Яворчук Кирилл Сергеевич – e-mail: kyavorchuk@sfedu.ru; аспирант.

Belyakov Stanislav Leonidovich – Southern Federal University; e-mail: beliacov@yandex.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371695; the department of information and analytical security system; professor.

Belyakova Marina Leontievna – e-mail: mlbeliacova@sfedu.ru; associate professor.

Zubkov Sergey Alexandrovich – e-mail: szubkov@sfedu.ru; senior researcher.

Golova Nikita Alexandrovich – e-mail: ngolova@sfedu.ru; graduate student.

Yavorchuk Kirill Sergeevich – e-mail: kyavorchuk@sfedu.ru; graduate student.

УДК 004.932.2 DOI 10.18522/2311-3103-2020-5-171-184

А.Н. Каркищенко, В.Б. Мнухин

О ВЛИЯНИИ ЗАШУМЛЕНИЯ НА РАСПОЗНАВАНИЕ СИММЕТРИИ 3-ГО ПОРЯДКА В ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ*

Излагается алгебраический подход к представлению и обработке цифровых изображений, заданных на гексагональных решетках. Описанный подход основан на представлении изображений как функций на конечных полях «целых Эйзенштейна». Как оказывается, элементы таких полей естественно соответствуют пикселям гексагональных изображений определенных размеров. Описаны экспоненциальное и логарифмическое преобразования в полях Эйзенштейна. Приведен метод обнаружения центров вращательной симметрии 3-го порядка на полутоновых изображениях и введена соответствующая нормированная мера симметрии. Основной целью работы является исследование влияния зашумления на изображении на качество оценки симметрии с помощью введенной меры. Фактор зашумленности необходимо принимать во внимание, поскольку уменьшение меры может быть вызвано не только неполной симметрией реального объекта, но и искажениями из-за шумов, что практически всегда имеет место. Очевидно, что это отличие будет пропорционально уровню шумовой составляющей. В работе получены аналитические оценки влияния шума на критерий обнаружения симметрии. Если изображения подвержены случайному зашумлению, то мера симметрии отдельных областей изображения будет случайной величиной, закон распределения которой определяется законами распределения шумовых составляющих. При этом в работе делается стандартное для обработки изображений предположение о модели нормальной и независимой зашумленности функции яркости. Особенность введенной меры симметрии третьего порядка не позволяет напрямую применить стандартные методы для получения вероятностных оценок. С этой целью была проведена оценка кумулятивной функции распределения вероятностей, на основании которой получено выражение для вероятностей уклонения меры симметрии от истинного значения на заданную величину. В силу сделанных априорных предположений полученную оценку следует рассматривать как достаточно «осторожную» и можно ожидать, что в реальности разброс меры, вызванный шумами на изображении, будет существенно меньше, чем теоретически установленные границы.

Симметрия 3-го порядка; гексагональное изображение; числа Эйзенштейна; конечные поля; полярно-логарифмические координаты; полярное представление; нормальное зашумление; распределение меры симметрии.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-07-00873.

A.N. Karkishchenko, V.B. Mnukhin

ON THE INFLUENCE OF NOISE ON THE RECOGNITION OF THREEFOLD ROTATIONAL SYMMETRY IN HEXAGONAL IMAGES

The article presents an algebraic approach to the representation and processing of digital images defined on hexagonal lattices. The described approach is based on the representation of images as functions on finite fields of "Eisenstein's integers". As it turns out, the elements of such fields naturally correspond to the pixels of hexagonal images of certain sizes. The exponential and logarithmic transformations in the Eisenstein fields are described. A method for detecting the centers of threefold rotational symmetry in grayscale images is presented and the corresponding normalized measure of symmetry is introduced. The main purpose of the work is to study the effect of noise on the image on the quality of the symmetry assessment using the introduced measure. The noise factor must be taken into account, since a decrease in the measure can be caused not only by the incomplete symmetry of the real object, but also by distortions due to noise, which is almost always the case. Obviously, this difference will be proportional to the level of the noise component. Analytical estimates of the effect of noise on the criterion for detecting symmetry are obtained in this work. If images are subject to random noise, then the measure of symmetry of local image areas will be a random variable, the distribution law of which is determined by the distribution laws of noise components. At the same time, the standard for image processing assumption is made in the work about the model of normal and independent noise level of the brightness function. The peculiarity of the introduced threefold rotational symmetry measure does not allow directly applying standard methods to obtain probabilistic estimates. For this purpose, an assessment of the cumulative probability distribution function was carried out, on the basis of which an expression was obtained for the probabilities of deviation of the symmetry measure from the true value by a given value. By virtue of the a priori assumptions made, the obtained estimate should be considered as rather "cautious" and it can be expected that in reality the spread of the measure caused by noise in the image will be significantly less than the theoretically established boundaries.

Threefold symmetry; hexagonal image; Eisenstein numbers; finite fields; log-polar coordinates; polar representation; normal noise; symmetry measure distribution.

Введение. Симметрия объектов играет решающую роль в визуальном восприятии, дизайне и проектировании. Поэтому обнаружение и анализ симметрии – важная задача в таких областях как машинное зрение, медицинская визуализация, классификация паттернов и др. [1, 2].

При исследовании симметрии на изображениях необходимо принимать во внимание различие между непрерывным и дискретным случаями. Действительно, непрерывный объект может характеризоваться группой симметрии, инвариантной к вращению, масштабированию и трансляционным преобразованиям. В то же время в отношении цифровых изображений можно говорить только о некоторой мере симметрии, которая зависит от поворотов и масштабирования. Для уменьшения искажений изображения при преобразованиях можно использовать гексагональную пиксельную решетку, которая имеет ряд преимуществ перед квадратной решеткой. Они заключаются в следующем [3]:

- ♦ *Изопериметрия*. Шестиугольник имеет наибольшую площадь среди всех правильных многоугольников равного периметра, заполняющих плоскость
- ♦ *Дополнительные равноудаленные соседи*. Каждый шестиугольный пиксель имеет шесть равноудаленных соседей с общим краем в отличие от квадратного пикселя, который имеет только четыре. Это означает, что кривые лучше представляются на гексагональной решетке.
- ♦ *Дополнительные оси симметрии*. Каждый шестиугольник в решетке имеет 6 осей симметрии, в то время как в квадрате их всего четыре. Это означает, что на гексагональных решетках будет меньше неоднозначности при обнаружении симметрии изображений.

