

Кравченко Юрий Алексеевич – e-mail: yakravchenko@sfedu.ru; кафедра систем автоматизированного проектирования; доцент.

Kureychik Vladimir Victorovich – Southern Federal University; e-mail: vkur@sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy lane, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371651; the department of computer aided design; head of department; professor.

Bova Victoria Victorovna – e-mail: vvbova@sfedu.ru; the department of computer aided design; associate professor.

Kravchenko Yury Alekseevich – e-mail: yakravchenko@sfedu.ru; the department of computer aided design; associate professor.

УДК 519.178

DOI 10.18522/2311-3103-2020-4-21-31

Е.М. Герасименко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЧАСТИЧНО РЕВЕРСИВНОГО ПОТОКА МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ*

Данная статья посвящена разработке алгоритма решения задачи моделирования частично реверсивного потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети. Задача нахождения потока минимальной стоимости является центральной задачей при планировании перевозок и эвакуационном моделировании. Актуальность такого рода задач обусловлена необходимостью поиска оптимальных с точки зрения стоимости маршрутов перевозок и передачи по ним максимального потока. Данная статья посвящена решению данной задачи в нечетких условиях, так как аппарат теории нечетких множеств позволяет задавать параметры сети, такие как пропускные способности участков дорог, стоимости перевозок в нечетком виде. Такой способ представления удобен в ситуациях, когда имеет место нехватка данных о моделируемом объекте, их лингвистический характер, погрешности в измерениях и пр. В задачах эвакуационного моделирования, которые происходят спонтанно, также наблюдается нехватка точной информации о пропускных способностях и стоимостях перевозок. Концепция контрпотока, используемая в статье, используется для увеличения суммарной пропускной способности путем реверсирования движения. Техника реверсирования движения является современной методикой увеличения передаваемого потока путем увеличения выходной пропускной способности сети. Применение реверсирования движения позволяет освободить загруженные участки дороги и перераспределить движение в сторону пустых дорог, устраняя заторы и «пробки» на дорогах. Предложен метод оперирования нечеткими числами, не приводящий к «размытию» границ результирующего числа и позволяющий оперировать нечеткими границами на последних итерациях, в то время как на остальных предшествующих итерациях производятся вычисления только с центрами нечетких чисел. Рассмотрен численный пример, который иллюстрирует работу предложенного алгоритма.

Частично реверсивный поток, нечеткий поток минимальной стоимости, транспортные сети.

E.M. Gerasimenko

SOLUTION OF THE PARTIALLY REVERSAL MODELLING TASK OF THE MINIMUM COST FLOW FINDING IN FUZZY CONDITIONS

This article is devoted to the development of an algorithm for solving the problem of modeling a partially reversal flow of minimum cost in a fuzzy transportation network. The minimum cost flow problem is a central problem in transportation planning and evacuation modelling. The relevance of these tasks is due to necessity to find optimal transportation routes in terms of cost and

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00559 а.

transfer the maximum flow along them. This article is devoted to solving this problem in fuzzy conditions, since the apparatus of the theory of fuzzy sets allows you to set network parameters, such as the capacity of road sections, the cost of transportation in a fuzzy form. This method of assignment is convenient in situations where there is a lack of data on the modeled object, linguistic nature of data, measurement errors, etc. In the problems of evacuation modelling, which occur spontaneously, there is also a lack of accurate information about the capacity and cost of transportation. The contraflow concept, which was used in the paper, allows increasing the total flow by reversing traffic. The lane reversal technique is a modern technique for increasing the transmitted traffic by increasing the network output capacity. The use of traffic reversal allows releasing congested sections of the road and redistributing traffic towards unloaded roads, eliminating congestion and "traffic jams" on the roads. A method of operating with fuzzy numbers is proposed, which does not lead to "blurring" of the boundaries of the resulting number and allows operating with fuzzy boundaries at the last iterations, while at the rest of the previous iterations, calculations are performed only with the centers of fuzzy numbers. A numerical example is considered that illustrates the operation of the proposed algorithm.

Partially reversal flow, fuzzy minimum cost flow, transportation networks.

