

Д.И. Бакшун, И.И. Турулин

ФОРМИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕКУРСИВНОГО ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ С КОНЕЧНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ В ВИДЕ СУММЫ КВАЗИГАРМОНИК УСЕЧЕННОГО РЯДА ФУРЬЕ

Задача сокращения количества арифметических операций в алгоритмах цифровой фильтрации является актуальной, поскольку это напрямую влияет на энергопотребление, быстродействие и аппаратные затраты. В условиях жестких требований к энергопотреблению мобильных и встраиваемых устройств сокращение операций умножения и сложения становится важным фактором проектирования. В статье рассмотрена методика реализации рекурсивного фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ) в виде усеченной функции sinc, сглаженной окном (весовой функцией), которая представляет собой сумму квазигармонических функций. Квазигармонические функции с разными частотами представляют собой полиномы степени r . За основу взят полином второй степени и предложен численный метод повышения степени полинома для улучшения точности аппроксимации. Анализ точности аппроксимации показал, что при использовании полиномов 4-ой и 6-ой степени достигается погрешность аппроксимации менее 1%. Коэффициенты нерекурсивной части фильтра вычисляются через нахождение обратных конечных разностей исходной КИХ. Коэффициентами являются целые числа, значения которых зависят от числа отсчетов (длины) полупериода квазисинусоидальной функции, что упрощает реализацию подобного РКИХ-фильтра на базе программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС). Результаты численного анализа конечных разностей для каждой квазисинусоиды показали, что при использовании квадратичной аппроксимации требуется всего 16 отсчетов, однако при этом будет относительно высокий уровень боковых лепестков (-30 дБ). Переход к аппроксимации 4-го порядка увеличивает количество ненулевых коэффициентов до 20-ти и приводит к существенному (на 13 дБ) уменьшению уровня частотной характеристики в полосе заграждения, который достигает -43 дБ.

Рекурсивный; КИХ; ПЛИС; фильтр; окно Хэмминга; конечная импульсная характеристика; аппроксимация; sinc.

D.I. Bakshun, I.I. Turulin

FORMATION OF THE IMPULSE RESPONSE OF A RECURSIVE LOW-PASS FILTER WITH FINITE IMPULSE RESPONSE AS A SUM OF QUASI-HARMONICS OF A TRUNCATED FOURIER SERIES

The problem of reducing the number of arithmetic operations in digital filtering algorithms is highly relevant, as it directly impacts power consumption, processing speed, and hardware costs. Under strict power efficiency requirements for mobile and embedded systems, minimizing multiplication and addition operations becomes a critical design factor. This paper presents a method for implementing a recursive filter with a finite impulse response (FIR) based on a truncated sinc function smoothed by a window (weighting function), represented as a sum of quasi-harmonic functions. These quasi-harmonic functions with different frequencies are polynomials of degree r . The study adopts a second-degree polynomial as a baseline and proposes a numerical method for increasing the polynomial order to improve the accuracy of the approximation. Accuracy analysis demonstrates that using 4th- and 6th-order polynomials achieves an approximation error of less than 1%. The coefficients of the non-recursive part of the filter are computed via inverse finite differences of the original FIR impulse response. These coefficients are integers whose values depend on the number of samples (length) of the half-period of the quasi-sinusoidal function, simplifying the implementation of such a recursive FIR (RFIR) filter on a field-programmable gate array (FPGA). Numerical analysis of finite differences for each quasi-sinusoid revealed that quadratic approximation requires only 16 samples but results in relatively high side-lobe levels (-30 dB). Switching to 4th-order approximation increases the number of non-zero coefficients to 20 and significantly reduces (by 13 dB) the stopband magnitude of the frequency response, reaching -43 dB.

Recursive; FIR; FPGA; filter; Hamming window; finite impulse response; approximation; sinc.

Введение. Сокращение числа арифметических операций (сложение, умножение) в цифровых фильтрах является актуальной задачей, так как оно напрямую влияет на энергопотребление, быстродействие и аппаратные затраты. В реальных системах, особенно в мобильных и встраиваемых устройствах, ограниченные ресурсы требуют снижения вычислительной сложности. Уменьшение количества умножений снижает нагрузку на процессор, уменьшает площадь кристалла при аппаратной реализации и повышает энергоэффективность.