В целом гексагональная структура обеспечивает более гибкий и эффективный способ выполнять преобразование и поворот изображения без потери информации об изображении [4].

Несмотря на отсутствие аппаратных средств для формирования и отображения гексагональных изображений, в настоящее время проводятся значительные исследования в области обработки изображений на таких структурах [3]. Для этого используется программное преобразование изображений на квадратной решетке в соответствующее изображение на гексагональной решетке. Более того, гибридные системы, включающие оба типа представления, полезны также для использования преимуществ каждого из них.

При разработке алгоритмов анализа изображения, как на квадратной, так и на гексагональной шестиугольной решетках часто исходят из предположения непрерывности изображений. Это позволяет эффективно применять инструменты непрерывной математики. Однако применение этих методов к цифровым изображениям часто приводят к систематическим ошибкам, связанным с невозможностью адекватно перенести некоторые понятия непрерывной математики на дискретную плоскость. В качестве примеров можно указать такие понятия, как вращение в плоскости и полярная система координат. Будучи естественными и элементарными в непрерывном случае они теряют эти качества, когда их пытаются точно определить на дискретной плоскости. В результате формальное применение непрерывных методов к цифровым изображениям может быть осложнено систематическими ошибками [5, 6]. Это обстоятельство приводит к необходимости разрабатывать методы, изначально ориентированные на дискретные изображения.

В работе [7] авторов данной статьи рассматривался один из таких методов, основанный на определении гексагональных изображений как функций на «полях целых Эйзенштейна». Значимость такого подхода основано на том, что конечные поля чисел Эйзенштейна наследуют некоторые свойства непрерывного комплексного поля. В частности, понятия комплексных логарифма и экспоненты может быть перенесено на поля чисел Эйзенштейна. Это позволяет ввести дискретные «полярно-логарифмические» координаты в гексагональных изображениях. Соответствующее представление гексагональных изображений можно использовать для анализа их симметрии подобно тому, как это было сделано для непрерывных изображений [2, 5, 6, 8] и для цифровых изображений на квадратных решетках [9–12].

Несмотря на многочисленные исследования в области обнаружения симметрии (например, [1, 2, 5]) и в области обработки гексагональных изображений, лишь немногие из них (если таковые вообще имеются) посвящены распознаванию симметрии гексагональных изображений. В частности, в [13] предложена 3-х координатная схема, которая использует неявную симметрию гексагональной решетки. В этой же работе представлена серия геометрических преобразований, таких как масштабирование, вращение и сдвиг в соответствующей 3-координатной системе ([3, с. 20]), но симметрия гексагональных изображений не исследована [4].

Следует отметить, что известен ряд работ по приложениям алгебраических структур и теоретико-числовых преобразований при обработке изображений; такие методы разрабатываются уже около 40 лет [14] и получили обширную теоретическую и экспериментальную проработку [15, 16]. В частности, в 1993 г. в работе [17] предложено кольцо гауссовских целых чисел для обработки изображений на квадратных решетках; позже активно применяли «конечные комплексные поля» [10–12, 18, 19]. Тем не менее, применение «конечных полей целых Эйзенштейна» к анализу изображений на гексагональных решетках представляется новым.

В упомянутой выше работе [7] был рассмотрен случай обнаружения вращательной симметрии третьего порядка, который имеет важные практические приложения. Как оказывается, распознавание симметрии 3-го порядка в настоящее время востребовано в различных областях кристаллографии [20, 21], вирусологии [22], анализе изображений, полученных с электронного микроскопа [23], и т.п. Предложенный алгоритм оптимизирован для работы с гексагональными изображениями, но может быть использован и для обычных изображений на квадратных решетках после ресэмплинга (передискретизации). Однако, несмотря на наличие явной формулы, позволяющей установить наличие или отсутствие симметрии на изображении, в указанной работе, как и во многих аналогичных публикациях, предполагается, что функция изображения задана точно, что почти никогда не имеет место при анализе реальных изображений. Это обстоятельство, безусловно, влияет на получаемые результаты. Поэтому возникает вопрос о качестве определения симметрии при наличии шума. В тех случаях, когда анализ погрешностей проводится, обычно прибегают к статистическим оценкам на основе экспериментальных исследований. Понятно, что данный подход не позволяет получить обоснованные теоретические оценки при всевозможных значениях параметров, описывающих как изображение, так и саму процедуру распознавания.

В данной статье, которую можно рассматривать как продолжение работы [7], для удобства чтения дается краткое описание изложенного в ней подхода к описанию гексагональных изображений. Затем проводится теоретический анализ, и даются соответствующие аналитические оценки влияния зашумления функции, задающей цифровое изображение, на критерий, определяющий наличие или отсутствие тройной вращательной симметрии.

Конечные поля целых чисел Эйзенштейна. Приведем вначале краткое описание подхода к формализации гексагональных изображений и его применение к обнаружению вращательной симметрии. Более подробное изложение можно найти в работе авторов [7].

Пусть $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, а $\mathbb{C}$ – комплексное поле. Обозначим $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — кольцо классов вычетов по модулю целого $n \ge 2$, и пусть $\mathbb{GF}(p^m)$ – поле Галуа с p^m элементами, где p – простое число, а $m > 0$ – целое число.

В теории чисел [24, гл. 1.4] гауссовское целое число — это комплексное число $z = a + bi \in \mathbb{C}$, действительная и мнимая части которого являются целыми числами. Целые числа Эйзенштейна – это комплексные числа вида $z = a + b\omega$, где также $a, b \in \mathbb{Z}$ и $\omega = \exp(2\pi i/3) \in \mathbb{C}$ – примитивный кубический корень из единицы, так что $\omega^3 = 1$ и $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Заметим, что в комплексной плоскости целые числа Эйзенштейна образуют треугольную решетку, в отличие от целых чисел Гаусса, которые образуют квадратную решетку.

