УДК 517.524 DOI 10.18522/2311-3103-2020-5-75-85

Н.С. Кривша, В.В. Кривша, С.А. Бутенков

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР НА ПЛИС

Предлагается метод построения вычислительных моделей для исследования и оптимизации универсальных вычислительных структур, выполняющих вычисление вычисления сложных кубатурных формул. Теоретической базой для введенных моделей служит теория пространственной грануляции, методы которой разработаны коллективом авторов. Методология пространственной грануляции позволяет переходить от вычислений в точечном метрическом пространстве данных (которое не всегда существует) к вычислениям в аффинном многомерном пространстве, содержащем укрупненные единицы данных (пространственные гранулы). Такое преобразование данных основано на использовании аффинно-инвариантных моделей декартовых гранул и основывается на оптимальных процедурах покрытия точечного пространства выпуклыми гранулами. Такие полезные вычислительные свойства введенных моделей данных позволяют построить вычислительно эффективные процедуры для манипулирования многомерными данными, одним из приложений которых является вычисление многомерных кубатурных формул. Новые модели позволяют создавать наглядные матричные модели данных произвольной размерности для целей планирования структуры вычислительных процессов и построения информационных графов таких процессов. Эффективное и наглядное представление сложных вычислительных формул позволяет выполнять эквивалентные (с численной точки зрения) преобразования таких формул с целью выбора эффективных схемных решений для построения высокопроизводительных вычислительных блоков вычисления кубатур высокой размерности на базе ПЛИС. На основе оптимизированных моделей вычислительных структур строятся схемные решения, реализующие кубатурные формулы на реконфигурируемых вычислительных системах. Сложность решения задачи проектирования на ПЛИС связана с тем, что используемые вычислительные средства содержать поля ПЛИС, проектирование вычислительных структур для которых является вычислительно сложной задачей. Авторы использовали разработанные в организации автоматизированные средства проектирования на полях ПЛИС, такие как язык высокого уровня COLAMO, язык низкого уровня Fire Constructor и сопутствующие программные средства для реализации полученных информационных графов многомерных кубатур и экспериментальной оценки качества полученных результатов. Предлагаемый в работе теоретический подход к моделированию и оптимизации информационных графов вычислительных структур может быть распространен на широкий круг задач вычислительной математики.

Численные методы; кубатурные формулы; теория грануляции; пространственные гранулы; высокопроизводительные вычисления; реконфигурируемые вычислительные системы; ПЛИС.

N.S. Krivsha, V.V. Krivsha, S.A. Butenkov

THE STRUCTURE OF CUBATURE FORMULAS MODELLING FOR THE EFFICIENT FPGA IMPLEMENTATION

In the paper we present the new computing models for the common cubature formulas computing unit design and optimization. The basis of new modeling technique is related with the space granulation theory, developed in our recent papers. The Spatial Granulation Technique allows us to pass from computing in the metrical data points space to affine data space, contains the aggregated data units named as granules. The introduced data transformation based on the affine-invariant Cartesian granule model and on the optimal data points coarsening procedures. The useful properties of new data models allows to provide the very efficient multivariable data management procedures. The one of them is the multivariate cubature formulas calculation. The new theory provides the obvious matrix data processing models for the information graphs design and *optimization. We can perform the equivalent mappings for the complicated information graph models for the efficient structures matching. Optimized models of information graphs are used for the FPGA-based devices implementation. The main problem of FPGA design is the commutation structures complication for the large FPGA fields, obtained as the basic units for the reconfigurable cubature formulas computing units. In this work we use the high-level programming language COLAMO and assembler language Fire Constructor for the computing units implementation. As a result of new technique implementation we can provide the family of adequate and useful graphic representation for a multivariable cubature formulas over the matrix calculation. The provided models are suitable for the optimal design of configurable computing structures, universal and dedicated devices from the FPGA basis. For the device implementation the developed high-level software products are used. For the designed universal devices the testing procedures was performed and examined with the symbolic calculation software for the computing results evaluation.*

Cubature formula; theory of space granulation; space granules; high-performance computing; configurable computer; FPGA.

Введение. Одной из классических, но и поныне практически важных задач вычислительной математики является задача вычислении многомерных (или многократных) интегралов. Это область численных методов, изобилующая множеством классических результатов, но предоставляющая обширное поле нерешенных задач [1]. Она имеет широчайшее поле приложений [2, 3] и, в то же время, является обширным полем приложения сил для получения новых теоретических результатов [4, 5]. В настоящее время существенно расширился круг решаемых в этой области вычислительных задач. Потребовалось научиться вычислять интегралы от сложных функций большого числа переменных [4–6]. При этом резко выросли вычислительные возможности: можно использовать десятки тысяч и более узлов интерполяции. Для подобных задач важнейшую роль приобретают методы проектирования эффективных вычислительных структур [7, 8], решающих сложные задачи при оптимальном расходе аппаратных и временных ресурсов [9, 11].