Введение. Задача нахождения потока минимальной стоимости является одной из важнейших в теории потоков, поскольку позволяет оптимизировать стоимость перевозимого груза. Особое значение она имеет в задачах, где необходимо найти оптимальные пути перевозки заданного или максимального количества груза. В основе задачи лежит поиск так называемого кратчайшего пути (если расчетным параметром является время), или пути минимальной стоимости (если требуется минимизировать стоимость перевозки). Поиск пути осуществляется с помощью различных алгоритмов, среди которых наиболее известными и широко используемыми являются алгоритмы авторов Э. Дейкстра, Р. Беллман и Л. Форд, Р. Флойд и С. Уоршалл, Б. Левит и Д. Джонсон [1]. Алгоритмы отличаются временной сложностью, возможностью работы с отрицательными весами ребер, поиска кратчайшего пути между каждой парой вершин графа и пр. В задачах эвакуационного моделирования эксперт часто сталкивается с задачами необходимости перемещении максимального количества эвакуированных из опасных зон в безопасные укрытия за минимальное возможное время. Принимая время передачи потока за стоимость, исследователь приходит к классической задаче нахождения потока минимальной стоимости.

При моделировании потоков и эвакуационном моделировании нередко возникает необходимость решения потоковых задач в условиях неполноты и неточности информации. Данные факторы обусловлены нехваткой данных о моделируемых объектах и их параметрах, уникальностью постановок задач, отсутствием статистических данных, погрешностями и ошибками в измерениях. Иногда можно только приблизительно оценить пропускные способности и стоимости перевозок. В задачах эвакуационного моделирования данные о параметрах сети могут отсутствовать, и эксперту необходимо принимать решение на основе имеющейся неполной информации. В связи с этим некоторые задачи нахождения минимального потока в ряде случаев следует решать с использованием аппарата теории нечетких множеств [2–3]. Представляя параметры сети в виде нечетких чисел различной формы, лица, принимающие решения, могут получать более корректные и чувствительные к изменениям окружающей среды решения.

В задачах эвакуационного моделирования, основанных на теории потоков, имеет место техника реверсирования движения, которая представляет собой усовершенствованный метод, позволяющий увеличивать значения транспортируемого потока за счет увеличения исходящей пропускной способности сети. Когда движение реверсируется, это позволяет освободить загруженные участки дороги и перераспределить движение, направив его в сторону незагруженных участков дорог, тем самым устраняя заторы на дорогах. Концепция маршрутизации эвакуации по полосам была предложена в [4–5].

Комплексный обзор потоковых задач, основанный на концепции встречного потока, был проведен в [4]. Авторы Dhamala и Ryakurel [6] разработали методы нахождения контрпотока и включили свои разработки в механизм поиска классических потоков в транспортных сетях с целью увеличения общей исходящей пропускной способности. Кроме того, ими была введена концепция частичного встречного потока для изменения дуг моделируемой сети до требуемой пропускной способности [6–9]. Этот метод решает проблему с «пробками» позволяя освободить участки высокой загруженности.

Задачи нахождения потока минимальной стоимости в нечётких условиях описаны в литературе авторами [10–14], однако отсутствуют методы решения подобных задач с учетом реверсирования движения. Авторами [15–16] рассмотрены методы нахождения нечёткого лексикографического потока и потока наискорейшего прибытия. Таким образом, в данной статье разработан метод нахождения потока минимальной стоимости в нечёткой транспортной сети с частичным реверсированием движения.

Постановка задачи и разработанный алгоритм. Рассмотрим постановку задачи нахождения потока минимальной стоимости в нечётких условиях и в условиях частичного реверсирования движения (1)–(3).

$$\sum_{(x_i, x_j)} \tilde{c}_{ij} \xi_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{x_j \in \Gamma(x_i)} \xi_{ij} = \sum_{x_k \in \Gamma^{-1}(x_i)} \xi_{ki} = \begin{cases} \tilde{\rho}, x_i = s, \\ -\tilde{\rho}, x_i = t, \\ \tilde{0}, x_i \neq s, t. \end{cases} \quad (2)$$

$$0 \leq \xi_{ij} \leq \tilde{u}_{ij}, \forall (x_i, x_j) \in \tilde{A}. \quad (3)$$

Представим разработанный алгоритм поиска потока минимальной стоимости в нечетких условиях.

Этап 1. Выполняем построение модифицированной сети для реверсирования дуг.

Нечеткая модифицированная транспортная сеть с учетом частичного реверсирования движения – это такая сеть, в которой исходные пропускные способности дуг графа \tilde{u}_{ij} , \tilde{u}_{ji} заменяются новой пропускной способностью $\tilde{u}_{ij}^{\mu} = \tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{ji}$, а стоимость прохождения единицы потока по дуге равна:

$$\tilde{c}_{ij}^{\mu} = \begin{cases} \tilde{c}_{ij}, (i, j) \in \tilde{A}, \\ \tilde{c}_{ji}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Этап 2. Строим остаточную сеть для модифицированной сети.

