Раздел III. Системы управления и нелинейная динамика

УДК 517.977.56 DOI 10.18522/2311-3103-2020-4-178-191

А.Г. Клово, Г.В. Куповых, И.А. Ляпунова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ СТРУНОЙ

Общепринято, что задачи оптимального управления или задачи проектирования системы определяют для заданного объекта или системы объектов управления закон или некоторую управляющую последовательность действий, которые обеспечивают максимум или минимум заданной совокупности критериев качества системы. При этом может рассматриваться задача быстродействия, т.е. задача о приведении системы в заданное состояние за наименьшее время. Также изучаются задачи минимизации заданного функционала при фиксированном времени управления системой. Оптимальное управление тесно связано с выбором наиболее рациональных режимов управления сложными объектами. Проблеме управления посвящено много работ, кроме того в настоящее время подобными исследованиями занимаются известные математические школы. В задачах с сосредоточенными параметрами исследуемые системы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями или их системами. В этом случае важную роль в таком исследовании играет принцип максимума Понтрягина. Для уравнений с частными производными говорят о системах с распределенными параметрами. В данной работе исследуется возможность синтеза оптимального управления одной системой с распределенными параметрами. Рассмотрена модель колебаний струны под воздействием управляющих функций в граничных условиях. Показана роль выбора минимизируемого функционала в создании возможностей синтеза оптимального управления. В этом случае осуществляется поиск управляющего воздействия в каждой точке временного промежутка, что приводит к возможности построения его в явном виде. Сформулированы условия, при которых существуют всюду оптимальные управления в соответствующих функциональных пространствах. В конкретной постановке задачи всюду оптимальное управление построено в явном виде.

Управление; колебания струны; синтез; оптимальное управление; управляющая функция; краевая задача.

A.G. Klovo, G.V. Kupovykh, I.A. Lyapunova

THE MATHEMATICAL PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF THE STRING

It is generally accepted that optimal control problems or system design problems determine for a given object or system of control objects a law or a certain control sequence of actions that provide a maximum or minimum of a given set of system quality criteria. In this case, the speed problem can be considered, i.e. the problem of bringing the system to a given state in the shortest time. We also study the problems of minimizing a given functional for a fixed time of system management. Optimal control is closely related to the choice of the most rational modes for managing complex objects. A lot of works has been devoted to the problem of control, in addition, well-known mathematical schools are currently engaged in such research. In problems with concentrated parameters, the systems under study are described by ordinary differential equations or their systems. In this case, the Pontryagin maximum principle plays an important role in this study. For partial differential equations, we talk about systems with distributed parameters. In this *paper, we investigate the possibility of synthesizing optimal control of a single system with distributed parameters. A model of string oscillation under the influence of control functions under boundary conditions is considered. The role of the choice of the functional to be minimized in creating opportunities for the synthesis of optimal control. In this case, the control action is searched for at each point of the time interval, which leads to the possibility of constructing it explicitly. The conditions for the existence of optimal control everywhere in the corresponding functional spaces are formulated. In a specific statement of the problem, everywhere optimal control is explicitly constructed.*

Control; string oscillation; synthesis; optimal control; control function; boundary value problem.

Введение. Задачи оптимального управления колебаниями струны рассматривались в ряде работ, например, в [1–7]. В работах В.А. Ильина, Е.И. Моисеева и их учеников рассмотрена серия задач управления струной. В частности, изучены различные типы граничных управлений струной на ее границе. При этом решения рассматривались в разнообразных функциональных пространствах. Рассмотрена серия задач, в которых оптимальное управление гиперболическими уравнениями может быть найдено в явном виде.

В работах [8–17] изучены условия, при которых существуют классические решения задач для гиперболических уравнений. При этом построены функциональные пространства, в которых существуют обобщенные решения и оптимальные управления.

Французские математики [18, 19] показали специфику задач управления колебаниями струны и минимальное время, за которое система может быть переведена в заданное состояние. Однако функционал, который минимизируется в этих задачах оказался, как показано в работах [20, 21], оказался не самым удачным для задач оптимального управления гиперболическими уравнениями.

В этой работе показано, что использование стандартного минимизируемого функционала не обеспечивает возможность построения оптимального управления на отдельных временных промежутках.

Целью исследования является установление возможности синтеза оптимального управления, т.е. возможности нахождения оптимального управления на отдельных временных участках. Найдены достаточные условия, при которых оптимальное управление может быть найдено на отдельных участках, вплоть до поточечного поиска. При таком подходе показана возможность построения оптимального управления в явном виде.

Начально краевая задача с управлением. Рассмотрим задачу, связанную с математическими моделями колебаний струны. Если управление струной происходит на ее границе, то можно рассмотреть вопрос о приведении струны в заданное состояние. В силу корректности обратных задач для гиперболического уравнения, в частности, для уравнения колебаний струны, задача о ее приведении в заданное состояние равносильна задаче о приведении в нулевое состояние, при котором равны нулю отклонения точек струны от состояния покоя и их скорости.