Сокращение вычислительных затрат достигается за счёт применения рекурсивных фильтров, характеризующихся малым числом ненулевых коэффициентов при сохранении заданной амплитудно-частотной характеристики (АЧХ). Наибольшее распространение получили структуры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ), однако существуют и рекурсивные фильтры с конечной импульсной характеристикой (РКИХ), использующие целочисленные или фиксированно-точечные коэффициенты. Ключевое преимущество РКИХ-фильтров с симметричной импульсной характеристикой (ИХ) заключается в гарантированно линейной фазочастотной характеристике (ФЧХ), что принципиально отличает их от классических рекурсивных БИХ-структур.

В статье рассматривается методика реализации РКИХ-фильтра нижних частот с ИХ, представляющей сумму гармоник, аппроксимированных степенным полиномом, что позволяет значительно сократить вычислительные затраты при выполнении фильтрации.

Проблема реализации ИХ в виде функции sinc. Импульсная характеристика КИХ-фильтра нижних частот формируется на основе функции sinc, которая в идеальном случае является бесконечной и соответствует прямоугольной амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) [1–3]. Однако практическая реализация требует её усечения до конечного числа отсчётов с применением весовых функций (окон). Это приводит к появлению переходной зоны и пульсаций в АЧХ (эффект Гиббса), при этом симметричное усечение sinc обеспечивает линейность ФЧХ фильтра.

В работах [4–9] подробно рассмотрены РКИХ-фильтры с ИХ в виде гармонических функций. Гармонические функции аппроксимированы степенными полиномом. Вычислительные затраты таких фильтров не зависят от длительности ИХ. Если представить усеченную sinc, сглаженную весовым окном, как сумму гармонических функций, аппроксимированных степенным полиномом, то можно значительно сократить вычислительные затраты за счет применения РКИХ-структуры по сравнению с классической КИХ-структурой с теми же АЧХ и ФЧХ.

В работах [10–12] рассмотрены методы аппроксимации усеченных функций sinc используя тригонометрические сплайны. Результатом является возможность представления sinc на определённом временном интервале через ряд Фурье. Тогда требуется представить sinc рядом Фурье, гармонические функции которого, аппроксимированы степенным полиномом.

Формирование непрерывной усеченной функции sinc. Прежде чем сформировать дискретную ИХ фильтра в виде sinc, аппроксимированную степенным полиномом, для простоты предварительно рассмотрим ее непрерывную форму, аппроксимированную рядом Фурье. Для удобства дальнейшего перехода от непрерывных функций к дискретным, здесь и далее все функции будут рассматриваться на интервале $0 \leq x \leq \pi$, при этом центр функции sinc сдвинут вправо по времени (задержан) на $\pi/2$. Результатом разложения в ряд Фурье функции sinc является сумма нечетных гармоник

$$\text{sinc}(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \sin(2m + 1)x, \quad (1)$$

где M – число гармоник.

На рис. 1 изображен график функции $\text{sinc}(x)$ при различном числе гармоник M .

Полученный результат является ограниченной функцией sinc (т.е. умноженной на весовую функцию прямоугольной формы), что приводит к эффекту Гиббса – возникновению боковых лепестков спектра. Для уменьшения уровня боковых лепестков необходимо применить весовую функцию, плавно спадающую к краям. Одними из простых часто применяемых сглаживающих весовых функций для формирования ИХ при разработке фильтров являются окна Ханна и Хемминга.

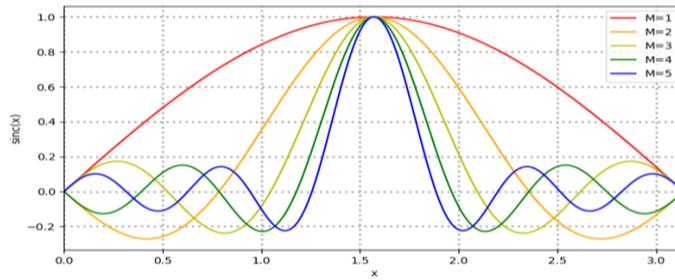


Рис. 1. Усеченная функция $\text{sinc}(x)$, аппроксимированная рядом Фурье при различном числе гармоник M

Оконные функции Ханна и Хемминга представляет собой «обобщенное» окно Хемминга [2], которое является суммой функции косинуса и постоянного уровня, отличных от нуля на отрезке:

$$w(x) = \begin{cases} \sigma + (1 - \sigma) \cos 2x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2)$$

где σ – коэффициент, принимающий значение 0,5 для окна Ханна и 0,54 для окна Хемминга.