Модифицированная остаточная сеть $\tilde{G}^{\mu r}$ с учетом частичного реверсирования движения по дугам строится следующим образом:

2.1. если для потока выполняется условие $\xi_{ij}^{\mu} < \tilde{u}_{ij}^{\mu}$, то остаточная пропускная способность для прямой дуги определяется как $\tilde{u}^{\mu r} = \tilde{u}_{ij}^{\mu} - \xi_{ij}^{\mu}$.

2.2. если для потока выполняется условие $\xi_{ij}^{\mu} > \tilde{0}$, то остаточная пропускная способность противоположной дуги определяется как $\tilde{u}^{\mu r} = \xi_{ij}^{\mu}$.

Этап 3. Поиск пути.

Ищем путь минимальной стоимости $\tilde{p}^{\mu r}$ в остаточной модифицированной сети $\tilde{G}^{\mu r}$ [11–12].

а). Пометка вершины-источника = 0, пометки остальных вершин считаются равными бесконечности.

Все вершины сети помечаем как непосещенные.

б). Если все вершины сети посещены, алгоритм заканчивает свою работу.

В противном случае, вершина x с минимальной пометкой выбирается из не-посещенных вершин.

Мы рассматриваем все возможные маршруты, в которых x – предпоследняя вершина. Вершины, к которым ведут ребра из x , являются соседними для вершины x . Для каждого соседа вершины x , кроме тех, которые помечены как посещенные, рассмотрим новый путь, равный сумме значений текущей пометки вершины x и стоимости ребра, соединяющего x с соседними вершинами.

Если полученное значение стоимости меньше, чем пометка соседней вершины, заменяем ее пометку на полученное значение стоимости. Рассмотрев все соседние вершины, отмечаем x как помеченную и повторяем шаг алгоритма.

3.1. Если путь $\tilde{p}^{\mu r}$ найден, переходим к шагу 4.

3.2. Если путь $\tilde{p}^{\mu r}$ не найден, максимальный поток минимальной стоимости получен, переход к этапу 6.

Этап 4. Передача потока.

Передаем поток в соответствии с минимальным значением из пропускных способностей минимального пути, равный пропускной способности дуги в модифицированной остаточной сети $\tilde{\delta}^{\mu r} = \min[\tilde{u}_{ij}^{\mu r}]$.

Этап 5. Обновление потока.

Пересчитываем значения потоков и переходим к шагу 2.

1) для дуг в противоположных направлениях между вершинами (x_j, x_i) модифицируем значение потока $\tilde{\xi}_{ij}^{\mu}$ и уменьшаем его на значение $\tilde{\delta}^{\mu}$. Финальное значение потока $\tilde{\xi}_{ij}^{\mu} - \tilde{\delta}^{\mu}$.

2) для дуг между вершинами (x_i, x_j) модифицируем значение потока $\tilde{\xi}_{ij}^{\mu}$ и увеличиваем его на значение $\tilde{\delta}^{\mu}$. Финальное значение потока $\tilde{\xi}_{ij}^{\mu} + \tilde{\delta}^{\mu}$.

Этап 6. Реверсирование дуг.

6.1. Изменяем направление дуги $(x_j, x_i) \in \tilde{A}$ на противоположное до пропускной способности $\tilde{\xi}_{ij} - \tilde{u}_{ij}$, если $\tilde{\xi}_{ij} > \tilde{u}_{ij}$ заменяя \tilde{u}_{ij} на $\tilde{\delta}$, если $(x_i, x_j) \notin \tilde{A}$.

6.2. Для каждой дуги $(x_i, x_j) \in \tilde{A}$, если дуга (x_i, x_j) реверсируется, $\tilde{s}_{ij} = \tilde{u}_{ij} - \tilde{\xi}_{ij}$, $\tilde{s}_{ji} = \tilde{\delta}$. Если \tilde{s}_{ij} и \tilde{s}_{ji} не реверсируются, то $\tilde{s}_{ij} = \tilde{u}_{ij} - \tilde{\xi}_{ij}$, где \tilde{s}_{ij} – сохраненная пропускная способность.