Пусть $u(t,x)$ – отклонение точки струны с координатой $x \in [0;l]$ в момент времени $t \in [0;T]$. Тогда функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

начальным

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u\big|_{x=0} = p(t)\,,\ u\big|_{x=l} = 0\,. \tag{3}$$

Задача заключается в том, чтобы подобрать управляющую функцию $u\big|_{x=0} = p(t)$ таким образом, чтобы в заданный момент времени $t = T$ значения отклонений точек струны от положения равновесия и скорости точек струны стали минимальными в соответствующей метрике.

В книге [2] рассматривается задача минимизации в этот момент времени функционала

$$J_1(p) = \int_0^l \left(\left(u(T,x)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=T} \right)^2 \right) dx\,. \tag{4}$$

В этой работе показано, что существует минимальный промежуток времени, в данном случае равный $T = \frac{2}{l}$, за который система может быть приведено в любое заданное состояние. Если временной промежуток меньше, то можно ставить задачу о минимизации функционала (4) или более подходящего. В этом случае надо формулировать теоремы существования и единственности решения поставленной задачи и оптимального управления.

Построение обобщенных решений поставленных задач. При решении задач, связанных с оптимальным управлением системами, как правило, приходится рассматривать последовательности решений и управляющих функций. Для существования предельных решений необходимо перейти к обобщенным решениям поставленных задач.

Следуя О.А. Ладыженской [1], рассмотрим вначале классические решения, которые гарантированно существуют, если выполнены условия $\varphi(x) \in C^2\left[0;l\right]$, $\psi(x) \in C^1\left[0;l\right]$, $p(t) \in C^2\left[0;T\right]$ гладкости и согласования: $\varphi(0) = p(0)$, $p'(0) = \psi(0$, $\varphi(l) = 0$, $\psi'(l) = 0$.

Пространством $W_2^1(D)$ мы будем называть замыкание рассматриваемой совокупности функций по норме

$$\left\| u(t,x) \right\|_{W_2^1(D)} = \left(\iint_D \left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Под этим понимается следующее. Если функции $\left\{u_n(t,x)\right\}$, $n \in N$ в каждой точке области $D = \left[0;l\right] \times \left[0;T\right]$ сходится к предельной функции $u(t,x)$, у которой существует конечная норма (5) и при этом выполнено $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| u(t,x) - u_n(t,x) \right\|_{W_2^1(D)} = 0$, то мы будем говорить, что $u(t,x) \in W_2^1(D)$.

Теперь перейдем к определению обобщенного решения задачи (1)–(3). Для этого рассмотрим множество $\dot{C}_1(D)$ таких достаточно гладких функций, которые могут быть отличны от 0 только лишь в области $D_\delta = \left[\delta, l-\delta\right] \times \left[0,T\right]$. При этом положительное δ может быть различным для разных функций. Рассмотрим замыкание введенных функций $\dot{C}_1(D)$ в пространстве $W_2^1(D)$ и обозначим его через $\overset{\circ}{C}_1(D)$.

Пусть $v(t,x) = p(t)\cdot\left(1 - x/l\right)$ и введем функцию

$$w(t,x) = u(t,x) - v(t,x). \tag{6}$$

Функция $w(t,x)$ равна 0 при $x = 0$ и при $x = l$ и является решением задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -p''(t)\left(1 - x/l\right), \tag{7}$$

$$w\big|_{t=0} = \varphi(x) - \varphi(0)\cdot\left(1 - x/l\right),\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) - \psi(1)\cdot\left(1 - x/l\right), \tag{8}$$

$$w\big|_{x=0} = 0,\quad w\big|_{x=1} = 0. \tag{9}$$

Естественно, что для решения задачи (1)–(3) достаточно решить задачу (7)–(9).

Определение 1. Функция $w(t,x) \in \overset{\circ}{C}_1(D)$ такая, что ее предельные значения при $t \to 0$ равны $\varphi(x) - \varphi(0)\cdot\left(1 - x/l\right)$ и для каждой функции $\sigma(t,x) \in \overset{\circ}{C}_2(D)$ выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + p'(t)\left(1 - x/l\right)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)dxdt = \int\limits_0^1 \psi(x)\sigma(0,x)dx \tag{10}$$

Называется обобщенным решением задачи (7)–(9).

Соотношение (10) получено умножением (7) на $\sigma(t,x)$ и интегрирования по области $D = \left[0;l\right]\times\left[0;T\right]$ с учетом дополнительных условий.