Так как центр функции sinc расположен в точке $\pi/2$, задержим на это значение окно (2) и получим:

$$w(x) = \begin{cases} \sigma - (1 - \sigma) \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{sinc}(x)w(x) = [\sigma - (1 - \sigma) \cos 2x] \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \sin(2m + 1)x. \quad (4)$$

Выражение (4) можно упростить

$$\text{sinc}(x)w(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m \sin(2m + 1)x, \quad (5)$$

где

$$a_m = \begin{cases} 1, & m < M - 1, \\ \frac{(1 + \sigma)}{2}, & m = M - 1, \\ \frac{(1 - \sigma)}{2}, & m = M. \end{cases}$$

Для примера, решим выражение (5) для $M = 2$ с оконной функции Хэмминга, которая имеет параметр $\sigma = 0,54$.

$$\text{sinc}(x) \cdot w(x) = \frac{1}{2} (\sin x - 0,77 \sin 3x + 0,23 \sin 5x).$$

Как видно из результата, при перемножении сглаживающей функции и суммы двух гармоник возникает новая нечетная гармоника, которая имеет частоту $(2M + 1)x$. Данный результат справедлив для любого числа M и в данном примере при $M = 2$ новая гармоника будет 5-ой (частота в 5 раз больше частоты первой гармоники).

Формирование дискретной ИХ. Зададим формулу для k -го полупериода квазисинусной функции, которая представляет собой аппроксимирующий полином второй степени [4–6]:

$$f_{p2}(n, k) = \begin{cases} (-1)^k (L[n - kL] - [n - kL]^2), & kL \leq n \leq (k + 1)L, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (6)$$

где n – номер отсчета ИХ; k – номер полупериода синусной функции ($k = 0, 1, \dots, K - 1$); L – параметр, характеризующий длительность ИХ.

Тогда квазисинусная функция является суммой всех полупериодов

$$f_{sin}(n) = \sum_k f_{p2}(n, k). \quad (7)$$

Так как при различных значениях L максимальное значение функции $f_{p2}(n, k)$ будет разным, то при сложении или вычитании $f_{sin}(n)$ с различными L следует умножить $f_{sin}(n)$ на нормирующий коэффициент, который вычисляется следующим образом

$$G_m = \frac{\max(f_{sin}(n)|_{L=\max L})}{\max(f_{sin}(n)|_{L=L_m})}, \quad (8)$$

Формула для дискретной ИХ:

$$h(n) = \sum_{m=0}^M a_m G_m f_{sin}(n)|_{L=L_m}. \quad (9)$$

Метод повышения степени аппроксимирующего полинома квазисинусной функции. Использование степенного полинома для аппроксимации импульсной характеристики приводит к возникновению погрешности, которая обусловлена отклонением аппроксимирующей функции от исходной оконной функции [13].

Одним из способов уменьшения ошибки аппроксимации является повышение степени полинома. Далее предлагается следующий алгоритм для выполнения этой задачи в численном виде.

1. Выполнить дискретное интегрирование квазисинусной функции со степенью полинома r .
2. Умножить полученный результат на -1 .
3. Прибавить минимальное значение, деленное на 2.
4. Выполнить дискретное интегрирование.

В результате получится квазисинусная функция со степенью полинома $r + 2$.

Так как усеченная функция sinc, аппроксимированная степенным полиномом, принимает только целые значения, то при сравнении ее с непрерывной функцией sinc необходимо выполнить нормировку путем деления на коэффициент усиления фильтра

$$h'(n) = h(n)/G_h, \quad (10)$$

где $G_h = \max[h(n)]$ – коэффициент усиления фильтра.

На рис. 2 представлены графики усеченной непрерывной функции sinc, взвешенной окном Хэмминга, и ее аппроксимация степенным полиномом с выполненной нормировкой при трех значениях степени: $r = 2$, $r = 4$ и $r = 6$.