Численный пример. Представим численный пример, иллюстрирующий работу алгоритма нахождения потока минимальной стоимости с частичным реверсированием движения. Задача заключается в поиске максимального значения потока минимальной стоимости, который может пройти между источником и стоком в нечеткой транспортной сети, при этом учитывая технологию частичного изменения направления движения по полосам дороги. Рис. 1 иллюстрирует исходную нечеткую транспортную сеть, дугам которой приписаны значения нечетких пропускных способностей и стоимостей перевозок. Для эффективного оперирования нечеткими числами будем использовать метод, основанный на «размытии» границ нечетких чисел на последнем шаге, тем самым на протяжении всего алгоритма в вычислениях будут использоваться только центры нечетких чисел.

Этап 1. Преобразуем исходную нечеткую транспортную сеть на рис. 1 в модифицированную сеть для возможности частичного реверсирования движения, как показано на рис. 2.

Этап 2. Строим остаточную сеть для модифицированной сети. На данном этапе, так как величины потоков, текущие по дугам, равны 0, остаточная сеть совпадает с исходной.

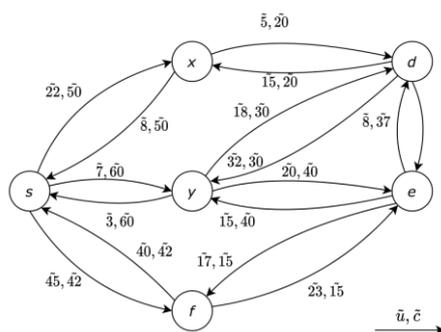


Рис. 1. Исходная транспортная сеть

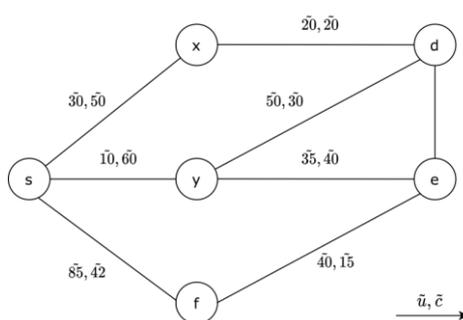


Рис. 2. Модифицированная транспортная сеть для реверсирования движения

Этап 3. Ищем путь минимальной стоимости в построенной сети. Согласно алгоритму Дейкстры [17] – это путь $s \rightarrow x \rightarrow d$ стоимости $\bar{70}$ единиц.

Этап 4. Передаем по найденному пути $s \rightarrow x \rightarrow d$ минимальную из пропускных способностей дуг пути, равную $\bar{20}$ единицам потока, как показано на рис. 3.

Этап 5. Пересчитываем значение потока и строим остаточную сеть.

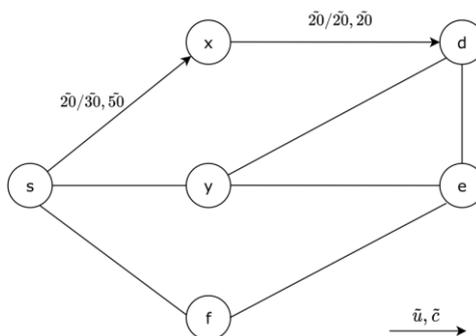


Рис. 3. Сеть с потоком $\bar{20}$ единиц

Этап 3. Находим путь минимальной стоимости в остаточной сети. Согласно алгоритму Дейкстры – это путь $s \rightarrow y \rightarrow d$ стоимости $\bar{90}$ единиц.

Этап 4. Передаем по найденному пути $s \rightarrow y \rightarrow d$ минимальную из пропускных способностей дуг пути, равную $\bar{10}$ единиц потока (рис. 4).

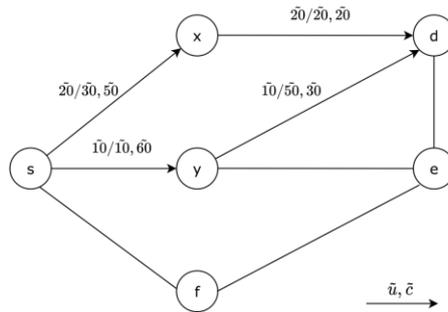


Рис. 4. Сеть с потоком $\overline{30}$ единиц

Этап 5. Пересчитываем значение потока и строим остаточную сеть.

Этап 3. Ищем путь минимальной стоимости в построенной сети. Согласно алгоритму Дейкстры – это путь $s \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d$ стоимости $\overline{94}$ единиц.

Этап 4. Передаем по найденному пути $s \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d$ минимальную из пропускных способностей дуг пути, равную $\overline{18}$ единиц потока (рис. 5).

Этап 5. Пересчитываем значение потока и строим остаточную сеть.