Невозможность синтеза оптимального управления для функционала (4). Рассмотрим конкретную задачу, когда оптимальное управление может быть построено в явном виде. Если взять $l = 2$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \pi\sin\dfrac{\pi x}{2}$, то функция $u_1(t,x) = 2\sin\dfrac{\pi x}{2}\cdot\sin\dfrac{\pi t}{2}$ является, очевидно, решением задачи (1)–(3) с $p(t) = 0$. Также несложно проверить, что функция

$$u_2(t;x) = \begin{cases} 0, & t - x \le 0, \\ p(t - x), & t - x > 0 \end{cases}$$

является решением при $0 \le t \le 2$ задачи (1)–(3) с нулевыми начальными условиями (2) и граничными условиями (3). Поэтому на этом временном промежутке функция $u(t;x) = u_1(t;x) + u_2(t;x)$ является задачи (1)–(3) при указанных условиях.

Пусть $T = 1$, тогда для полученного решения выполнено:

$$u(1;x) = \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi x}{2} + p(1 - x), & x \le 1, \\[2ex] 2\sin\dfrac{\pi x}{2}, & x > 1, \end{cases} \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=1} = \begin{cases} p'(1 - x), & x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \tag{11}$$

Если эти значения в (4), то мы придем к задаче минимизации функционала

$$\int\limits_0^1 \left(\left(2\sin\frac{\pi x}{2} + p(1 - x)\right)^2 + \left(p'(1 - x)\right)^2\right)dx + \int\limits_1^2 \left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 dx.$$

Сделаем замену $1-x=t$, после чего потребуется найти наименьшее значение интеграла

$$\int_0^1 \left(\left(2\cos\frac{\pi t}{2} + p(t) \right)^2 + \left(p'(t) \right)^2 \right) dt \cdot \tag{12}$$

Для минимизации функционала вида $J = \int_a^b F\left(x, f(x), f'(x)\right) dx$ используется уравнение Лагранжа $\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$, которое для (12) примет вид:

$$\int_0^1 \left(\left(p(t) \right)^2 + \left(p'(t) - \pi \sin \pi t \right)^2 \right) dt \cdot$$

Тем самым для нахождения оптимального управления на временном промежутке $t \in [0;1]$ мы приходим с учетом условий согласования к задаче Коши

$$p''(t) - p(t) = 2\cos\frac{\pi t}{2},\ p(0) = p'(0) = 0,$$

решение которой задачи запишется в виде

$$p(t) = \frac{8}{\pi^2 + 4}\left(cht - \cos\frac{\pi t}{2} \right) \cdot$$

Найдем теперь оптимальное управление системой на временном промежутке $t \in [0;2]$. В этом случае при $T=2$ выполнены условия:

$$u(2;x) = p(2-x), \tag{13}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=1} = -\pi \sin\frac{\pi x}{2} + p'(2-x) \cdot \tag{14}$$

Здесь мы приходим к нахождению наименьшего значения величины

$$\int_0^2 \left(p^2(2-x) + \left(-\pi \sin\frac{\pi x}{2} + p'(2-x) \right)^2 \right) dx \cdot$$

И после замены $2-x=t$ уравнение Лагранжа приводит нас к задаче Коши

$$p''(t) - p(t) = 2\cos\frac{\pi t}{2},\ p(0) = p'(0) = 0,$$

имеющее решение

$$p(t) = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}\left(\cos\frac{\pi t}{2} - cht \right) \cdot$$

Мы видим, что оптимальные управления на участках $t \in [0;1]$ и $t \in [0;2]$ не совпадают на общем временном участке. Это означает, что при минимизации функционала (4) синтез оптимального управление невозможен.

Пример синтеза оптимального управления для модифицированного функционала. Для задачи, рассмотренной в предыдущем пункте, рассмотрим оптимальное управление, минимизирующее функционал

$$J_2(p)=\int_0^l\left(\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=T}\right)^2+\left(\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T}\right)^2\right)dx \tag{15}$$

в те же промежутки времени.

Решение при $T=1$, указанные в (10), (11) при подстановке в функционал (15) дают интеграл

$$\int_0^1\left(\left(\pi\cos\frac{\pi x}{2}-p'(1-x)\right)^2+\left(p'(1-x)\right)^2\right)dx+\int_1^2\left(\pi\cos\frac{\pi x}{2}\right)^2dx.$$

После такой же замены $1-x=t$ мы придем к минимизации функционала

$$\int_0^1\left(\left(\pi\sin\frac{\pi t}{2}-p'(t)\right)^2+\left(p'(t)\right)^2\right)dt. \tag{16}$$

С помощью уравнения Лагранжа мы приходим к задаче Коши

$$p''(t)=\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi t}{2},\ p(0)=p'(0)=0,$$

решение которой задачи запишется в виде

$$p(t)=1-\cos\frac{\pi t}{2}.$$

При $T=2$ подстановка полученного решения и (15) приведет нас к минимизации интеграла

$$\int_0^2\left(\left(-p'(2-x)\right)^2+\left(-\pi\sin\frac{\pi x}{2}+p'(2-x)\right)^2\right)dx$$

и после замены $2-x=t$ получим:

$$\int_0^2\left(\left(p'(t)\right)^2+\left(-\pi\sin\frac{\pi t}{2}+p'(t)\right)^2\right)dt. \tag{17}$$

С помощью уравнения Лагранжа мы приходим к той же самой задаче Коши

$$p''(t)=\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi t}{2},\ p(0)=p'(0)=0,$$

решение которой также запишется в виде

$$p(t)=1-\cos\frac{\pi t}{2}.$$

Следовательно, в данном случае оптимальные управления на общем участке совпадают.