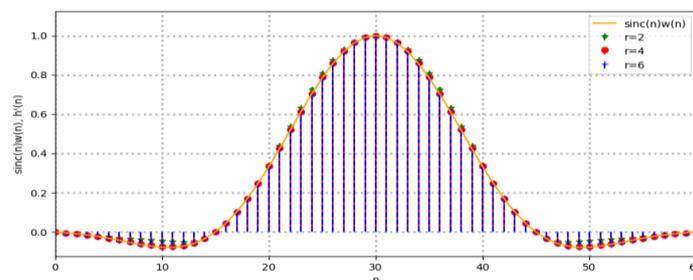


Рис. 2. Усеченная $\text{sinc}(n)$, взвешенная окном Хэмминга, и нормированная ИХ РКИХ-фильтра

Средняя относительная ошибка аппроксимации степенным полиномом

$$E = \frac{100\%}{N+1} \sum_{n=0}^N |\text{sinc}(n) \cdot w(n) - h'(n)| / [\text{sinc}(n) \cdot w(n)], \quad (11)$$

где N – длительность импульсной характеристики; $w(n)$ – окно Хэмминга.

Для полинома второй, четвертой и шестой степени средняя относительная ошибка принимает значение 6,23%, 0,65% и 0,07% соответственно.

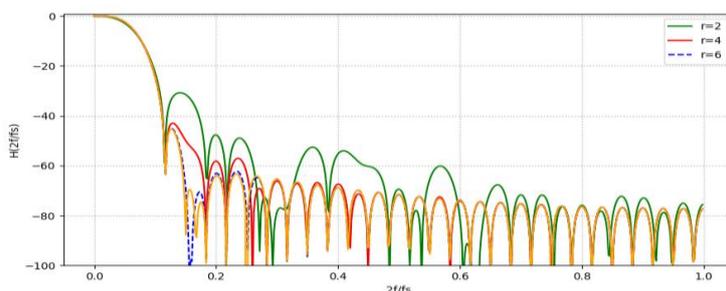


Рис. 3. АЧХ усеченной функции $\text{sinc}(n)$, взвешенная окном Хэмминга, и нормированной ИХ РКИХ-фильтра

Вычисление коэффициентов нерекурсивной части фильтра. Коэффициенты нерекурсивной части фильтра вычисляются через нахождение обратной конечной разности порядка $r + 1$ от ИХ фильтра [13]. Формула вычисления обратной конечной разности функции $f(n)$ имеет вид:

$$\nabla^{r+1} f(n) = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j C_r^j f(n - j), \quad (12)$$

где C_r^j – биномиальные коэффициенты.

Так как ИХ фильтра представляет собой сумму квазисинусных функций, умноженных на коэффициент G_m , то обратной конечной разностью от ИХ фильтра является сумма их обратных конечных разностей. Подставляя в (12) вместо $f(n)$ квазисинусную функцию, найдем ее обратную конечную разность. На рис. 4–6 изображены коэффициенты для каждой квазисинусной функции (без учета G_m), аппроксимированной степенным полиномом степени r . $L1 - L3$ соответствуют длительностям полупериода квазисинусной функции для 1–3 гармоник соответственно. Следует отметить, что обратная конечная разность от любой рассмотренной квазисинусной функции имеет симметричные относительно центрального отсчета коэффициенты, умноженные на -1 .

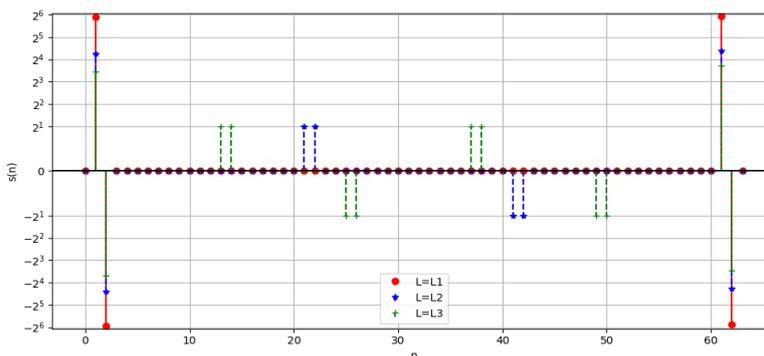


Рис. 4. Конечные разности третьего порядка для квазисинусоид, аппроксимированных полиномом второй степени

Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что четвертая степень аппроксимирующего полинома наиболее эффективна, поскольку реализация квазисинусной обратной конечной разности для данной степени характеризуется меньшим количеством ненулевых коэффициентов по сравнению с полиномом шестой степени и обеспечивает

уровень боковых лепестков АЧХ на 13 дБ ниже, чем при использовании полинома второй степени. Кроме того, при переходе к полиному шестой степени коэффициенты превышают 2^{25} , что усложняет аппаратную реализацию, в то время как для полинома четвертой степени коэффициенты не превосходят 2^{16} , что существенно снижает требования к разрядности вычислительных устройств.

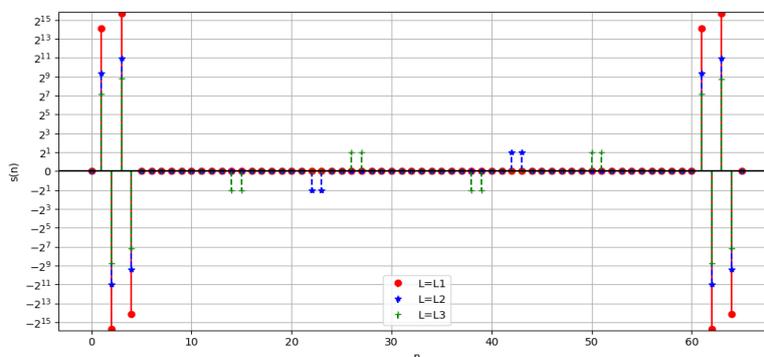


Рис. 5. Конечные разности пятого порядка для квазисинусоид, аппроксимированных полиномом четвертой степени

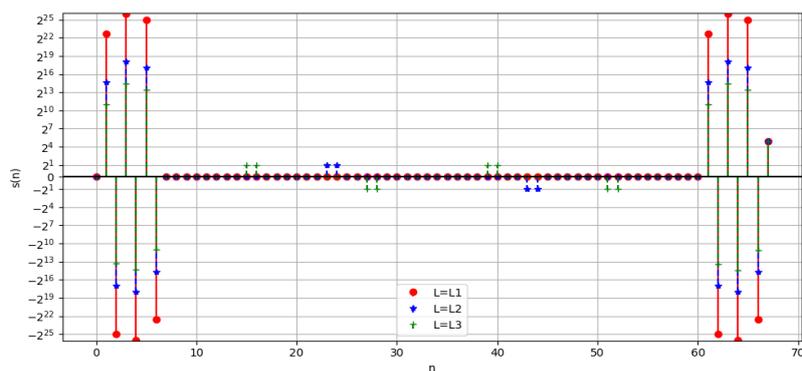


Рис. 6. Конечные разности седьмого порядка для квазисинусоид, аппроксимированных полиномом шестой степени