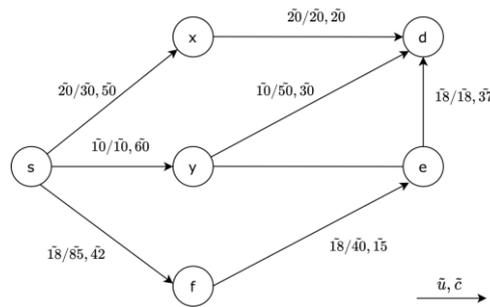


Рис. 5. Сеть с потоком $\overline{48}$ единиц

Этап 3. Ищем путь минимальной стоимости в построенной сети. Согласно алгоритму Дейкстры – это путь $s \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow y \rightarrow d$ стоимости $\overline{127}$ единиц.

Этап 4. Передаем по найденному пути путь $s \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow y \rightarrow d$ минимальную из пропускных способностей дуг пут, равную $\overline{22}$ единиц потока (рис. 6).

Этап 5. Пересчитываем значение потока и строим остаточную сеть.

Этап 3. Так как не удалось найти пути в остаточной сети, получен максимальный поток минимальной стоимости. Максимальный поток составляет $\overline{70}$ единиц суммарной стоимости $\overline{6786}$ условных единиц. Переходим к этапу 6.

Этап 6. Вычисляем значения сохраненных пропускных способностей в соответствии с частичным реверсированием движения по дугам. Итоговое распределение сохраненных пропускных способностей показано на рис. 7.

1) Дуги, которые реверсируются полностью: $(y \rightarrow s), (d \rightarrow x), (e \rightarrow f), (d \rightarrow e)$.

2) Дуги, которые частично реверсируются $(x \rightarrow s)$ до пропускной способности $\overline{10}$; $(d \rightarrow y)$ до пропускной способности $\overline{18}$, $(y \rightarrow e)$ до пропускной способности $\overline{13}$.

3) Список дуг с сохраненными пропускными способностями:

Сохраненная пропускная способность до $\tilde{40}$ units: $(f \rightarrow s)$;

Сохраненная пропускная способность до $\tilde{5}$ units: $(s \rightarrow f)$;

Сохраненная пропускная способность до $\tilde{13}$ units: $(y \rightarrow e)$;

Сохраненная пропускная способность $\tilde{18}$ units: $(d \rightarrow y)$;

Сохраненная пропускная способность $\tilde{10}$ units: $(x \rightarrow s)$.

С помощью предложенного метода удалось вычислить значения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой сети, а также значения сохраненных пропускных способностей, следовательно, следующим шагом является нахождение результирующего нечеткого треугольного числа, учитывая степени размытия границ числа [18–19].

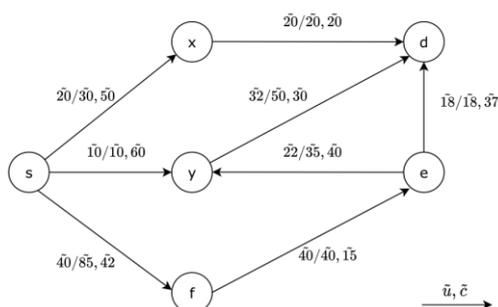


Рис. 6. Сеть с потоком $\tilde{70}$ единиц

Применим метод, описанный в [1]. Суть данного метода заключается в том, что у нас нет необходимости оперировать границами отклонений нечетких чисел на первом шаге осуществления вычислений: достаточно оперировать центральными значениями треугольных чисел, «размывая» их границы на последнем шаге с помощью заданных экспертами базовых значений. Преимуществом данного подхода является сохранение результирующим значением потока своего значения без сильного размытия границ числа.

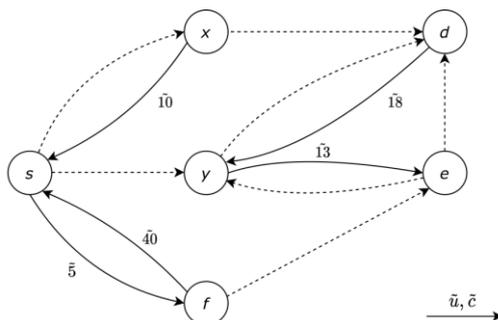


Рис. 7. Сеть с сохраненными пропускными способностями

Рис. 8 иллюстрирует методику размытия чисел. Таким образом, рис. 9 и 10 показывают границы отклонений базовых значений нечетких пропускных способностей и стоимостей перевозок, заданных экспертами.