Эквивалентное определение оптимального управления. При изучении возможности синтеза оптимального управления для минимизируемого функционала (15) формализуем постановку задачи. Начнем с двух вариантов определения оптимального управления.

Определение 2. Управление $p^*(t)$ будем называть оптимальным среди множества допустимых управлений P на отрезке $[0;T]$, если оно реализует минимум функционала (15).

Для двух допустимых на отрезке $\left[0;T\right]$ управлений $p^*(t)$, $p(t)$ и соответствующих им обобщенных решений $u^*(t,x)$ и $u(t,x)$ задачи (1)–(3) рассмотрим функцию

$$K_T\left(u^*,u)\right)=\int_0^l\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\cdot\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial u^*}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{t=T}\right)dx\cdot \tag{18}$$

Определение 3. Управление $p^*(t)$ будем называть оптимальным среди множества допустимых управлений P, если для произвольного допустимого управления $p(t)$ и соответствующих решений $u^*(t,x)$ и $u(t,x)$ справедливо соотношение

$$K_T\left(u^*,u)\right)\le 0\cdot \tag{19}$$

Введем обозначение

$$f_T\left(u^*,u)\right)=\int_0^l\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{t=T}\right)dx$$

и отметим, что $K_T\left(u^*,u)\right)=f_T\left(u^*,u-u^*)\right)$, $J_2(p)=f_T\left(u,u)\right)$. В последнем соотношении $p(t)$ – произвольное управление, а $u(t,x)$ – соответствующее решение задачи (1)–(3). Как связаны между собой определения 2 и 3 показывает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть множество допустимых управлений P является выпуклым, тогда определения 2 эквивалентно определению 3.

Доказательство. Рассмотрим управление $p^*(t)$, оптимальное по определению 2. Докажем, что оно оптимально по определению 3. В самом деле, если это не так, то найдется управление $p(t)\in P$ такое что справедливо неравенство $K_T\left(u^*,u\right)>0$. Рассмотрим при $0\le\lambda\le 1$ управление

$$\overline{p}(t)=p^*(t)+\lambda\left(p(t)-p^*(t)\right), \tag{20}$$

которое является допустимым в силу выпуклости P. Соответствующее решение задачи (1)-(3) имеет вид $\overline{u}(t)=u^*(t,x)+\lambda\left(u(t,x)-u^*(t,x)\right)$ и для этого решения функционал (15) примет вид

$$\begin{gathered}J_2(\overline{p}(t))=J(p^*(t))-2\lambda K_T\left(u^*,u\right)+\\+\lambda^2\int_0^l\left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\Bigg|_{t=T}dx\cdot\end{gathered} \tag{21}$$

При $\lambda=0$ выражение (21) равно $J(p^*(t))$. В то же время само по себе выражение (21) является квадратным трехчленом относительно λ, вершина которого λ_0 положительна. Следовательно, на промежутке $\left(0;\lambda_0\right]$ квадратный трехчлен (21) принимает значения, меньшие, чем $J(p^*(t))$. Это противоречит предположению, что $p^*(t)$ оптимально по определению 2. Поэтому из оптимальности по определению 2 следует оптимальность по определению 3.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть теперь $p^*(t)$ является оптимальным в смысле определения 3. Тогда при $\lambda = 1$ выполнено равенство $\overline{p}(t) = p^*(t) + 1\cdot\left(p(t) - p^*(t)\right) = p(t)$ и $J(p^*(t)) < J(p(t))$ в силу (19) и (21). Теорема доказана.

Критерий возможности синтеза оптимального управления. Возможность синтеза оптимального управления, т.е. нахождение такого управления на различных промежутках времени тесно связана с понятием всюду оптимального управления.

Определение 4. Всюду оптимальным на промежутке $\left[0;T\right]$ называется управление $\overline{p}(t)$, оптимальное на каждом промежутке $\left[0;\tau\right]$ при $0 < \tau \le T$.