Начальным этапом построения реконфигурируемых высокопроизводительных систем является построение и оптимизация информационных графов вычислительных процессов [9]. На основе получаемых (и оптимизируемых) графов процессов можно строить реализации вычислительных блоков с использованием высокоуровневых средств разработки, таких как специализированный язык COLAMO и другие средства обеспечения процесса проектирования схемных решений [12]. Отметим, что решающим (и пока не автоматизированным) этапом в проектировании информационных графов является переход от алгебраической записи вычислительной формулы к собственно графу вычислительного процесса. Эта задача плохо формализуема и содержит значительную творческую составляющую, подобно задаче составления алгоритма для языков программирования [8, 9]. От результатов построения информационного графа для заданной вычислительной формулы во многом зависят точность, быстродействие и аппаратные затраты полученного схемного решения вычислительной задачи [13], поэтому методология данного этапа является важной при проектировании.

Цели и задачи работы. Целью работы является разработка методологии моделирования кубатурных формул с помощью математического аппарата грануляции для получения моделей, позволяющих изучать свойства различных вычислительных структур для последующей реализации с помощью стандартных программных средств разработки реконфигурируемых вычислительных структур на ПЛИС.

Задачи работы:

1) Построение метода представления кубатурных формул в аппарате гранулированных вычислений;

2) Получение универсальных рабочих структур информационных графов для построения устройств вычисления многомерных кубатур;

3) Изучение возможности реализации полученных графов на стандартных средствах проектирования для ПЛИС;

4) Экспериментальная оценка полученных результатов.

Для решения этих задач в работе использованы базовые теоретические результаты теории пространственной грануляции данных [15–17], высокоуровневые программные средства разработки вычислительных блоков на ПЛИС: алгоритмический язык COLAMO и язык уровня ассемблера Fire Constructor [12], а также средства символьных вычислений пакета MathCAD для оценки точности полученных результатов.

Основы методологии грануляции. Идеология гранулированных вычислений основана на переходе от представления данных в виде точек некоторого векторного пространства [14] к их представлению более сложными математическими структурами. Она объединяет и обобщает широкий круг частных подходов, связанных с кластеризацией, сегментацией, покрытием сетями Кохонена и другими подобными подходами, связанными с укрупнением единиц представления данных (в широком смысле этого слова) [18–20].

В ряде наших работ методология грануляции применена для неточечных объектов в многомерных пространствах с сохранение исходного геометрического смысла и получила название теории пространственной грануляции [15, 19, 20] и др.

В декартовых координатах объект представляется в виде множества элементов в пространстве размерности n [6], каждый из которых задан с помощью определителя с $n+1$ параметром:

$$G_n = \begin{vmatrix} {}^1x^1 & {}^2x^1 & \cdots & {}^nx^1 & (-1)^n \\ {}^1x^2 & {}^2x^2 & \cdots & {}^nx^2 & (-1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^1x^n & {}^2x^n & \cdots & {}^nx^n & (-1)^n \\ {}^1x^{n+1} & {}^2x^{n+1} & \cdots & {}^nx^{n+1} & (-1)^n \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

при этом параметрами элемента являются координаты вершин элемента ${}^ix^j,\ i=1,...,n,\quad j=1,...,(n+1)$ в тензорных обозначениях. Данная алгебраическая модель допускает вычисление целого спектра мер на элементах G_n с помощью миноров (1) согласно [19].

Построение квадратурных формул на моделях гранул. Используем геометрическое содержание введенной модели (1), где определитель рассматривается как аффинный геометрический инвариант, после нормировки, приводится к площади фигуры, образованной точками, проективные координаты которых входят в модель (1).

Для размерности пространства $n=1$ (квадратуры) выберем на отрезке числовой оси $a \le x^1 \le b$ узлы сетки $\omega = \left\{ {}^kx^1 \in [a;b] \right\}$, $0 \le k \le Nx^1$, при этом шаг сетки может быть неравномерным [1]. Согласно [6], мы можем записать базовую квадратурную формулу прямоугольников для интеграла на отрезке в виде

$$\int_a^b f\left(x^1\right)dx^1 = \sum_{k=1}^{Nx^1} \begin{vmatrix} {}^{k-1}x^1 f\left({}^{k-1}x^1\right) & 0 & 1 \\ {}^kx^1 f\left({}^{k-1}x^1\right) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1\right), \qquad (2)$$

пригодном для реализации на параллельных и кластерных системах [8, 20].

Используя свойства определителей модели (1), мы можем модифицировать формулу (2) в форме, эффективной при реализации на конвейерных системах:

$$\int_a^b f\left(x^1\right)dx^1 = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k-1}x^1 f\left({}^{k-1}x^1\right)\right] & 0 & 1 \\ \sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k}x^1 f\left({}^{k-1}x^1\right)\right] & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1\right). \quad (3)$$

Комбинируя модели (2) и (3), мы можем получить формулу более высокого порядка точности (средних прямоугольников) на той же сетке, которая имеет вид:

$$\int_a^b f\left(x^1\right)dx^1 = \begin{vmatrix} 2\sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k-1}x^1 \cdot f\left(\frac{{}^{k}x^1 + {}^{k-1}x^1}{2}\right)\right] & 0 & 1 \\ \sum_{k=1}^{Nx^1}\left[\left({}^{k}x^1 + {}^{k-1}x^1\right)\cdot f\left(\frac{{}^{k}x^1 + {}^{k-1}x^1}{2}\right)\right] & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1\right). \quad (4)$$

