Linear Systems IEEE Trans, *Automatic Control*, 2002, Vol. 47, Issue 7, pp. 1108-1112.
18. *Romm Ya.E.* Modelirovanie ustoychivosti po Lyapunovu na osnove preobrazovaniy raznostnykh skhem resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Modeling of stability according to Lyapunov based on difference schemes transformations for solutions of ordinary differential equations], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Modeling], 2008, Vol. 20, No. 12, pp. 105-118.

19. *Bulanov S.G., Dzhanunts G.A.* Programmnyy analiz ustoychivosti sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy na osnove mul'tiplikativnykh preobrazovaniy raznostnykh skhem i kusochno-polinomial'nykh priblizheniy resheniya [Program analysis of stability of ordinary differential equations systems on the basis of multiplicative transformations of difference schemes and piecewise polynomial approximations of the solution], *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial Automatic Control Systems and Controllers], 2015, No. 2, pp. 10-20.
20. *Dzhanunts G.A., Romm Ya.E.* Var'iruemoe kusochno-interpolyatsionnoe reshenie zadachi Koshi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s iteratsionnym utochneniem [The varying piecewise interpolation solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations with iterative refinement], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal], 2017, Vol. 57, No. 10, pp. 1641-1660.
21. *Doban A., Lazar M.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear differential equations via a Yoshizawa-type construction, *10th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems NOLCOS: IFAC-PapersOnLine,* 2016, pp. 29-34.
22. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations, *J. Appl. Math. Comput*., 2008, Vol. 202, Issue 1, pp. 44-53.
23. *Xiao-Lin L., Yao-Lin J.* Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems, *J. Appl. Math. Comput*., 2009, Vol. 29, Issue 1-2, pp. 247-262.
24. *Olgac N., Sipahi R.* A practical method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems, *Automatica,* 2004, Vol. 40, Issue 5, pp. 847-853.
25. *Hafstein S.* A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations, *Dynamical Systems,* 2005, Vol. 20, pp. 281-299.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.И. Витиска.

Буланов Сергей Георгиевич – Ростовский государственный экономический университет; e-mail: bulanovtgpi@mail.ru; 347936, г. Таганрог, Инициативная,48; тел.: 89094369543; доцент.

Bulanov Sergei Georgievich – Rostov State University of Economics; e-mail: bulanovtgpi@mail.ru; 48, Initsiativnaya street, Taganrog, 347936, Russia; phone: 89094369543; associate professor.

УДК 004.4:91 DOI 10.18522/2311-3103-2020-6-99-108

М.Ю. Поленов, Д.А. Иванов

МОДИФИЦИРОВАННАЯ РАСПРЕДЕЛЕННАЯ АРХИТЕКТУРА ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ*

Предложена модифицированная распределенная архитектура обработки данных на основе модели клиент-сервер, как один из вариантов реализации программного приложения геоинформационной системы. Проведенный обзор существующих геоинформационных систем и их классификация с точки зрения архитектуры продемонстрировали перспективность применения распределенной архитектуры. Однако, системы, разработанные на основе традиционной распределенной архитектуры, сталкиваются с проблемами отображения обработанных трехмерных данных в реальном времени на вычислительных устройствах с низкой производительностью. В связи с этим целью данной работы является разработка и исследование модифицированной архитектуры геоинформационных систем, позволяющей снизить требования к вычислительным устройствам клиентов. Актуальность темы исследования заключается в том, что в настоящее время существуют устройства способные поддержать работу только тонких клиентов, которые зачастую имеют малый функционал и не способны решать тяжелые вычислительные задачи. В статье рассмотрены особенности структурной и программной реализации геоинформа-

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-07-00559.