Уточним, что понимается под синтезом управления. Пусть задано управление $p_{12}(t)$ на отрезке $\left[t_1;t_2\right]$ и управление $p_{23}(t)$ на отрезке $\left[t_2;t_3\right]$. Если при этом $p_{12}(t_2) = p_{23}(t_2)$, то синтезированным этими управлениями мы будем называть управление $p_{13}(t)$ на отрезке $\left[t_1;t_3\right]$, обладающее свойством

$$\left(p_{13}(t)\right)' = \begin{cases} \left(p_{12}(t)\right)', \ t_1 < t < t_2,. \\ \left(p_{23}(t)\right)', \ t_2 < t < t_3. \end{cases} \tag{22}$$

Пусть рассматривается задача оптимального управления системой на временном промежутке $\left[0;T\right]$. Рассмотрим следующие условия:

1. Множеством допустимых управлений P – выпуклое множество, содержащее нулевое управление.
2. Под оптимальным понимается управление, при котором достигается минимум заданного квадратичного, положительно определенного функционала.
3. Существует число $\delta > 0$, обладающее тем свойством, что на любом промежутке $\left[t_1;t_2\right]$, принадлежащем $\left[0;T\right]$, таком, что $t_2 - t_1 < \delta$, существует единственное оптимальное управление.
4. Если $p^*_{0,t_1}(t)$ является оптимальным управлением на промежутке $\left[0;t_1\right]$, $p^*_{t_1t_2}(t)$ – оптимальным на $\left[t_1;t_2\right]$, то синтезированное управление $p^*_{0,t_2}(t)$ будет оптимальным на объединенном промежутке $\left[0;t_2\right]$.

Теорема 2. Пусть для задачи (1)–(3) и произвольного $T > 0$ выполнены условия 1.-4. Тогда для нее существует единственное всюду оптимальное управление $\overline{p}(t)$.

Доказательство. Точками $\left\{t_i\right\}$, $i = 0,1,\ldots,N$ разделим отрезок $\left[0;T\right]$ на N отрезков таким образом, что каждый из них по длине меньше $\delta > 0$ из пункта 3. Построим оптимальное управление на каждом из этих промежутков. На первом из них берем начальные условия (2), а затем на каждом последующем промежутке в качестве начальных берем конечные условия предыдущего промежутка. Докажем, что полученное после синтеза таких управление $\overline{p}(t)$ является искомым всюду оптимальным управлением.

Возьмем произвольные отрезки $[a;b]$ и $[b;c]$, где $0 \le a < b \le T$. Пусть $p^*_{ab}(t)$ является оптимальным управлением на $[a;b]$ при некоторых начальных условиях в точке a, а $p^*_{bc}(t)$ – оптимальным управлением на $[b;c]$ с согласованными начальными условиями в b. При этом соответствующими решениями задачи (1)–(3) являются, функции $u^*_{ab}(t,x)$ и $u^*_{bc}(t,x)$. При этом синтезированное на $[a;c]$ управление обозначим как $p^*(t)$ и соответствующее ему решение – $u^*(t,x)$.

Рассмотрим произвольное управление $p(t)$ на промежутке $[a;c]$ с теми же начальными условиями и соответствующее решение $u(t,x)$. Заметим, что с учетом введенных выше обозначений:

$$K_c\left(u^*,u)\right) = f_c\left(u^*,u^*-u\right) = f_c\left(u^*,u^*_0-u_0\right) + f_c\left(u^*,u^*-u^*_0-(u-u_0)\right). \quad (23)$$

В качестве $u_0(t,x)$ возьмем решение, соответствующее управлению $p_0(t)$, определяемому соотношением

$$\left(p_0(t)\right)' = \begin{cases} \left(p(t)\right)', & a \le t \le b, \\ 0, & b < t \le c, \end{cases}$$

а в качестве $u^*_0(t,x)$ возьмем решение, соответствующее управлению $p^*_0(t)$, определяемому соотношением

$$\left(p^*_0(t)\right)' = \begin{cases} \left(p^*(t)\right)', & a \le t \le b, \\ 0, & b < t \le c. \end{cases}$$

Из оптимальности $p^*(t)$ следует неравенство

$$f_c\left(u^*,u^*-u^*_0-(u-u_0)\right) \le 0$$

и нам осталось доказать, что первое слагаемое в (23) $f_c\left(u^*,u^*_0-u_0\right)$ не положительно. Пусть это не так и $f_c\left(u^*,u^*_0-u_0\right) > 0$. Тогда силу условия 1. допустимое управление $\tilde{p}_{t_1}(t) = p^*_{t_1}(t) + \lambda\left(p_{t_1}(t) - p^*_{t_1}(t)\right)$ при $0 \le \lambda \le 1$ и соответствующее решение $\tilde{u}(t,x)$ порождают квадратный трехчлен $f_c\left(\tilde{u},\tilde{u}\right) = f_c\left(u^*,u^*\right) - 2\lambda f_c\left(u^*,u^*_0-u_0\right) + \lambda^2 f_c\left(u^*_0-u_0,u^*_0-u_0\right)$, который при достаточно малых положительных λ удовлетворяет неравенству $f_c\left(\tilde{u},\tilde{u}\right) < f_c\left(u^*,u^*\right)$, что противоречит условию 4.