Отметим, что используя свойства определителей и формулы (2) – (4), мы можем построить модели квадратурных формул более высокого порядка точности, например, формулы трапеций для параллельно-конвейерной реализации по [19]:

$$\int_a^b f\left(x^1\right)dx^1 = \begin{vmatrix} \left[\left(\sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k-1}x^1 f\left({}^{k-1}x^1\right)\right]\right) - \left(\sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k}x^1 \cdot f\left({}^{k}x^1\right)\right]\right)\right] & 0 & \frac{1}{2} \\ \left[\left(\sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k}x^1 f\left({}^{k-1}x^1\right)\right]\right) - \left(\sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k-1}x^1 \cdot f\left({}^{k}x^1\right)\right]\right)\right] & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1\right). \quad (5)$$

Повышая порядок составных квадратурных формул, из (5) получаем базовый вариант квадратурной формулы Симпсона для параллельно-конвейерной реализации [5]:

$$\int_a^b f\left(x^1\right)dx^1 = \begin{vmatrix} \left[4\cdot\sum_{k=1}^{Nx^1}\left[2\,{}^{k-1}x^1_{k-1} f\left(\frac{{}^{k-1}x^1 + {}^{k}x^1}{2}\right)\right] - \sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k-1}x^1 f\left({}^{k-1}x^1\right)\right] + \sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k}x^1 f\left({}^{k}x^1\right)\right]\right] & 0 & \frac{1}{6} \\ \left[4\cdot\sum_{k=1}^{Nx^1}\left[\left({}^{k-1}x^1 + {}^{k}x^1\right) f\left(\frac{{}^{k-1}x^1 + {}^{k}x^1}{2}\right)\right] - \sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k}x^1 f\left({}^{k-1}x^1\right)\right] + \sum_{k=1}^{Nx^1}\left[{}^{k-1}x^1 f\left({}^{k}x^1\right)\right]\right] & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1\right). \quad (6)$$

Построение кубатурных формул на моделях гранул. Введенная модель (1) позволяет развить методологию моделирования формул на гранулах и на случай $n = 2$, т.е. для построения моделей кубатурных формул. Для построения модели кубатурной формулы будем использовать метод ячеек на основе квадратурных формул (2)–(6), поскольку он обеспечивает большую точность, чем метод повторного интегрирования [1]. В случае сетки $a \le x^1 \le b, c \le x^2 \le d$ (возможно, неравномерной) с узлами $\omega = \left\{\left({}^{k1}x^1, {}^{k2}2x^2\right) \in [a;b]\times[c;\mathrm{d}]\right\}$, $0 \le k1 \le Nx^1, 0 \le k2 \le Nx^2$ получим параллельную версию кубатурной формулы прямоугольников в виде:

$$\iint\limits_D f\left(x^1,x^2\right)dx^1dx^2 = \sum_{k1=1}^{Nx^1}\begin{vmatrix} \sum\limits_{k2=1}^{Nx^2}\left[{}^{k2-1}x^2 f\left({}^{k1}x^1,{}^{k2}x^2\right)\right] & 0 & 1 \\ \sum\limits_{k2=1}^{Nx^2}\left[{}^{k2}x^2 f\left({}^{k1}x^1,{}^{k2}x^2\right)\right] & 0 & 1 \\ 0 & \left({}^{k1}x^1-{}^{k1-1}x^1\right) & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1,x^2\right). \quad (7)$$

Важным свойством введенных кубатур является то, что шаг сетки ω может быть неравномерным по обеим координатам. Это полезно при разработке адаптивных алгоритмов интегрирования [2].

Формула (7) может быть представлена в конвейерной форме как:

$$\iint\limits_D f\left(x^1,x^2\right)dx^1dx^2 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k1=1}^{Nx^1}\sum\limits_{k2=1}^{Nx^2}\left[{}^{k2-1}x^2 f\left({}^{k1}x^1,{}^{k2}x^2\right)\right] & 0 & \dfrac{1}{Nx^1} \\ \sum\limits_{k1=1}^{Nx^1}\sum\limits_{k2=1}^{Nx^2}\left[{}^{k2-1}x^2 f\left({}^{k1}x^1,{}^{k2}x^2_{k2}\right)\right] & 0 & \dfrac{1}{Nx^1} \\ 0 & \sum\limits_{k1=1}^{Nx^1}\left[{}^{k1}x^1-{}^{k1-1}x^1\right] & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1,x^2\right)\cdot \quad (8)$$

Модифицируя исходные формулы (2), (3) и (7), получим параллельную реализацию кубатурной формулы трапеций:

$$\iint\limits_D f\left(x^1,x^2\right)dx^1dx^2 = \sum_{k1=1}^{Nx^1}\begin{vmatrix} 2\cdot\sum\limits_{k2=1}^{Nx^2}\left[{}^{k2-1}x^2 f\left({}^{k1}x^1,\dfrac{{}^{k2}x^2+{}^{k2-1}x^2}{2}\right)\right] & 0 & 1 \\ \sum\limits_{k2=1}^{Nx^2}\left[\left({}^{k2}x^2+{}^{k2-1}x^2\right) f\left({}^{k1}x^1,\dfrac{{}^{k2}x^2+{}^{k2-1}x^2}{2}\right)\right] & 0 & 1 \\ 0 & \left({}^{k1}x^1-{}^{k1-1}x^1\right) & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1,x^2\right). \quad (9)$$