Целые числа Гаусса и Эйзенштейна с обычным сложением и умножением комплексных чисел, образуют, соответственно, подкольца $\mathbb{Z}[i]$ и $\mathbb{Z}[\omega]$ в поле $\mathbb{C}$. К сожалению, отсутствие деления в этих кольцах существенно ограничивает его применимость к задачам обработки изображений [17]. Поэтому естественно искать конечные поля, свойства которых были бы в некотором отношении аналогичны свойствам $\mathbb{Z}[i]$ и $\mathbb{Z}[\omega]$. Известно, что если p – такое простое число, что $p \equiv 3 \bmod 4$, тогда факторкольцо $\mathbb{C}(p) = \mathbb{Z}_p[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{GF}(p^2)$ является «конечным комплексным полем». Его приложения для анализа и обработки цифровых изображений на квадратной решетке рассмотрено в [10–12, 18, 19].

Аналогичный подход использован для построения «конечных полей целых чисел Эйзенштейна». А именно, можно показать, что если число $p=12k+5$ является простым, то многочлен x^2+x+1 неприводим над $\mathbb{Z}_p$, но x^2+1 таковым не является. Из этого вытекает следующее определение.

Определение 1. *Пусть* $p \geq 5$ *такое простое число, что* $p \equiv 5 \bmod 12$. *Тогда конечное поле* $\mathbb{E}(p)=\mathbb{Z}_p[x]/(x^2+x+1) \cong \mathbb{GF}(p^2)$ *называется* полем чисел Эйзенштейна. *Элементы* $\mathbb{E}(p)$ *называются* дискретными числами Эйзенштейна.

Таким образом, поля Эйзенштейна имеют p^2 элементов, где p = 5, 17, 29, 41, 53, 89, 101, 113, 137, 149, 173, 197, 233, 257,… В частности, имеется 44 поля $\mathbb{E}(p)$ для $5 \leq p < 1000$. Элементы поля чисел Эйзенштейна имеют вид $z=a+b\omega$, где $a,b \in \mathbb{Z}_p$ и ω обозначает класс вычетов, так что $x^2+x+1=0$. Сложение определяется стандартно, а произведение задается выражением

$$\left(a+b\omega\right)\left(c+d\omega\right)=(ac-bd)+(bc+ad-bd)\omega\,,$$

В этом случае деление в $\mathbb{E}(p)$ корректно определено.

Полярные разложения полей Эйзенштейна. Аналогия между полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{E}(p)$ позволяет ввести представление элементов из $\mathbb{E}(p)$ в «экспоненциальной форме». Для этого напомним алгебраический метод введения полярно-логарифмической системы координат на непрерывной комплексной плоскости. Пусть $\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа комплексных чисел и $\mathbb{R}=\langle\mathbb{R},+\rangle$ — аддитивная группа вещественных чисел. Соответствие

$$0 \neq z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta} \leftrightarrow (l,\theta),\ \text{где } l=\ln r \in \mathbb{R} \text{ и } 0 \leq \theta < 2\pi,$$

между ненулевыми комплексными числами z и их полярно-логарифмическими координатами (l,θ) можно рассматривать как изоморфизм

$$\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}). \tag{1}$$

Перенесем эту конструкцию на $\mathbb{E}(p)$. Для этого заметим, что поскольку $\mathbb{E}(p)$ — конечное поле, его мультипликативная группа $\mathbb{E}^*(p)=\mathbb{E}(p)\setminus\{0\}$ циклическая [25, п. 314] и порождается некоторым примитивным элементом g. Например, легко проверить, что $g=1+3\omega$ является примитивным в $\mathbb{E}^*(p)$ при $p=5,17,89,101,257$ и $g=1+5\omega$ – примитивный при $p=29,53,113,233$ и т.д.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого* $p=12k+5$ *числа* $m=2(p-1)=8(3k+1)$ *и* $n=(p+1)/2=3(2k+1)$ *взаимно просты.*

Поскольку $mn=p^2-1=\left|\mathbb{E}^*(p)\right|$, то для $\mathbb{E}^*(p)$ справедлив [25, с. 163] следующий аналог разложения (1).

Теорема 1. *Для любого конечного поля чисел Эйзенштейна* $\mathbb{E}(p)$ *его мультипликативная группа разлагается в прямое произведение циклических групп порядков* $m=2(p-1)$ *и* $n=(p+1)/2$,

$$\mathbb{E}^*(p)=\langle g\rangle=\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n\,.$$

Данное выражение называется *полярным разложением* $\mathbb{E}(p)$.

Полярное разложение позволяет перенести на $\mathbb{E}(p)$ понятие комплексного логарифма. Для этого зафиксируем произвольный примитивный элемент g и определим отображение $\mathrm{Exp}_g : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{E}^*(p)$ следующим образом:

$$\mathrm{Exp}_g(l,\theta) = g^{nl+m\theta} = z \in \mathbb{E}^*(p), \text{ где } (l,\theta) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n .$$

Exp_g является изоморфизмом между аддитивной группой кольца $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ и мультипликативной группой поля чисел Эйзенштейна $\mathbb{E}(p)$.

Определение 2. *Отображение* $\mathrm{Exp}_g : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{E}^*(p)$ *называется* модулярной экспонентой *по основанию* g, *а обратное к нему отображение* $\mathrm{Ln}_g : \mathbb{E}^*(p) \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ – модулярный логарифм *по основанию* g. *Его область определения* $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ *называется* полярной областью.

Заметим, что значение $\mathrm{Ln}_g(0)$ не определено, а чтобы вычислить $(l,\theta) = \mathrm{Ln}_g(z)$ для любого $z = g^s \in \mathbb{E}^*(p)$ необходимо решить диофантово уравнение $nx + my = s$ и положить

$$(l,\theta) = (x \bmod m,\ y \bmod n) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n .$$

Например, пусть $g = 1 + 3\omega \in \mathbb{E}^*(5)$ и $z = g^2 = 2 + 2\omega$. Тогда $s = 2$, $m = 8$, $n = 3$ и уравнение $3x + 8y = 2$ имеет очевидное решение $x = -2$, $y = 1$. Следовательно, $\mathrm{Ln}_g(2+2\omega) = (-2 \bmod 8, 1 \bmod 3) = (6,1) \in \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$. Заметим, что в зависимости от g либо $\mathrm{Ln}_g(\omega) = (0, n/3)$, либо $\mathrm{Ln}_g(\omega) = (0, 2n/3)$.

Пару $(l,\theta) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ можно рассматривать как «полярно-логарифмические координаты» соответствующего дискретного числа Эйзенштейна z.