В итоге $K_c\left(u^*,u)\right) \le 0$ и, с учетом условия 3 полученное управление будет всюду оптимальным. Теорема доказана.

Существование всюду оптимального управления в задаче о колебаниях струны. Несложно проверить, что для задачи (1)–(3) условия 1.-3. выполнены. Проверим выполнение свойства 4. при условии минимизации функционала (15).

Пусть функция $p_{0,t_1}(t)$ является в этом плане оптимальной в области $D_{0,t_1}=[0,l]\times[0,t_1]$, а функция $p_{t_1,t_2}(t)$ – оптимальна в $D_{t_1,t_2}=[0,l]\times[t_1,t_2]$. Нам надо убедиться в том, что синтезированное управление оптимально в объединенной области $D_{0,t_2}=[0,l]\times[0,t_2]$.

Умножим обе части уравнения (1) на $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и проинтегрируем по области D_{t_1,t_2}, $0\le t_1<t_2\le T$. Заметим, что

$$\iint\limits_{D_{t_1,t_2}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dtdx=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{t_1,t_2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)dtdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}dx,$$

$$\iint\limits_{D_{t_1,t_2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}dtdx=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}dt-\iint\limits_{D_{t_1,t_2}}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}dtdx=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}dt-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{t_1,t_2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dtdx=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}dx,$$

поэтому

$$\int\limits_0^l\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}dx=2\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}dt.$$

Отсюда, с учетом нулевых граничных условий на правом конце струны и управляющей функции на левом, имеем

$$\int\limits_0^l\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}dx=-2\int\limits_{t_1}^{t_2}p'(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}dt. \qquad (24)$$

Полученная формула демонстрирует закон сохранения энергии при отсутствии управляющей функции. Левая часть равна удвоенной разности энергии струны в моменты времени $t=t_2$ и $t=t_1$. В этой ситуации нам необходимо исследовать величину $p'(t)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}$ в формуле (24). Пусть в результате оптимального управления $p_{0,t_1}(t)$ решение задачи (1)-(3) при $0\le x\le l$ приняло значения

$$u\big|_{t=t_1}=\varphi_{t_1}(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_1}=\psi_{t_1}(x).$$

Если величина t_2-t_1 достаточно мала, искомые значения решения при $x=0$ на промежутке $[t_1,t_2]$ зависят от значений $\varphi_{t_1}(x)$, $\psi_{t_1}(x)$ на промежутке $0\le x\le t_2-t_1$ и от управляющей функции на этом временном промежутке. Решение в области $[0,t_2-t_1]\times[t_1,t_2]$ представим в виде суммы $u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x)$. Здесь

$$u_1(t,x)=\frac{\varphi_{t_1}(x)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{t-x}\psi_{t_1}(\xi)d\xi,\ u_2(t,x)=p_{t_1,t_2}(t-x),$$

откуда на этом временном участке

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=\frac{\left(\varphi_{t_1}(t)\right)'}{2}-\frac{\psi_{t_1}(t)}{2}-\left(p_{t_1,t_2}(t)\right)',\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=0}=\left(p_{t_1,t_2}(t)\right)'.$$

Следовательно, исследуемая величина имеет вид:

$$p'(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=\left(\frac{\left(\varphi_{t_1}(t)\right)'}{2}-\frac{\psi_{t_1}(t)}{2}-\left(p_{t_1,t_2}(t)\right)'\right)\cdot\left(p_{t_1,t_2}(t)\right)',$$

и ее наибольшее значение принимается при

$$\left(p_{t_1,t_2}(t)\right)'=\frac{\left(\varphi_{t_1}(t)\right)'-\psi_{t_1}(t)}{4}. \tag{25}$$

Так как возмущения при свободных колебаниях струны возмущения распространяются вдоль характеристик, то уменьшение функционала (15) на временном промежутке $\left[t_1,t_2\right]$ при достаточно малой величине t_2-t_1 никак не связано с его минимизацией на промежутке $\left[0,t_1\right]$. Следовательно, условие 4 выполнено и всюду оптимальное управление задачи (1)–(3) существует.

Вид всюду оптимального управления в задаче о колебаниях струны. Перейдем к построению в явном виде оптимального управления струной в задаче (1)–(3).

Отметим, что в координатах $\xi=x-t$, $\eta=x+t$ уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0. \tag{26}$$

Если в этих координатах обе части (26) проинтегрировать по прямоугольнику с вершинами $M(\xi_1;\eta_1)$, $N(\xi_1+\xi_1;\eta_1)$, $P(\xi_1+\xi_1;\eta_1+\eta_2)$, $P(\xi_1;\eta_1+\eta_2)$, то мы придем к соотношению

$$u\left(\xi_1;\eta_1\right)+u\left(\xi_1+\xi_1;\eta_1+\eta_2\right)=u\left(\xi_1+\xi_1;\eta_1\right)+u\left(\xi_1;\eta_1+\eta_2\right).$$

Отсюда следует, что производная по одной из характеристик не меняется при движении вдоль другой характеристики в той области, где выполнено (26).