На основе свойств модели (1) и применяя (2), (3) к (8), можно представить кубатурную формулу трапеций в конвейерной форме:

$$\iint\limits_D f\left(x^1,x^2\right)dx^1dx^2 = \begin{vmatrix} 2\sum\limits_{k=1}^{Nx^1}\sum\limits_{k2=1}^{Nx^2}\left[{}^{k2-1}x^2 f\left({}^{k1}x^1,\dfrac{{}^{k2}x^2+{}^{k2-1}x^2}{2}\right)\right] & 0 & \dfrac{1}{Nx^1} \\ \sum\limits_{k1=1}^{Nx^1}\sum\limits_{k2=1}^{Nx^2}\left[\left({}^{k2}x^2+{}^{k2-1}x^2\right) f\left({}^{k1}x^1,\dfrac{{}^{k2}x^2+{}^{k2-1}x^2}{2}\right)\right] & 0 & \dfrac{1}{Nx^1} \\ 0 & \sum\limits_{k1=1}^{Nx^1}\left[{}^{k1}x^1-{}^{k1-1}x^1_1\right] & 0 \end{vmatrix} + R\left(x^1,x^2\right). \quad (10)$$

Аналогичным образом на основе модели (1) могут быть получены многомерные кубатурные формулы для произвольной размерности пространства n [15].

Полученные формулы демонстрируют методику получения и модификации эквивалентных представлений кубатурных формул, позволяющих получать различную структуру и, следовательно, погрешность, сложность и другие показатели процесса вычисления [22].

Рассмотрим теперь структуры, позволяющие реализовывать в виде аналогичных моделей методы произвольного порядка точности в пространстве произвольного порядка n [19].

Универсальные кубатурные формулы на моделях гранул. Очевидно, что с точки зрения вычислительной структуры алгоритма все интерполяционные кубатурные формулы полностью задаются порядком метода и набором весовых и узловых коэффициентов [1]. Это позволяет для полученной в предыдущем разделе оптимальной модели вычислений (2)–(10) получить компактное (свернутое) представление. Введем общие обозначения для узловых коэффициентов U_k, определяющих расположение узлов ${}^k x^i$, где $i = 1, ..., Nx^1$ – тензорный индекс координаты, а $k = 1, ..., N\omega$ – индекс узла сетки по i-й координате. Для обеспечения универсальности в выборе метода введем весовые коэффициенты C_k, соответствующие выбранным узлам сетки ω [22].

Введем индекс для локальных интервалов составной квадратурной формулы $j = 1, ..., Nx^1$. На локальных интервалах $\left[{}^{j-1}x^1, {}^j x^1 \right]$ используем модельные формулы (2) – (6) с нормировкой шагов на каждом интервале по массиву значений U_k, а также учитывая веса узлов на локальном интервале как C_k, мы получим универсальную составную квадратурную формулу для моделей (2)–(6), пригодную для реализации с помощью языка проектирования COLAMO [5] в виде:

$$\int_a^b f\left(x^1\right)dx^1 = \frac{1}{C_{met}} \sum_{j=0}^{Nx^1-1} \left[\left({}^{j+1}x^1 - {}^j x^1 \right) \sum_{k=0}^{N\omega-1} C_k^1 f\left(\frac{{}^{j+1}x^1 + {}^j x^1}{2} + \frac{{}^{j+1}x^1 - {}^j x^1}{2} U_k^1 \right) \right] + R\left(x^1\right), \quad (11)$$

где $C_{met} = \sum_{k=0}^{N\omega-1} C_k$ – нормирующий коэффициент заданного метода интегрирования. Число весовых коэффициентов формулы C_k равно числу узловых коэффициентов U_k и равно $N\omega$ (порядку выбранного метода интегрирования) [1].

Распространяя основные обозначения (11) на модельные формулы кубатур (7)–(10), для функции $f\left(x^1, \mathrm{x}^2\right)$ на прямоугольнике $\left((a,b);(c,d)\right)$ в плоскости получим универсальную кубатурную формулу вида:

$$\iint_D f\left(x^1, x^2\right)dx^1 dx^2 = \frac{1}{C_{met1} C_{met2}} \sum_{j1=0}^{Nx^1-1} \left[C_{j1}^1 \left({}^{j1+1}x^1 - {}^{j1}x^1 \right) \left[\sum_{j2=0}^{Nx^2-1} \left[C_{j2}^2 \left({}^{j2+1}x^2 - {}^{j2}x^2 \right) \right[\right.\right.\right.$$

$$\sum_{k1=0}^{N\omega1-1} \left[\sum_{k2=0}^{N\omega2-1} \left[f\left(\frac{{}^{j1+1}x^1 + {}^{j1}x^1}{2} + \frac{{}^{j1+1}x^1 - {}^{j1}x^1}{2} U_{k1}^1, \frac{{}^{j2+1}x^2 + {}^{j2}x^2}{2} + \frac{{}^{j2+1}x^2 - {}^{j2}x^2}{2} U_{k2}^2 \right) \right]\right]\right]\right]\right]\right] + R\left(x^1, x^2\right), \quad (12)$$

где C_{met1}, C_{met2} – нормирующие коэффициенты методов интегрирования, Nx^1, Nx^2 – количества разбиений координатных осей, $N\omega 1, N\omega 2$ – порядки методов для координатных осей 1 и 2, C_i^1, C_j^2 – весовые коэффициенты по координатам, U_i^1, U_j^2 – узловые коэффициенты по координатам.