Гексагональные изображения как функции на полях Эйзенштейна. Пусть $\mathbb{E}(p)$ – произвольное поле целых Эйзенштейна характеристики $p = 12k + 5$, и пусть $f(z): \mathbb{E}(p) \to \mathbb{R}$ – любая вещественнозначная функция на $\mathbb{E}(p)$. Функцию $f(z)$ будем называть *гексагональным полутоновым изображением размера* $p \times p$, или просто *гексагональным изображением*.

Другой способ описания гексагональных изображений основан на введенном полярном разложении. А именно, $p \times p$ — гексагональному изображению $f(z)$ можно сопоставить изображение на квадратной решетке размера $m \times n$. Для этого зафиксируем произвольный примитивный элемент $g \in \mathbb{E}^*(p)$ и определим функцию $\psi : Z_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\psi\left(\mathrm{Ln}_g(z)\right) = f(z),\ 0 \neq z \in \mathbb{E}^*(p).$$

Определение 3. *Преобразование* $\mathcal{P}_g[f] = \psi$ *называется* полярно-логарифмическим преобразованием по основанию g *гексагонального изображения* f *или просто его* полярным преобразованием $\mathcal{P}$. *Изображение* ψ *называется* полярной формой f.

Полярную форму f можно рассматривать как расположение всех ее пикселей, кроме $f(0,0)$, в виде $(m \times n)$-матрицы. Таким образом, изображение f «почти» восстанавливается своей полярной формой ψ. Чтобы достичь полной восстанавливаемости, необходимо формально расширить полярную область с помощью дополнительного элемента ∞, полагая, что $\psi(\infty) = f(0,0)$. Заметим, что в такой расширенной полярной области $Z_m \times \mathbb{Z}_n \cup \{\infty\}$ полярное преобразование $\mathcal{P}$ становится обратимым. Линейность $\mathcal{P}$ очевидна.

Следующее утверждение показывает, что преобразование $\mathcal{P}$ можно рассматривать как дискретный аналог перехода к полярно-логарифмической системе координат.

Утверждение 1. *Если* $\mathcal{P}_g[f(z)] = \psi(l,\theta)$, *то* $\mathcal{P}[f(wz)] = \psi(l - l_0, \theta - \theta_0)$, *где* $0 \neq z \in \mathbb{E}(p)$ *и* $\mathrm{Ln}(w) = (l_0, \theta_0)$.

Данное соотношение можно применить к анализу симметрии в гексагональном изображении. Как известно, непрерывный объект обладает r-кратной вращательной симметрией относительно точки C, если поворот вокруг C на угол $2\pi/r$ не меняет объект. К сожалению, это определение не работает для цифровых изображений, поскольку цифровое вращение определить значительно труднее (см., например, [26, стр. 377] для квадратных изображений и [4, 13], [3, с. 97] для гексагональных изображений). В результате для цифровых изображений можно говорить лишь о некоторой *степени симметрии*, которая зависит от поворотов и масштабирования. Вместе с тем для гексагональных изображений на полях Эйзенштейна понятие симметрии 3-го порядка вводится следующим образом.

Определение 4. *Гексагональное изображение* f *имеет центральную симметрию третьего порядка в том и только том случае, если* $f(\omega z) = f(z)$.

Пусть $\psi = \mathcal{P}[f]$ – полярная форма гексагонального $p \times p$ изображения f. Её можно рассматривать как $(m \times n)$-матрицу, где $n = 3(2k+1)$, $m = 8(3k+1)$ и $k = (p-5)/12 \in \mathbb{Z}$. Поскольку n кратно 3, разложим ψ на три блока ψ_1, ψ_2 и ψ_3 равного размера $m \times n/3$. Тогда из предыдущего определения вытекает

Утверждение 2. *Изображение* f *обладает центральной симметрией 3-го порядка тогда и только тогда, когда его полярную форму* ψ *можно разложить на три равных блока* $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [7].

Очевидно, что на реальных изображениях можно ожидать только приблизительных равенств $\psi_1 \simeq \psi_2 \simeq \psi_3$, так что возникает задача выбора подходящей меры симметрии $\mu(f)$ для изображения f. Один из возможных способов введения такой меры состоит в следующем. Для любой нормированной матрицы полярных форм $\tilde{\psi} = \psi / \max\{\psi\}$ изображения f положим

$$\kappa(f) = \exp\left(-\alpha x^{\beta}\right), \text{ где } x = \max\left\{\|\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2\|, \|\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3\|, \|\tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_1\|\right\}. \quad (2)$$

Здесь $\|\bullet\|$ обозначает любую матричную норму, под которой можно понимать, в частности, норму Фробениуса, а α, β – неотрицательные действительные числа, точные значения которых могут варьироваться в зависимости от решаемой практической проблемы. Таким образом, $\kappa(f)$ «оценивает» степень симметричности 3-го порядка изображения f в предположении, что центр симметрии совпадает с центром изображения.

Вместе с любым из методов скользящего окна представленный подход может использоваться для обнаружения центров локальной тройной симметрии на изображениях. Следует заметить, что для фиксированного p полярное преобразование основано на предварительных вычислениях и не требует дополнительных текущих вычислительных затрат.

Оценка влияния шума на меру симметрии. Как было отмечено выше, точное значение меры симметрии может быть получено по формуле (2) лишь в идеальном случае, когда на изображении отсутствуют шумы. Фактор зашумленности необходимо принимать во внимание, поскольку отличие от единицы меры симметрии $\kappa(f)$ может быть вызвано не только неполной симметрией реального объекта, но и искажениями из-за шумов на изображении. Очевидно, что это отличие будет пропорционально уровню шумовой составляющей. Для аналитической характеристики уклонения меры симметрии от истинного значения, обусловленного зашумлениями, необходимо задаться моделью шума и получить оценку распределения вероятностей величины $x = \max\left\{\|\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2\|, \|\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3\|, \|\tilde{\psi}_3 - \tilde{\psi}_1\|\right\}$.

Далее для определенности под нормой матрицы будем понимать норму Фробениуса, поэтому нормы матриц в формуле (2) можно рассматривать как эвклидовы нормы соответствующих векторов, составленных из столбцов этих матриц. Будем считать, что матрице ψ_i соответствует построенный указанным образом вектор ε_i. Поскольку каждая матрица ψ_i имеет размер $m \times n/3$, то соответствующий ей вектор ε_i будет иметь размер $N = mn/3$.