Формула (25) показывает вид всюду оптимального управления на временном участке $\left[0,T\right]$ при $T=l$. Здесь надо учесть, что скорость распространения волны в данном случае равна 1. На следующем промежутке надо учитывать, что вследствие отражения от правой границы у вектора $\left\{\varphi';\psi\right\}$ меняет знак вторая компонента. Поэтому на временном промежутке $\left[0,T\right]$ при $T=2l$ всюду оптимальное управление определяется формулой

$$\left(p_{0,2l}(t)\right)'=\frac{\left(\varphi(l-|l-t|)\right)'-sign(l-t)\psi(l-|l-t|)}{4}. \tag{27}$$

С помощью управляющей функции, производная от которой определяется формулой (27), произвольное начальное состояние струны за время $2l$ приводится в состояние покоя.

Заключение. Построена и исследована задача оптимального управления колебаниями струны. Исследованы функциональные пространства, в которых существуют обобщенные решения поставленных задач.

Доказан ряд теорем о существовании и единственности соответствующих оптимальных управлений. При этом сформулированы достаточные условия, при которых оптимальное управление можно автономно находить на различных временных промежутках. Это позволяет свести задачу к поиску такого управления в каждой точке временного промежутка. В итоге удалось получить всюду оптимальное управление в явном виде.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук. – 2005. – 60:6 (366). – С. 89-114.
2. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А., Фролов А.А.* Граничное управление смещением процессом колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2019. – № 160. – С. 74-84.
3. *Моисеев Е.И., Фролов А.А*. Граничное управление процессом колебаний струны при условии сопротивления среды на правом конце за время, меньшее критического // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 555-566.
4. *Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Попиванов Н.И., Холомеева А.А.* Разрешимость нелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа с различными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 10. – С. 541-552.
5. *Ильин В.А.* Избранные труды: в 2 т. Т. 1. – М.: Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. – 727 с.
6. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при заданной упругой силе на другом конце // Тр. ИММ УрО РАН. – 2011. – 17:2. – С. 151-158.
7. *Попов А.Ю.* Минимизация вариации производной граничного управления гашением колебаний струны с одним закрепленным концом // Доклады РАН. – 2006. – 409:1. – С. 22-25
8. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
9. *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболических уравнений. – М.: Гостехиздат, 1953. – 282 с.
10. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
11. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
12. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1953. – 360 с.
13. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. – М.: Наука, 1983. – 432 с.
14. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – 368 с.
15. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи математических наук. – 1960. – 15:2 (92). – С. 97-154.
16. *Егоров Ю.В.* Некоторые вопросы теории оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 887-904.
17. *Егоров Ю.В.* Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах // Матем. сб. – 1964. – Т. 64 (106), № 1. – С. 79-101.
18. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 335 с.
19. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

20. *Клово А.Г., Гончаров А.В*. Условия всюду-оптимальности управления одной системой с распределенными параметрами // Матер. IV Международной научной конференции «Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». Т. 1. Физико-математические и технические науки. Ч. 1. – Донецк: ДонНУ, 2019. – С. 27-30.
21. *Клово А.Г., Куповых Г.В., Ляпунова И.А.* О возможности синтеза оптимального управления колебаниями струны // Международная научная конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. – С 72-73.