Отметим, что при использовании формул типа (12) для интегрирования по разным координатным осям могут быть использованы разные методы, отличающиеся порядком, узловыми и весовыми коэффициентами [1]. Такое свойство существенно повышает универсальность предлагаемых формул для случая, когда свойства подынтегральной функции существенно отличаются при изменении вдоль разных координатных осей [2].

На основе формул (11), (12) можно получить многомерные кубатурные формулы для произвольной размерности вмещающего пространства n. Возможно также получение универсальных формул для криволинейных областей На основе формул (11), (12) можно получить также универсальные кубатурные формулы для произвольной размерности вмещающего пространства n [20].

Структурное представление универсальных формул. Полученные в предыдущих разделах формулы позволяют строить информационные универсальных графы кубатурных формул, управляя их реализацией в специализированном языке

COLAMO [12]. В качестве примера разработаем возможные реализации графа вычисления универсальной квадратурной формулы (11). Для упрощения графа введем заранее нормированные весовые коэффициенты метода: $C'_k = C^1_k / Cmet$. Для параллельной схемы вычислений граф приведен на рис. 1.

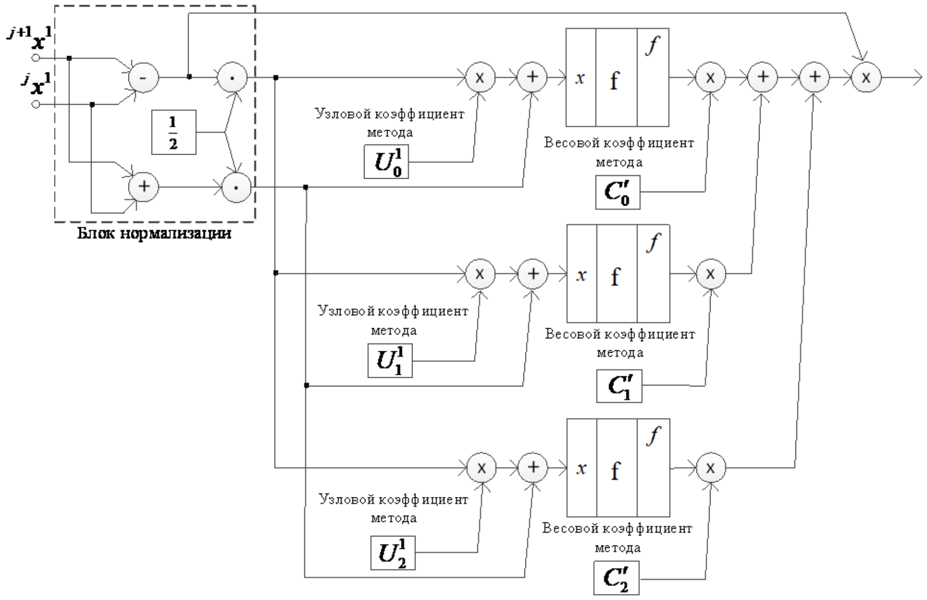

Рис. 1. Базовый граф параллельной схемы вычислений для (11)

По формуле (11) можно также построить информационный граф для конвейерной реализации квадратуры, представленный на рис. 2.

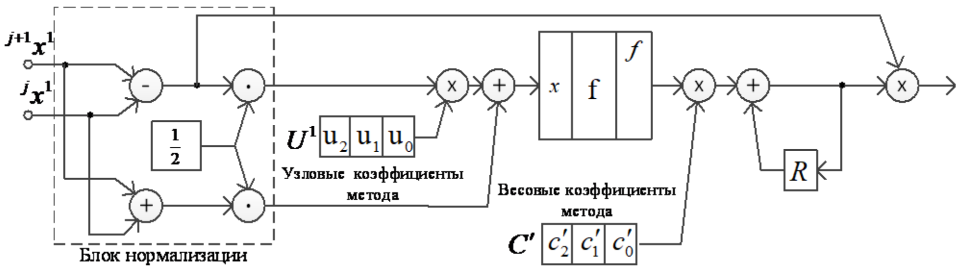

Рис. 2. Базовый граф конвейерной схемы вычислений для (11)

Общая структура РВС на ПЛИС строится с помощью метода параллельно-конвейерного представления информационных графов. Для сборки структур РВС из типовых макросов могут используются разработанные в НИЦ СЭ и НК высокоуровневые средства проектирования: алгоритмический язык COLAMO и язык уровня ассемблера Fire Constructor [9, 12].

Приведенные примеры графов вычислений являются универсальными по отношению к выбору метода и шага интегрирования. Что позволяет создать универсальные блоки интегрирования для ПЛИС, настраиваемые параметрами [8, 11]. Также возможно создание вычислителей кубатурных формул высокой размерности $n > 3$, оптимизированных по структуре вычислений и затрачиваемому ресурсу [13].

Исследование реализаций универсальной формулы. Для оценки погрешности вычисления были организованы символические вычисления в пакете MathCAD для точного значения интеграла. Для оценки погрешности метода в том же пакете вычислялись точные значения квадратуры по выбранному методу. Эти значения сравнивались с результатом, полученным с помощью блоков на ПЛИС. Результаты тестирования приведены в следующей таблице.