В дальнейшем потребуется следующее простое утверждение.

Утверждение 3. *Пусть* $a,b,c \in R^n$ *, причем* $a+b+c=0$ *. Тогда*

$$\max\left(\|a\|,\|b\|,\|c\|\right) \le \max\left(\|a-b\|,\|c\|\right),$$

где $\|\bullet\|$ *– эвклидова норма.*

Доказательство. Применяя неравенство треугольника, запишем очевидные соотношения:

$$2\|a\| = \|(a+b)+(a-b)\| \le \|a+b\| + \|a-b\|, \quad 2\|b\| = \|(a+b)+(b-a)\| \le \|a+b\| + \|a-b\|.$$

Отсюда следует, что $\max\left\{\|a\|,\|b\|\right\} \le \max\left\{\|a+b\|,\|a-b\|\right\}$. Учитывая, что $a+b=-c$, получаем: $\max\left\{\|a\|,\|b\|\right\} \le \max\left\{\|c\|,\|a-b\|\right\}$. Остается только заметить, что добавление под знаком максимума в левой части неравенства величины $\|c\|$ не может нарушить полученное нестрогое неравенство. ■

В качестве наиболее естественного допущения примем предположение о нормальном характере зашумления. А именно, пусть в каждом пикселе z функция изображения $f(z)$ представляет собой результат независимого аддитивного нормально распределенного зашумления точного значения $f_0(z)$, т.е. $f(z) = f_0(z) + \xi$, где ξ – случайная величина, распределенная по нормальному закону $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Единственной характеристикой, которую требуется оценить при описании зашумления, является среднеквадратическое отклонение. Этот вопрос здесь не обсуждается, поскольку этот параметр определяется используемым оборудованием, условиями и расстоянием до объекта съемки и пр.

В дальнейшем I_k будет обозначать единичную матрицу размера $k \times k$.

Утверждение 4. *Пусть* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in R^N$ и $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 I_N\right)$, $i = 1, 2, 3$. *Тогда, если* $x = \max\left(\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|, \|\varepsilon_2 - \varepsilon_3\|, \|\varepsilon_3 - \varepsilon_1\|\right)$, *то для любого* $\delta > 0$

$$P(x < \delta) \geq \Phi\left(\frac{\delta^2 - 6N\sigma^2}{6\sqrt{2N}\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{\delta^2 - 2N\sigma^2}{2\sqrt{2N}\sigma^2}\right),$$

где $\Phi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Доказательство. Рассмотрим блочный вектор $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, составленный из векторов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Очевидно, что вектор ε имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M[\varepsilon] = 0$ и ковариационной матрицей $K_\varepsilon = \sigma^2 I_{3N}$.

Заметим, что векторы $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ линейно зависимы, поскольку их сумма равна нулевому вектору, поэтому вектор $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$ является неслучайной функцией векторов $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$, и его распределение полностью определяется распределением векторов $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$.

Для определения распределения векторов $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ рассмотрим блочный вектор $\mu = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ и заметим, что ε и μ связаны очевидной линейной зависимостью $\mu = \begin{pmatrix} I_N & -I_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_N & -I_N \end{pmatrix} \varepsilon = C\varepsilon$. Случайный вектор μ также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M[\mu] = \mathbf{0}$ с ковариационной матрицей

$$K_\mu = M\left[\mu\mu^T\right] = M\left[C\varepsilon\varepsilon^T C^T\right] = CM\left[\varepsilon\varepsilon^T\right]C^T = CK_\varepsilon C^T = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2I_N & -I_N \\ -I_N & 2I_N \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание и ковариационная матрица полностью описывают распределение вектора μ в R^{2N}. Полученное выражение для ковариационной матрицы говорит о коррелированности компонент вектора μ. Наиболее простое описание этого распределения можно получить, если перейти к статистически независимым случайным величинам, т.е. перейти к ортонормированному базису в R^{2N}, в котором ковариационная матрица новых случайных величин будет единичной. В качестве такого преобразования можно взять преобразование $\nu = \left(T\sqrt{\Lambda}\right)^{-1}\mu$, где $\sqrt{\Lambda} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_{2N}}\right)$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2N}$ — собственные значения матрицы K_μ, а T — матрица, столбцами которой являются ортонормированные собственные векторы, отвечающие соответственно собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2N}$. Поскольку матрица K_μ является положительно определенной, то матрица $\sqrt{\Lambda}$ определена корректно. Действительно, учитывая, что $T^{-1} = T^T$ и $\left(\sqrt{\Lambda}\right)^{-1} = \sqrt{\Lambda^{-1}}$, получаем:

$$K_\nu = M\left[\nu\nu^T\right] = M\left[\sqrt{\Lambda^{-1}}T^T\mu\mu^T T\sqrt{\Lambda^{-1}}\right] = \sqrt{\Lambda^{-1}}T^T M\left[\mu\mu^T\right]T\sqrt{\Lambda^{-1}} = I_{2N}.$$

Для того чтобы найти собственные значения и собственные векторы матрицы K_μ воспользуемся ее представлением в виде кронекеровского произведения:

$$K_\mu = \sigma^2 \begin{pmatrix} 2I_N & -I_N \\ -I_N & 2I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \left(\sigma^2 I_N\right).$$

Тогда в силу «спектральных» свойств кронекеровского произведения собственные значения матрицы K_μ будут равны всевозможным произведениям собственных значений матриц $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\sigma^2 I_N$, а соответствующие собственные векторы будут получаться как кронекеровские произведения собственных векторов, отвечающих соответствующим собственным значениям [27]. С учетом этого непосредственными вычислениями получаем:

$$\Lambda = \sigma^2 \begin{pmatrix} I_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 3I_N \end{pmatrix}, \; T = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_N & -I_N \\ I_N & I_N \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор $\nu = \sqrt{\Lambda^{-1}} T^T \mu = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} I_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_N \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_N & I_N \\ -I_N & I_N \end{pmatrix} \mu = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \begin{pmatrix} I_N & I_N \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} I_N & \frac{1}{\sqrt{3}} I_N \end{pmatrix} \mu$ будет иметь ковариационную матрицу $K_\nu = I_{2N}$. Выразим вектор ν через исходный случайный вектор ε:

$$\nu = \tfrac{1}{\sqrt{2}\sigma} \begin{pmatrix} I_N & I_N \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} I_N & \frac{1}{\sqrt{3}} I_N \end{pmatrix} \mu = \tfrac{1}{\sqrt{2}\sigma} \begin{pmatrix} I_N & I_N \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} I_N & \frac{1}{\sqrt{3}} I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N & -I_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_N & -I_N \end{pmatrix} \varepsilon =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}\sigma} \begin{pmatrix} I_N & \mathbf{0} & -I_N \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} I_N & \frac{2}{\sqrt{3}} I_N & -\frac{1}{\sqrt{3}} I_N \end{pmatrix} \varepsilon = \tfrac{1}{\sqrt{2}\sigma} \begin{pmatrix} -(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\left((\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\right) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, все компоненты вектора ν статистически независимы, причем имеют распределение $\mathcal{N}(0,1)$.