Границы результирующего числа определяются по формуле (4):

$$l^L = \frac{(a_2 - a')}{(a_2 - a_1)} \times l_1^L + \left(1 - \frac{(a_2 - a')}{(a_2 - a_1)}\right) \times l_2^L, \quad l^R = \frac{(a_2 - a')}{(a_2 - a_1)} \times l_1^R + \left(1 - \frac{(a_2 - a')}{(a_2 - a_1)}\right) \times l_2^R. \quad (4)$$

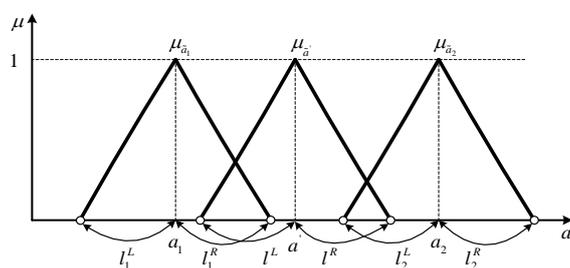


Рис. 8. Определение функции принадлежности $\mu_{a'}(a)$

Нечеткий поток «около 70» расположен между двумя соседними базовыми значениями пропускных способностей: 54 с левой границей отклонения $l_1^L = 9$, правой границей отклонения – $l_1^R = 11$ и 80 с левой границей отклонения $l_1^L = 13$, правой границей – $l_1^R = 15$. В итоге, получаем конечные границы отклонений: $l^L \approx 11, l^R \approx 13$. Таким образом, найденный максимальный суммарный поток минимальной стоимости с учетом реверсирования движения может быть представлен нечетким треугольным числом (59, 70, 83) единиц.

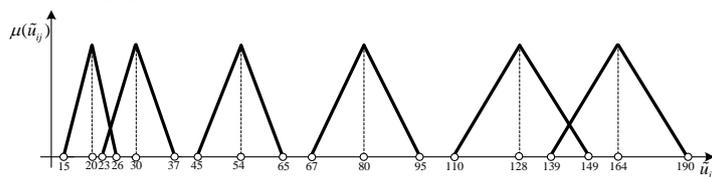


Рис. 9. Функции принадлежности базовых значений пропускных способностей ребер исходной сети

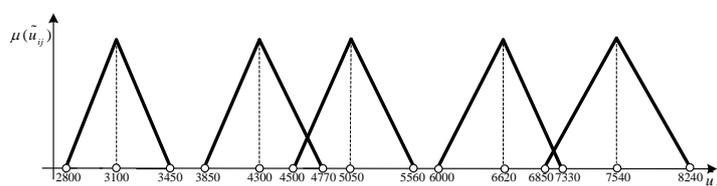


Рис. 10. Функции принадлежности базовых значений стоимостей ребер исходной сети

Нечеткая стоимость «около 6786» расположена между двумя соседними базовыми значениями стоимостей перевозок: 6620 с левой границей отклонения $l_1^L = 620$, правой границей отклонения – $l_1^R = 710$ и 7540 с левой границей отклонения $l_1^L = 690$, правой границей – $l_1^R = 700$. В итоге, получаем конечные границы отклонений: $l^L \approx 632, l^R \approx 708$. Таким образом, найденный максимальный суммарный поток минимальной стоимости с учетом реверсирования движения может быть представлен нечетким треугольным числом (6154, 6786, 7494) единиц.

Временная сложность алгоритма. Для вычисления временной сложности алгоритма была разработана программная реализация на языке C#. Оценка временной сложности разработанного алгоритма производилась с помощью измерения времени работы его программной реализации для различных входных данных. При этом оценка временная сложность проводилась по количеству ребер графа, учитывающему связи между элементами графа.

На рис. 11 приведен график зависимости времени работы алгоритма от количества рёбер в графе.

При построении графика на рис. 11 в качестве времени работы алгоритма был взят 90-й перцентиль для пятидесяти итераций.