Таблица 1

Пор. мет.	$n=1$		$n=2$		$n=3$	
Мет. Ньютона-Котеса	Отн. погр.		Отн. погр.		Отн. погр.	
	Точ. знач.	Выч. знач.	Точ. знач.	Выч. знач.	Точ. знач.	Выч. знач.
	5,6%	6,0%	1,5%	1,3%	0,45%	0,64%
Мет. наив. точности	0,24%	0,32%	0,03%	0,04%	0,002%	0,003%

Изучение таблицы показывает, что полученные значения квадратур практически не отличаются от точных значений квадратур.

Заключение. В работе предлагается математический аппарат представления одного важного класса вычислительных задач (вычисление многомерных кубатурных формул [1]), основанный на представлении исходных формул в виде формул на пространственных гранулах [6]. Такие модели позволяют получать множество вариантов вычислительных структур не эвристическим путем, а с помощью эквивалентных преобразований исходных формул [19]. При преобразованиях изменяется структура, точность, число операций и другие свойства изучаемых формул, что позволяет целенаправленно искать требуемые оптимальные показатели структуры [16] для дальнейшей реализации с помощью стандартных программных средств [9].

Предложенная методика позволяет получить для сложных (многомерных) кубатурных формул большое количество вариантов структуры организации вычислений, лежащих между чисто параллельным и чисто конвейерным представлениями [8] в виде доступной для восприятия матричной модели [6].

В качестве перспектив развития предложенного подхода можно рассматривать распространение полученных теоретических и прикладных результатов на методы решения дифференциальных и интегральных уравнений [2], методы конечных элементов [3] и другие разделы, математически связанные с понятиями интегрирования с целью получения эффективных решений таких классов задач на реконфигурируемых вычислительных системах [8–10].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. *Зализняк В.Е.* Основы научных вычислений: Введение в численные методы для физиков. – М.: Едиториал УРСС, 2002.– 378 с.
3. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
4. *Бутенков С.А. Криша Н.С., Кривша В.В.* Современные процедуры анализа многомерных данных // Современное состояние естественных и технических наук. – 2015. – Вып. XIX. – С. 75-76.
5. *Рогозов Ю.И., Бутенков С.А., Нагоров А.Л., Бесланеев З.О* Модели данных на основе теории информационной грануляции // Сб. трудов Пятой Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2013, Красноярск, 19-25 сентября 2013 г. – Т. 2. – С. 395-398.

6. *Бутенков С.А., Нагоров А.Л., Бесланеев З.О.* Геометрический подход к построению моделей данных на основе теории грануляции // Вестник Дагестанского государственного технического университета. – 2014. – № 1. – Т. 32. – С. 47-55.
7. *Барский А.Б.* Параллельные процессы в вычислительных системах. Планирование и организация. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
8. *Бутенков С.А.* Структурная организация гранулированных вычислений при обработке данных на реконфигурируемых вычислительных системах // Известия ЮФУ: Технические науки. – 2018. – № 8 (202). – С. 250-262.
9. *Каляев И.А., Левин И.И., Семерников Е.А., Шмойлов В.И.* Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры. – Ростов-на-Дону: Изд.-во ЮНЦ РАН, 2009. – 344 с.
10. *Butenkov S., Zhukov A., Nagorov A., Krivsha N.* Granular Computing Models and Methods Based on the Spatial Granulation // XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 103. – P. 295-302.
11. *Бутенков С.А.* Высокопроизводительные технические средства и методы для реконфигурируемых вычислительных систем в оптико-электронных системах обработки данных // Матер. V Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы исследований в авионике: теория, обслуживание, разработки» – «АВИАТОР», 15-16 февраля 2018 г., ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж). – С. 112-114.
12. *Левин И.И., Дордопуло А.И., Гудков В.А.* Программирование реконфигурируемых вычислительных узлов на языке COLAMO: учеб. пособие. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – 114 с.
13. *Бутенков С.А., Семерников Е.А.* Оптимизация проектирования вычислительных систем реального времени на основе моделей массового обслуживания // Матер. Третьей Всероссийской научно-технической конференции "Суперкомпьютерные технологии" (СКТ-2014), Геленджик, 29 сентября – 4 октября 2014 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. – Т. 1. – С. 30-35.
14. *Бутенков С.А., Жуков А.Л.* Информационная грануляция на основе изоморфизма алгебраических систем // Сб. трудов Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина, Нальчик, 12-18 июля 2009 г. – С. 206-209.
15. *Бутенков С.А.* Грануляция и инкапсуляция в системах эффективной обработки многомерной информации // Искусственный интеллект. – 2005. – № 4. – С. 106-115.
16. *Butenkov S., Zhukov A., Nagorov A., Krivsha N.* Granular Computing Models and Methods Based on the Spatial Granulation // XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 103. – P. 295-302.
17. *Yao Y.Y.* Granular computing: basic issues and possible solutions // Proceedings of the 5th Joint Conference on Information Sciences. – 2000. – P. 186-189.
18. *Pedrysz W.* Granular Computing – the emerging paradigm // Journal of Uncertain Systems. – 2007. – Vol. 1, No. 1. – P. 38-61.
19. *Бутенков С.А., Кривша В.В., Кривша Н.С., Семененко А.В.* Математические основы гранулирующего подхода к моделированию процессов обработки данных на супервычислительных системах // Матер. Первой Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий», Махачкала, 3–5 февраля 2020 г. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2020. – С. 54-58.
20. *Бутенков С.А., Кривша Н.С., Кривша В.В*. Численные методы и математические модели гранулированных вычислений // Матер. XXII Международной научно-практической конференции "Academic Science – Problems and Achievements", North Charleston, USA, February 17–18, 2020. – Lulu Press, Inc., 627 Davis Drive, Suite 300, Morrisville, NC, USA, 27560. – P. 49-51.
21. *Бутенков С.А.* Методы информационной грануляции в параллельных вычислениях // Матер. 3-й Всероссийской научно-технической конференции «СКТ-2014», 29 сентября-4 октября 2014 г., Дивноморское, Геленджик. – Т. 1. – С. 99-104.
22. *Бутенков С.А., Нагоров А.Л., Бесланеев З.О., Хатунцев В.Н.* Геометрический подход к оценке квадратурных формул на гранулированных моделях // Известия Кабардино-Балкарского Государственного университета. – 2014. – Т. IV, № 2. – С. 17-22.