REFERENCES

1. *Il'in V.A., Moiseev E.I.* Optimizatsiya granichnykh upravleniy kolebaniyami struny [Optimization of boundary controls for string vibrations], *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical Sciences], 2005, 60:6 (366), pp. 89-114.
2. *Moiseev E.I., KHolomeeva A.A., Frolov A.A.* Granichnoe upravlenie smeshcheniem protsessom kolebaniy pri granichnom uslovii tipa tormozheniya za vremya, men'shee kriticheskogo [Boundary control of the displacement of the oscillation process under a boundary condition of the braking type for a time less than the critical one], *Itogi nauki i tekhniki. Seriya «Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory»* [Results of science and technology. Series “Modern mathematics and its applications. Thematic review”], 2019, No. 160, pp. 74-84.
3. *Moiseev E.I., Frolov A.A.* Granichnoe upravlenie protsessom kolebaniy struny pri uslovii soprotivleniya sredy na pravom kontse za vremya, men'shee kriticheskogo [Boundary control of the string oscillation process under the condition of the medium resistance at the right end for a time less than the critical one], *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 2019, Vol. 55, No. 4, pp. 555-566.
4. *Moiseev E.I., Moiseev T.E., Popivanov N.I., Kholomeeva A.A.* Razreshimost' nelokal'nykh kraevykh zadach dlya uravneniya smeshannogo tipa s razlichnymi kraevymi usloviyami [Solvability of non-local boundary value problems for a mixed-type equation with different boundary conditions], *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 2018, Vol. 54, No. 10, pp. 541-552.
5. *Il'in V.A.* Izbrannye trudy [Selected works]: in 2 vol. Vol. 1. Moscow: Izd-vo OOO «Maks-press», 2008, 727 p.
6. *Moiseev E.I., Kholomeeva A.A.* Optimal'noe granichnoe upravlenie smeshcheniem na odnom kontse struny pri zadannoy uprugoy sile na drugom kontse [Optimal boundary control of displacement at one end of the string for a given elastic force at the other end], *Tr. IMM UrO RAN* [Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN], 2011, 17:2, pp. 151-158.
7. *Popov A.Yu.* Minimizatsiya variatsii proizvodnoy granichnogo upravleniya gasheniem kolebaniy struny s odnim zakreplennym kontsom [Minimization of the variation of the derivative of the boundary control for damping the vibrations of a string with one fixed end], *Doklady RAN* [Reports of the Russian Academy of Sciences], 2006, 409:1, pp. 22-25
8. *Ladyzhenskaya O.A.* Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1973, 407 p.
9. *Ladyzhenskaya O.A.* Smeshannaya zadacha dlya giperbolicheskikh uravneniy [Mixed problem for hyperbolic equations]. Moscow: Gostekhizdat, 1953, 282 p.
10. *Sobolev S.L.* Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1988, 336 p.
11. *Mikhaylov V.P.* Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh [Differential equations in partial derivatives]. Moscow: Nauka, 1976, 448 p.
12. *Petrovskiy I.G.* Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi [Lectures on partial differential equations]. Moscow; Leninsrad: GITTL, 1953, 360 p.
13. *Steklov V.A.* Osnovnye zadachi matematicheskoy fiziki [Main problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1983, 432 p.
14. *Krylov A.N.* O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh [On some differential equations of mathematical physics that have applications in technical issues]. Moscow; Leninsrad: GITTL, 1950, 368 p.

15. *Il'in V.A.* O razreshimosti smeshannykh zadach dlya giperbolicheskogo i parabolicheskogo uravneniy [On the solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations], *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical Sciences], 1960, 15:2 (92), pp. 97-154.
16. *Egorov Yu.V.* Nekotorye voprosy teorii optimal'nogo upravleniya [Some questions of optimal control theory], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of computational mathematics and mathematical physics], 1963, Vol. 3, No. 5, pp. 887-904.
17. *Egorov Yu.V.* Neobkhodimye usloviya optimal'nosti upravleniya v banakhovykh prostranstvakh [Necessary conditions for optimal control in Banach spaces], *Matem. sb*. [Mathematical collection], 1964, Vol. 64 (106), No. 1, pp. 79-101.
18. *Lattes R., Lions Zh.-L.* Metod kvaziobrashcheniya i ego prilozheniya [The method of quasi-conversion and its applications]. Moscow: Mir, 1970, 335 p.
19. *Lions Zh.-L.* Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi [Optimal control of systems described by partial differential equations]. Moscow: Mir, 1972, 414 p.
20. *Klovo A.G., Goncharov A.V.* Usloviya vsyudu-optimal'nosti upravleniya odnoy sistemoy s raspredelennymi parametrami [Conditions for everywhere-optimal control of a single system with distributed parameters], *Mater. IV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Donetskie chteniya 2019: obrazovanie, nauka, innovatsii, kul'tura i vyzovy sovremennosti». T. 1. Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Proceedings of the IV International scientific conference "Donetsk read 2019: education, science, culture, innovations and challenges". Vol. 1. Physico-mathematical and technical Sciences. Part 1]. Donetsk: DonNU, 2019, pp. 27-30.
21. *Klovo A.G., Kupovykh G.V., Lyapunova I.A.* O vozmozhnosti sinteza optimal'nogo upravleniya kolebaniyami struny [On the possibility of synthesizing optimal control of string vibrations], *Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam. Tezisy dokladov* [International scientific conference on differential equations and dynamical systems. Thesis of reports]. Vladimir: Izd-vo VlGU, 2020, pp. 72-73.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.Х. Аджиев.

Куповых Геннадий Владимирович – Южный федеральный университет; e-mail: kupovykh@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89289543642; д.ф.-м.н.; профессор.

Клово Александр Георгиевич – e-mail: klovo_ag@mail.ru; тел.: 89281221064; к.ф.-м.н.; доцент.

Ляпунова Ирина Артуровна – e-mail: ialyapunova@sfedu.ru; тел.: 89034310026; к.ф.-м.н.; доцент.

Kupovykh Gennady Vladimirovich – Southern Federal University; e-mail: kupovykh@sfedu.ru; 44, Nekrasovsky street, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79289543642; dr. of phys. and math. sc.; professor.

Klovo Alexander Georgievich – e-mail: klovo_ag@mail.ru; phone: +79281221064; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.

Lyapunova Irina Arturovna – e-mail: ialyapunova@sfedu.ru; phone: +79034310026; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.