Рис. 11. Временная сложность алгоритма

Заключение. Статья иллюстрирует подход к нахождению потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети с учетом реверсирования движения по дугам графа. Модель представляет собой нечеткую транспортную сеть с заданными нечеткими пропускными способностями и стоимостями перевозок. Техника реверсирования движения применяется для увеличения результирующего потока путем увеличения исходных пропускных способностей участков пути для разрешения движения в обратную сторону. Правило оперирования нечеткими значениями пропускных способностей и стоимостей, которое не приводит к сильному размытию границ чисел обеспечивает более реалистичные и чувствительные к изменениям окружающей среды решения. Предложенный подход имеет важное практическое применение при транспортном планировании и эвакуационном моделировании и оптимизации перевозок, когда необходимо перевозить грузы по оптимальным с точки зрения стоимости маршрутам или при моделировании эвакуационного сценария, когда необходимо перевести пострадавших из опасных зон в безопасные наиболее быстро, принимая параметры времени в качестве стоимостей перевозок. В будущем планируется разработка алгоритмов нахождения динамических нечетких потоков, допускающих частичное реверсирование движения в транспортных сетях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Kacprzyk J., Rozenberg I.* Flows in networks under fuzzy conditions // *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, – Heidelberg: Springer-Verlag, 2017. – Vol. 346. – P. 269-291.
2. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // *Information and Control*. – 1965. – Vol. 8 (3). – P. 338-353.
3. *Novák V., Perfilieva I., Močkoř J.* Mathematical principles of fuzzy logic. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
4. *Rebennack S., Arulselvan A., Elefteriadou L., Pardalos P.M.* Complexity analysis of maximum flow problem with arc reversal // *Journal of Combinatorial Optimization*. – 2010. – Vol. 29. – P. 200-216.
5. *Cova T., Johnson J.P.* A network flow model for lane-based evacuation routing // *Transp. Res. Part Policy Pract.* – 2003. – Vol. 37. – P. 579-604.
6. *Pyakurel U., Nath H.N., Dempe S., Dhamala T.N.* Efficient Dynamic Flow Algorithms for Evacuation Planning Problems with Partial Lane Reversal // *Mathematics*. – 2019. – Vol. 7 (10). – P. 1-29.
7. *Pyakurel U., Dhamala T.N., Dempe S.* Efficient continuous contraflow algorithms for evacuation planning problems // *Ann. Oper. Res.* – 2017. – Vol. 254. – P. 335-364.

8. Köhler E., Langkau, K. Skutella, M. Time expanded graphs for flow depended transit times // European Symposium on Algorithms. – Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2002. – P. 599-611.
9. Dhamala T.N. A survey on models and algorithms for discrete evacuation planning network problems // J. Ind. Manag. Optim. – 2015. – Vol. 11. – P. 265-289.
10. Боженюк А. Герасименко Е. Розенберг И. Алгоритм нахождения нечеткого потока в транспортной сети с нечеткими стоимостями и пропускными способностями // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 5 (130). – С. 118-122.
11. Герасименко Е. Нахождение потока минимальной стоимости в транспортной сети методом ранжирования математического ожидания нечетких функций стоимостей // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 4 (129). – С. 247-251.
12. Kureichik V., Gerasimenko E. Approach to the Minimum Cost Flow Determining in Fuzzy Terms Considering Vitality Degree. In Silhavy R., Senkerik R., Kominkova Oplatkova Z., Prokopova Z., Silhavy P. (eds) Artificial Intelligence Trends in Intelligent Systems. CSOC 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer, Cham, 2017. – Vol. 573. – P. 200-209.
13. Боженюк А.В., Герасименко Е.М., Розенберг И.Н. Разработка метода определения потока минимальной стоимости в транспортной сети с нечеткими пропускными способностями и стоимостями с помощью метода потенциалов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 6 (167). – С. 138-149.
14. Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I. Determining the Minimum Cost Flow in Fuzzy Dynamic Network with GIS «ObjectLand» // Proceedings of 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies, AICT 2015, Rostov on Don, Russia. – P. 294-298.
15. Gerasimenko E., Rozenberg I. Earliest arrival dynamic flow model for emergency evacuation in fuzzy conditions // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 734 (1). – P. 1-6.
16. Gerasimenko E., Kureichik V. The Maximum Lexicographic Contraflow Finding in a Fuzzy Dynamic Network // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2021. – Vol. 1197. – P. 981-989.
17. Dijkstra E. A note on two problems in connection with graphs // Numerische Mathematik. – 1959. – Vol. 1. – P. 269-271.
18. Ganesan K., Veeramani P. Fuzzy Linear Programs with Trapezoidal Fuzzy Numbers // Ann Oper Res. – 2006. – P. 305-315.
19. Kumar A., Kaur J., Singh P. Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints // International Journal of Mathematical and Computer Sciences. – 2010. – 6:1. – P. 37-41.