Случайные величины $\left\| -\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \right\|^2$ и $\left\| -\frac{1}{\sqrt{6}\sigma}\left((\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\right) \right\|^2$ имеют χ^2-распределение с N степенями свободы. Как известно, χ^2-распределение с ростом N асимптотически сходится к нормальному распределению $\mathcal{N}(N, 2N)$. Поэтому при достаточно большом значении N (уже при $N > 30$) [28] можно считать, что $\left\| -\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \right\|^2 \sim \mathcal{N}(N, 2N)$ и $\left\| -\frac{1}{\sqrt{6}\sigma}\left((\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\right) \right\|^2 \sim \mathcal{N}(N, 2N)$ или $\left\| \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right\|^2 \sim \mathcal{N}\left(2N\sigma^2, 8N\sigma^4\right)$ и $\left\| (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \right\|^2 \sim \mathcal{N}\left(6N\sigma^2, 72N\sigma^4\right)$.

Как известно, функция распределения максимума независимых случайных величин равна произведению функций распределения этих величин [29]. Поэтому

$$\max\left(\left\| (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \right\|^2, \left\| \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right\|^2 \right) \sim \mathcal{N}\left(6N\sigma^2, 72N\sigma^4\right) \mathcal{N}\left(2N\sigma^2, 8N\sigma^4\right).$$

Обозначим $y = \max\left(\left\| (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \right\|, \left\| \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right\| \right)$. В силу утверждения 3 имеет место неравенство $x \le y$, это значит, что для любого положительного δ выполняется $P(x < \delta) \ge P(y < \delta) = P\left(y^2 < \delta^2\right)$. Поэтому получаем окончательно:

$$P(x<\delta)\geq\Phi\left(\frac{\delta^2-6N\sigma^2}{6\sqrt{2N}\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{\delta^2-2N\sigma^2}{2\sqrt{2N}\sigma^2}\right). \blacksquare$$

Следствие 1. $P(x<\delta)\geq\Phi\left(\frac{\delta^2-6N\sigma^2}{6\sqrt{2N}\sigma^2}\right)$ при больших N.

Доказательство. Расстояние между математическим ожиданиями распределений равно $6N\sigma^2-2N\sigma^2=4N\sigma^2$ превышает сумму среднеквадратических отклонений $6\sqrt{2N}\sigma^2+2\sqrt{2N}\sigma^2=8\sqrt{2N}\sigma^2$ в $\sqrt{N}/2\sqrt{2}$ раз, и это отношение увеличивается с ростом N. Это означает, что при больших значениях N (фактически уже при $N>70$) практическим влиянием распределения $\Phi\left(\frac{\delta^2-2N\sigma^2}{2\sqrt{2N}\sigma^2}\right)$ можно пренебречь. ■

Пример. Рассчитаем с помощью данного следствия величину δ, которую x не превысит с вероятностью α не менее 99%, т.е. $\alpha=0.99$, при условии, что $\sigma=0.01$.

Очевидно, $\delta\geq\delta(\alpha)$ зависит от заданной вероятности α и может быть найдено из условия $\Phi\left(\frac{\delta^2-6N\sigma^2}{6\sqrt{2N}\sigma^2}\right)\geq\alpha$. Отсюда $\frac{\delta^2-6N\sigma^2}{6\sqrt{2N}\sigma^2}\geq\Phi^{-1}(\alpha)$ и, следовательно, $\delta\geq\sigma\sqrt{6N+6\sqrt{2N}\Phi^{-1}(\alpha)}$. При значении $\alpha=0.99$, пользуясь таблицами для функции Лапласа, получаем

$$\delta\geq\sigma\sqrt{6N+6\sqrt{2}\sqrt{N}\Phi^{-1}(0.99)}\approx\sigma\sqrt{6N+6\sqrt{2}\cdot2.34\sqrt{N}}=\sigma\sqrt{6N+19.86\sqrt{N}}.$$

Для значения $\sigma=0.01$ и $N=\frac{150\cdot150}{3}=7\,500$ находим окончательно $\delta\geq2.16$.

Заключение. В данной статье кратко излагается алгебраический метод обработки гексагональных изображений, основанный на их представлении как функций на «полях чисел Эйзенштейна». Однако основным новым результатом работы является получение аналитическиой оценки влияния шума на критерий обнаружения тройной вращательной симметрии на таком изображении. Учитывая сделанные при получении результата предположения, можно сделать вывод, что полученная оценка является достаточно «осторожной», т.е. можно ожидать, что в реальности разброс меры симметрии, вызванный шумами на изображении, будет существенно меньше, чем теоретически установленные границы.