REFERENCES

1. *Sobol' I.M.* Mnogomernye kvadraturnye formuly i funktsii Khaara [Multivariable quadrature formulas and Haar functions]. Moscow: Nauka, 1969, 288 p.
2. *Zaliznyak V.E.* Osnovy nauchnykh vychisleniy: Vvedenie v chislennye metody dlya fizikov [Basics of Scientific Computing: Introduction to Numerical methods for the Physicists]. Moscow: Editorial URSS, 2002, 378 p.
3. *Samarskiy A.A., Mikhaylov A.P.* Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery [Mathematical Modelling: Basic issues, Techniques, Examples]. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit, 2001, 320 p.
4. *Butenkov S.A. Krivsha N.S., Krivsha V.V.* Sovremennye protsedury analiza mnogomernykh dannykh [The Contemporary Techniques of Multivariable Data Analysis], *Sovremennoe sostoyanie estestvennykh i tekhnicheskikh nauk* [Contemporary issues of Natural and Technical Sciences], 2015, Issue XIX, pp. 75-76.
5. *Rogozov Yu.I., Butenkov S.A., Nagorov A.L., Beslaneev Z.O*. Modeli dannykh na osnove teorii informatsionnoy granulyatsii [Data models based on Information Granulation Theory], *Cb. trudov Pyatoy Mezhdunarodnoy konferentsii «Sistemnyy analiz i informatsionnye tekhnologii» SAIT-2013, Krasnoyarsk, 19-25 sentyabrya 2013 g.* [System Analysis and Information Technologies» SAIT-2013, Krasnoyarsk, September 19-25, 2013], Vol. 2, pp. 395-398.
6. *Butenkov S.A., Nagorov A.L., Beslaneev Z.O.* Geometricheskiy podkhod k postroeniyu modeley dannykh na osnove teorii granulyatsii [Basics of geometrical approach to the granulated data models], *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Dagestan State Technical University], 2014, No. 1. Vol. 32, pp. 47-55.
7. Barskiy A.B. Parallel'nye protsessy v vychislitel'nykh sistemakh. Planirovanie i organizatsiya [The Parallel Computational Processes: Scheduling and Organization]. Moscow: Radio i svyaz', 1990, 256 p.
8. Butenkov S.A. Strukturnaya organizatsiya granulirovannykh vychisleniy pri obrabotke dannykh na rekonfiguriruemykh vychislitel'nykh sistemakh [The structure of granular computing units for the data processing on the configurable computers], *Izvestiya YuFU: Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2018, No. 8 (202), pp. 250-262.
9. *Kalyaev I.A., Levin I.I., Semernikov E.A., Shmoylov V.I.* Rekonfiguriruemye mul'tikonveyernye vychislitel'nye struktury [Configurable multi-conveyer computing structures]. Rostov-on-Don: Izd.-vo YuNTS RAN, 2009, 344 p.
10. *Butenkov S., Zhukov A., Nagorov A., Krivsha N.* Granular Computing Models and Methods Based on the Spatial Granulation, *XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science,* 2017, Vol. 103, pp. 295-302.
11. *Butenkov S.A.* Vysokoproizvoditel'nye tekhnicheskie sredstva i metody dlya rekonfiguriruemykh vychislitel'nykh sistem v optiko-elektronnykh sistemakh obrabotki dannykh [High performance devices and techniques for the reconfigurable computers in optical data processing systems], *Mater. V Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Aktual'nye voprosy issledovaniy v avionike: teoriya, obsluzhivanie, razrabotki» – «AVIATOR», 15-16 fevralya 2018 g., VUNTS VVS «VVA im. prof. N.E. Zhukovskogo i Yu.A. Gagarina» (g. Voronezh)* [In Proc. of V International Conference «Topical Questions of Investigations in Avionics: Theory, Design and Maintenance» – «AVIATOR», February 15-16, 2018, Air Force Academy named after N.E. Zhukovskij and Y.A. Gagarin (Voroneg, Russia)], pp. 112-114.
12. *Levin I.I., Dordopulo A.I., Gudkov V.A.* Programmirovanie rekonfiguriruemykh vy-chislitel'nykh uzlov na yazyke COLAMO: ucheb. posobie [Programming for the Reconfigurable Computers on COLAMO language: the Tutoruial]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2016, 114 p.
13. *Butenkov S.A., Semernikov E.A.* Optimizatsiya proektirovaniya vychislitel'nykh sistem real'nogo vremeni na osnove modeley massovogo obsluzhivaniya [Real-Time Computers Optimization Based on the Queuing Theory Models], *Mater. Tret'ey Vse-rossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Superkomp'yuternye tekhnologii" (SKT-2014), Gelendzhik, 29 sentyabrya – 4 oktyabrya 2014 g.* [In Proc. of III All-Russian Scientific Conference "Supercomputing Techniques " (SCT-2014), Gelendgik, September 29 – October 4, 2014]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2014, Vol. 1, pp. 30-35.