REFERENCES

1. Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Kacprzyk J., Rozenberg I. Flows in networks under fuzzy conditions, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2017, Vol. 346, pp. 269-291.
2. Zadeh L.A. Fuzzy sets, *Information and Control*, 1965, Vol. 8 (3), pp. 338-353.
3. Novák V., Perfilieva I., Močkoř J. Mathematical principles of fuzzy logic. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
4. Rebennack S., Arulselman A., Elefteriadou L., Pardalos P.M. Complexity analysis of maximum flow problem with arc reversal, *Journal of Combinatorial Optimization*, 2010, Vol. 29, pp. 200-216.
5. Cova T., Johnson J.P. A network flow model for lane-based evacuation routing, *Transp. Res. Part Policy Pract.*, 2003, Vol. 37, pp. 579-604.
6. Pyakurel U., Nath H.N., Dempe S., Dhamala T.N. Efficient Dynamic Flow Algorithms for Evacuation Planning Problems with Partial Lane Reversal, *Mathematics*, 2019, Vol. 7 (10), pp. 1-29.
7. Pyakurel U. Dhamala T.N. Dempe S. Efficient continuous contraflow algorithms for evacuation planning problems, *Ann. Oper. Res.*, 2017, Vol. 254, pp. 335-364.
8. Köhler E., Langkau, K. Skutella, M. Time expanded graphs for flow depended transit times, *European Symposium on Algorithms*. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2002, pp. 599-611.

9. *Dhamala T.N.* A survey on models and algorithms for discrete evacuation planning network problems, *J. Ind. Manag. Optim.*, 2015, Vol. 11, pp. 265-289.
10. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* Algoritm nakhozhdeniya nechetkogo potoka v transportnoy seti s nechetkimi stoimostyami i propusknyimi sposobnostyami [Algorithm of the fuzzy flow finding in the transportation network with fuzzy costs and arc capacities], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, No. 5 (130), pp. 118-122.
11. *Gerasimenko E.* Nakhozhdenie potoka minimal'noy stoimosti v transportnoy seti metodom ranzhirovaniya matematicheskogo ozhidaniya nechetkikh funktsiy stoimostey [Minimum cost flow finding in the network by the method of expectation ranking of fuzzy cost functions], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, No. 4 (129), pp. 247-251.
12. *Kureichik V., Gerasimenko E.* Approach to the Minimum Cost Flow Determining in Fuzzy Terms Considering Vitality Degree. In Silhavy R., Senkerik R., Kominkova Oplatkova Z., Prokopova Z., Silhavy P. (eds) *Artificial Intelligence Trends in Intelligent Systems. CSOC 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer, Cham, 2017, Vol. 573, pp. 200-209.
13. *Bozhenyuk A.V., Gerasimenko E.M., Rozenberg I.N.* Razrabotka metoda opredeleniya potoka minimal'noy stoimosti v transportnoy seti s nechetkimi propusknyimi sposobnostyami i stoimostyami s pomoshch'yu metoda potentsialov [Development of the minimum cost flow method with fuzzy arc capacities and costs by the potential method], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 6 (167), pp. 138-149.
14. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* Determining the Minimum Cost Flow in Fuzzy Dynamic Network with GIS «ObjectLand», *Proceedings of 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies, AICT 2015, Rostov on Don, Russia*, pp. 294-298.
15. *Gerasimenko E., Rozenberg I.* Earliest arrival dynamic flow model for emergency evacuation in fuzzy conditions, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, Vol. 734 (1), pp. 1-6.
16. *Gerasimenko E., Kureichik V.* The Maximum Lexicographic Contraflow Finding in a Fuzzy Dynamic Network, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2021, Vol. 1197, pp. 981-989.
17. *Dijkstra E.* A note on two problems in connection with graphs, *Numerische Mathematik*, 1959, Vol. 1, pp. 269-271.
18. *Ganesan K., Veeramani P.* Fuzzy Linear Programs with Trapezoidal Fuzzy Numbers, *Ann Oper Res.*, 2006, pp. 305-315.
19. *Kumar A., Kaur J., Singh P.* Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints, *International Journal of Mathematical and Computer Sciences*, 2010, 6:1, pp. 37-41.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.В. Боженюк.

Герасименко Евгения Михайловна – Южный федеральный университет; e-mail: egerasimenko@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371651; кафедра систем автоматизированного проектирования; доцент.

Gerasimenko Evgeniya Michailovna – Southern Federal University; e-mail: egerasimenko@sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy lane, Taganrog, 347928, Russia, phone: +78634371621; the department of computer-aided design; associate professor.