Следует заметить также, что описанный подход к оценке влияния шума не ограничивается применением только к методу определения симметрии, изложенному в [7]. Проблема оценки точности выражений типа (2) возникает и в других задачах (например, [30]). Возможно, при этом потребуются некоторые обобщения приведенных в данной статье результатов (например, распространение оценивания на большее количество объектов при кратной вращательной симметрии и др.). Это может стать предметом отдельного исследования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Gool L., Moons T., Ungureanu D., Pauwels E.* Symmetry from Shape and Shape from Symmetry // Int. J. Robotics Res. – 1995. – 14 (5). – P. 407-424.
2. *Martinet A., Soler C., Holzschuch N., Sillion F.* Accurate Detection of Symmetries in 3D Shapes // ACM Trans. Graph. – 2006. – 25 (2). – P. 439-464.
3. *Middleton L., Sivaswamy J.* Hexagonal Image Processing: A Practical Approach. Springer, 2005.
4. *Xiangjian He,Wenjing Jia, Namho Hur, QiangWu, Jinwoong Kim.* Image Translation and Rotation on Hexagonal Structure // In: 6th IEEE Intern. Conf. on Computer and Information Technology (CIT'06). Seoul, 141. – 2006.
5. *Chertok M., Keller Y.* Spectral Symmetry Analysis // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2010. – 32 (7). – P. 1227-1238.
6. *Derrode S., Ghorbel F.* Shape Analysis and Symmetry Detection in Gray-level Objects Using the Analytical Fourier-Mellin Representation // Signal Processing. – 2004. – 84 (1). – P. 25-39.
7. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Threefold Symmetry Detection in Hexagonal Images Based on Finite Eisenstein Fields // Analysis of Images, Social Networks, and Texts. 5th International Conference, AIST'2016. Selected Papers. Communications in Computer and Information Science 661, Springer. – 2017. – P. 281-292.
8. *Каркищенко А.Н., Мнухин В.Б.* Распознавание симметрии изображений в частотной области // Тр. 9-й Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации – 2012», TORUS Press, Moscow, 2012. – С. 426-429.
9. *Campello de Souza R.M., Farrell R.G.* Finite Field Transforms and Symmetry Groups // Discrete Mathematics. – 1985. – 56. – P. 111-116.
10. *Mnukhin V.B.* Transformations of Digital Images on Complex Discrete Tori // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. – 2014. – 24 (4). – P. 552-560.
11. *Каркищенко А.Н., Мнухин В.Б.* Применение модулярных логарифмов на комплексных дискретных торах в задачах обработки цифровых изображений // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. Вып. 3. – Ростов-на-Дону: РГУПС, 2013. – С. 137-142.
12. *Mnukhin V.B.* Fourier-Mellin Transform on a Complex Discrete Torus // In: 11th Int. Conf. "Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies" (PRIA-11-2013), September 23-28 2013. Samara, Russia, 2013. – P. 102-105.
13. *Her I.* Geometric Transforms on the Hexagonal Grid // IEEE Transactions on Image Processing. – 1995. – 4 (9). – P. 1213-1222.
14. *Creutzburg R., Labunets V.G.* The Early Papers on Number-theoretic Transforms. – https://www.researchgate.net/publication/229043248.
15. *Лабунец В.Г.* Теоретико-числовые преобразования над квадратичными полями // Сложные системы управления. – Киев: Институт кибернетики УССР, 1982. – С. 30-37.
16. *Вариченко Л.В., Лабунец В.Г., Раков М.А.* Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов. – Kiev: Наукова Думка, 1986.
17. *Baker H.G.* Complex Gaussian Integers for Gaussian Graphics // ACM Sigplan Notices. – 1993. – 28 (11). – P. 22-27.
18. *Bandeira J., Campello de Souza R.M.* New Trigonometric Transforms Over Prime Finite Fields for Image Filtering // In: VI International Telecommunications Symposium (ITS2006), Fortaleza-Ce, Brazil. – 2006. – P. 628-633.
19. *Campello de Souza R.M., de Oliveira H.M., Silva D.* The *Z* Transform over Finite Fields // ArXiv preprint 1502.03371 published online February 11. – 2015.
20. *Hundt R., Schön J.C., Hannemann A., Jansen M.* Determination of Symmetries and Idealized Cell Parameters for Simulated Structures // Journal of Applied Crystallography. – 1999. – 32. – P. 413-416.
21. *Spek A.L.* Structure Validation in Chemical Crystallography // Acta Crystallographica. D65. – 2009. – P. 148-155.
22. *Zeyun Yu, Bajaj C.* Automatic Ultrastructure Segmentation of Reconstructed CryoEM Maps of Icosahedral Viruses // IEEE Transactions on Image Processing. – 2005. – 14 (9). – P. 1324-1337.

23. *Seiichi Kondo, Mark Lutwyche, Yasuo Wada* Observation of Threefold Symmetry Images due to a Point Defect on a Graphite Surface Using Scanning Tunneling Microscope (STM) // Japanese Journal of Applied Physics. – 1994. – 33 (9B). – P. 1342-1344.
24. *Ireland K., Rosen M.* A Classical Introduction to Modern Number Theory. – Springer-Verlag, 1982.
25. *Dummit D.S., Foote R.M.* Abstract Algebra. – John Wiley&Sons, 2004.
26. *Каркищенко А.Н., Мнухин В.Б.* Топологическая фильтрация для распознавания и анализа симметрии цифровых изображений // Машинное обучение и анализ данных. – 2014. – 1 (8). – С. 966-987.
27. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
28. *Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. – М.: Физматлит, 2013. – 232 с.
29. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
30. *Каркищенко А.Н., Горбань А.С.* К определению мер сходства полутоновых изображений // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 4 (81). – С. 98-103.