14. *Butenkov S.A., Zhukov A.L.* Informatsionnaya granulyatsiya na osnove izomorfizma algebraicheskikh sistem [Information granulation based on the algebraic systems isomorphism], *Sb. trudov Mezhdunarodnoy algebraicheskoy konferentsii, posvyashchennoy 80-letiyu so dnya rozhdeniya A.I. Kostrikina, Nal'chik, 12-18 iyulya 2009 g*. [Proc. of Annual international algebraic conf. dedicated to A.I. Kostrikin jubilee, Nalchik, July 12-18, 2009], pp. 206-209.
15. *Butenkov S.A.* Granulyatsiya i inkapsulyatsiya v sistemakh effektivnoy obrabotki mnogomernoy informatsii [Multivariable Data Processing by the Granulation and Encapsulation], *Iskusstvennyy intellect* [Artificial Intelligence], 2005, No. 4, pp. 106-115.
16. *Butenkov S., Zhukov A., Nagorov A., Krivsha N.* Granular Computing Models and Methods Based on the Spatial Granulation, *XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science,* 2017, Vol. 103, pp. 295-302.
17. *Yao Y.Y.* Granular computing: basic issues and possible solutions, *Proceedings of the 5th Joint Conference on Information Sciences,* 2000, pp. 186-189.
18. *Pedrysz W.* Granular Computing – the emerging paradigm, *Journal of Uncertain Systems,* 2007, Vol. 1, No. 1, pp. 38-61.
19. *Butenkov S.A., Krivsha V.V., Krivsha N.S., Semenenko A.V.* Matematicheskie osnovy granuliruyushchego podkhoda k modelirovaniyu protsessov obrabotki dannykh na supervychislitel'nykh sistemakh [Mathematical Issues of Granulated Data Models for the Supercomputing Processing], *Mater. Pervoy Vserossiyskoy konferentsii «Aktual'nye problemy matematiki i informatsionnykh tekhnologiy», Makhachkala, 3–5 fevralya 2020 g.* [In Proc. of I All-Russian Conference «Topic Problems of Mathematics and Information Technologies», Mahachkala, February 3–5, 2020]. Makhachkala: Izd-vo DGU, 2020, pp. 54-58.
20. *Butenkov S.A., Krivsha N.S., Krivsha V.V.* Chislennye metody i matematicheskie modeli granulirovannykh vychisleniy [Numerical method and models of granular computing], *Mater. XXII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Academic Science – Problems and Achievements", North Charleston, USA, February 17–18, 2020* [Proc. of XXII International conf. "Academic Science – Problems and Achievements", North Charleston, USA, February 17–18, 2020]. Lulu Press, Inc., 627 Davis Drive, Suite 300, Morrisville, NC, USA, 27560, pp. 49-51.
21. *Butenkov S.A.* Metody informatsionnoy granulyatsii v parallel'nykh vychisleniyakh [Information granulation approach for the parallel computers], *Mater. 3-y Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «SKT-2014», 29 sentyabrya-4 oktyabrya 2014 g., Divnomorskoe, Gelendzhik* [Proc. of 3-rd All-Russian Conference «SCT-2014», September 29 – October 4, 2014 г., Gelendgik], Vol. 1, pp. 99-104.
22. *Butenkov S.A., Nagorov A.L., Beslaneev Z.O., Khatuntsev V.N.* Geometricheskiy podkhod k otsenke kvadraturnykh formul na granulirovannykh modelyakh [Geometrical Approach to the Quadrature Formulas over the Granulated Data Evaluation], *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo Gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Kabardino-Balkarian State University], 2014, Vol. IV, No. 2, pp. 17-22.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. Г.В. Куповых.

Кривша Наталья Сергеевна – Южный федеральный университет; e-mail: natalie-home@yandex.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: +79185456456; к.т.н.; доцент.

Кривша Виталий Вадимирович – Научно-исследовательский центр супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров; e-mail: kvit_ok@mail.ru; г. Таганрог, Итальянский пер., 106; тел.: +79281339489; вед. программист; к.т.н.

Бутенков Сергей Андреевич – e-mail: saabmount@gmail.com; тел.: +79281420088; с.н.с.; к.т.н., доцент.

Krivsha Natalya Sergeevna – Southern Federal University; e-mail: natalie-home@yandex.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79185456456; cand. of eng; sc.; associate professor.

Krivsha Vitalij Vladimirovich – Supercomputers and Neurocomputers Research Center; e-mail: kvit_ok@mail.ru; Ital'yanskiy, 106, Taganrog, Russia; phone: +79281339489; senior programmer; cand. of eng. sc.

Butenkov Sergey Andreevich – e-mail: saabmount@gmail.com; phone: +79281420088; senior researcher; cand. of eng. sc.; associate professor.