REFERENCES

1. *Gool L., Moons T., Ungureanu D., Pauwels E.* Symmetry from Shape and Shape from Symmetry, *Int. J. Robotics Res*., 1995, 14 (5), pp. 407-424.
2. *Martinet A., Soler C., Holzschuch N., Sillion F.* Accurate Detection of Symmetries in 3D Shapes, *ACM Trans. Graph*., 2006, 25 (2), pp. 439-464.
3. *Middleton L., Sivaswamy J.* Hexagonal Image Processing: A Practical Approach. Springer, 2005.
4. *Xiangjian He,Wenjing Jia, Namho Hur, QiangWu, Jinwoong Kim.* Image Translation and Rotation on Hexagonal Structure, *In: 6th IEEE Intern. Conf. on Computer and Information Technology (CIT'06).* Seoul, 141, 2006.
5. *Chertok M., Keller Y.* Spectral Symmetry Analysis, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence,* 2010, 32 (7), pp. 1227-1238.
6. *Derrode S., Ghorbel F.* Shape Analysis and Symmetry Detection in Gray-level Objects Using the Analytical Fourier-Mellin Representation, *Signal Processing,* 2004, 84 (1), pp. 25-39.
7. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Threefold Symmetry Detection in Hexagonal Images Based on Finite Eisenstein Fields, *Analysis of Images, Social Networks, and Texts. 5th International Conference, AIST'2016. Selected Papers. Communications in Computer and Information Science 661, Springer, 2017*, pp. 281-292.
8. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Raspoznavanie simmetrii izobrazheniy v chastotnoy oblasti [Symmetry Recognition in the Frequency Domain], *Tr. 9-y Mezhdunarodnoy konferentsii «Intellektualizatsiya obrabotki informatsii – 2012», TORUS Press, Moscow, 2012* [In 9th International Conference on Intelligent Information Processing, TORUS Press, Moscow, 2012], pp. 426-429.
9. *Campello de Souza R.M., Farrell R.G.* Finite Field Transforms and Symmetry Groups, *Discrete Mathematics,* 1985, 56, pp. 111-116.
10. *Mnukhin V.B.* Transformations of Digital Images on Complex Discrete Tori, *Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications,* 2014, 24 (4), pp. 552-560.
11. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B*. Primenenie modulyarnykh logarifmov na kompleksnykh diskretnykh torakh v zadachakh obrabotki tsifrovykh izobrazheniy [Applications of Modular Logarithms on Complex Discrete Tori in Digital Image Processing], *Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya* [Bulletin of the Rostov State University of Railway Transport]. Issue 3. Rostov-on-Don: RGUPS, 2013, pp. 137-142.
12. *Mnukhin V.B.* Fourier-Mellin Transform on a Complex Discrete Torus // In: 11^{th} Int. Conf. "Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies" (PRIA-11-2013), September 23-28 2013. Samara, Russia, 2013. – P. 102-105.
13. *Her I.* Geometric Transforms on the Hexagonal Grid, *IEEE Transactions on Image Processing*, 1995, 4 (9), pp. 1213-1222.
14. *Creutzburg R., Labunets V.G.* The Early Papers on Number-theoretic Transforms. Available at: https://www.researchgate.net/publication/229043248.

15. *Labunets V.G.* Teoretiko-chislovye preobrazovaniya nad kvadratichnymi polyami [Number Theoretic Transforms over Quadratic Fields], *Slozhnye sistemy upravleniya* [Complex Control Systems]. Kiev: Institut kibernetiki USSR, 1982, pp. 30-37.
16. *Varichenko L.V., Labunets V.G., Rakov M.A.* Abstraktnye algebraicheskie sistemy i tsifrovaya obrabotka signalov [Abstract Algebraic Systems and Digital Signal Processing]. Kiev: Naukova Dumka, 1986.
17. *Baker H.G.* Complex Gaussian Integers for Gaussian Graphics, *ACM Sigplan Notices*, 1993, 28 (11), pp. 22-27.
18. *Bandeira J., Campello de Souza R.M.* New Trigonometric Transforms Over Prime Finite Fields for Image Filtering // *In: VI International Telecommunications Symposium (ITS2006), Fortaleza-Ce, Brazil, 2006*, pp. 628-633.
19. *Campello de Souza R.M., de Oliveira H.M., Silva D.* The *Z* Transform over Finite Fields, *ArXiv preprint 1502.03371 published online February 11*, 2015.
20. *Hundt R., Schön J.C., Hannemann A., Jansen M.* Determination of Symmetries and Idealized Cell Parameters for Simulated Structures, *Journal of Applied Crystallography*, 1999, 32, pp. 413-416.
21. *Spek A.L.* Structure Validation in Chemical Crystallography, *Acta Crystallographica. D65*, 2009, pp. 148-155.
22. *Zeyun Yu, Bajaj C.* Automatic Ultrastructure Segmentation of Reconstructed CryoEM Maps of Icosahedral Viruses, *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14 (9), pp. 1324-1337.
23. *Seiichi Kondo, Mark Lutwyche, Yasuo Wada* Observation of Threefold Symmetry Images due to a Point Defect on a Graphite Surface Using Scanning Tunneling Microscope (STM), *Japanese Journal of Applied Physics*, 1994, 33 (9B), pp. 1342-1344.
24. *Ireland K., Rosen M.* A Classical Introduction to Modern Number Theory. Springer-Verlag, 1982.
25. *Dummit D.S., Foote R.M.* Abstract Algebra. John Wiley&Sons, 2004.
26. *Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.* Topologicheskaya fil'tratsiya dlya raspoznavaniya i analiza simmetrii tsifrovykh izobrazheniy [Topological Filtration for Digital Images Recognition and Symmetry Analysis], *Mashinnoe obuchenie i analiz dannykh* [Journal of Machine Learning and Data Analysis], 2014, 1 (8), pp. 966-987.
27. *Markus M., Mink Kh.* Obzor po teorii matrits i matrichnykh neravenstv [Overview on the theory of matrices and matrix inequalities]. Moscow: Nauka, 1972, 232 p.
28. *Kibzun A.I., Goryainova E.R., Naumov A.V.* Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. Bazovyy kurs s primerami i zadachami [Theory of Probability and Mathematical Statistics. Basic course with examples and tasks]. Moscow: Fizmatlit, 2013, 232 p.
29. *Venttsel' E.S., Ovcharov L.A.* Teoriya veroyatnostey [Theory of Probability]. Moscow: Nauka, 1969, 368 p.
30. *Karkishchenko A.N., Gorban' A.S.* K opredeleniyu mer skhodstva polutonovykh izobrazheniy [On the definition of measures of similarity of halftone images], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2008, No. 4 (81), pp. 98-103.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. Г.В. Куповых.

Каркищенко Александр Николаевич – Научно-исследовательский инсттут робототехники и процессов управления ЮФУ; e-mail: karkishalex@gmail.com; 347928, г. Таганрог, ул. Шевченко, 2; тел.: +78634371694; д.ф.-м.н.; профессор; в.н.с.

Мнухин Валерий Борисович – Южный федеральный университет; e-mail: mnukhin.valeriy@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: +78634371606; к.ф.-м.н; доцент.

Karkishchenko Alexander Nikolaevich – Scientific Research Institute of Robotics and Control Processes of the Southern Federal University; e-mail: karkishalex@gmail.com; 2, Shevchenko street, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371694, dr. of math. sc.; professor; leading researcher.

Mnukhin Valeriy Borisovich – Southern Federal University; e-mail: mnukhin.valeriy@mail.ru; 44, Nekrasovskiy lane, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.