Заключение. В данной работе была рассмотрена методика синтеза импульсной характеристики (ИХ) цифрового РКИХ-фильтра в виде усеченной и сглаженной оконной функцией Хэмминга функции sinc , представленной суммой квазисинусных функций. Аппроксимация синусоидальных составляющих осуществлялась с помощью степенных полиномов степени r , исследовались случаи $r = 2$, $r = 4$ и $r = 6$. Проведенные расчёты показали высокую точность аппроксимации: для $r = 4$ и $r = 6$ средняя относительная ошибка не превышает 1%, что свидетельствует о высокой точности аппроксимирующих моделей. Для каждой квазисинусоиды были построены графики конечной разности степени $r + 1$, анализ которых позволил сделать следующие выводы: при $r = 2$ получено наименьшее число ненулевых отсчётов (16) при уровне боковых лепестков АЧХ -30 дБ, а при $r = 4$ количество ненулевых отсчётов увеличилось до 20 при улучшении уровня боковых лепестков до -43 дБ. Таким образом, предложенный подход позволяет существенно сократить количество коэффициентов в нерекурсивной части РКИХ-фильтра, что упрощает его аппаратную и программную реализацию. Это особенно важно для ресурсограниченных систем, где критичны вычислительная сложность, энергопотребление и площадь кристалла при аппаратной реализации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов: Второе издание: пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. – 656 с.
2. *Рабинер Л., Голд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов: пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 216 с.
3. *Богнер Р., Константиноидис А.* Введение в цифровую фильтрацию: пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 216 с.
4. *Бакиун Д.И., Турулин И.И.* Методика построения структуры рекурсивного фильтра с конечной импульсной характеристикой в виде функции, аппроксимирующей окно Ханна // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2024. – № 3. – С. 64-70.
5. *Турулин И.И.* Расчет и применение быстродействующих цифровых рекурсивных фильтров с конечной импульсной характеристикой: монография / под общей ред. Л.К. Самойлова. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1999. – 88 с.
6. *Турулин И.И.* Основы теории рекурсивных КИХ-фильтров: монография. – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2016. – 264 с.
7. *Олейникова Т.В.* Исследование алгоритмов рекурсивных фильтров с конечными импульсными характеристиками для весовой обработки сигналов: дисс. ... канд. техн. наук. – Таганрог, 1999.
8. *Олейникова Т.В.* Применение быстрой циклической свертки в корреляционном измерителе временных интервалов // Тез. докл. всерос. науч. конф. «Новые информационные технологии. Информационное, программное и аппаратное обеспечение». – Таганрог, 1995. – С. 178-179.
9. *Олейникова Т.В., Турулин И.И.* Весовая обработка близко расположенных сигнала и помехи окнами с характеристиками типа окна Хэмминга // Тез. докл. всерос. науч. конф. «Радиоэлектроника, микроэлектроника, системы связи и управления». – Таганрог, 1997. – С. 232-233.
10. *Blu T., Unser M.* Quantitative Fourier Analysis of Approximation Techniques: Part I—Interpolators and Projectors // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1999. – Vol. 47, No. 10. – P. 2783-2795.
11. *Stenger F.* Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. – New York: Springer, 1993. – 565 p.
12. *Unser M.* Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing // IEEE Signal Processing Magazine. – 1999. – Vol. 16, No. 6. – P. 22-38.
13. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, 1975.
14. *Lau B.K., Sreeram V.* Design of low order approximately linear phase IIR filters // IEEE Symposium on Advances in Digital Filtering and Signal Processing. – 1998. – P. 92-95.
15. *Maximo A.* Efficient finite impulse response filters in massively-parallel recursive systems // Journal of Real-Time Image Processing: collected papers. – 2015. – Vol. 12. – P. 603-611.
16. *Dam H.H., Nordebo S., Teo K.L., Cantoni A.* Design of linear phase FIR filters with recursive structure and discrete coefficients // IEEE International conference on acoustics, speech, and signal processing: collected papers. – Seattle, 1998. – P. 1269-1272.
17. *Hassan F., Khorbotly S.* Recursive implementation of exponential linear phase FIR filters // 18th IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems: collected papers. – Beirut, 2011. – P. 559-562.
18. *Sklyarov V.* FPGA-based implementation of recursive algorithms // Microprocessors and Microsystems. Special Issue on FPGAs: Applications and Designs. – 2004. – Vol. 28/5-6. – P. 197-211.
19. *Томас Д.* Логическое проектирование и верификация систем на System Verilog: пер. с англ. А.А. Слинкина, А.С. Камкина, М.М. Чупилко. – М.: ДМК Пресс, 2019. – 384 с.
20. *Хаханов В.И., Хаханов И.В., Литвинова Е.И., Гузь О.А.* Проектирование и верификация цифровых систем на кристаллах. Verilog & System Verilog. – Харьков: ХНУРЭ, 2010. – 528 с.
21. *Уэйкерли Ф.* Проектирование цифровых устройств. Т. 1. – М.: Постмаркет, 2002. – 544 с.

REFERENCES

1. *Layons R.* Tsifrovaya obrabotka signalov [Digital signal processing]: Second ed.: transl. from Engl. Moscow: ООО «Binom-Press», 2006, 656 p.
2. *Rabiner L., Gould B.* Teoriya i primeneniye tsifrovoy obrabotki signalov [Theory and application of digital signal processing]: transl. from Engl.. Moscow: Mir, 1976, 216 p.
3. *Bogner R., Konstantinidis A.* Vvedenie v tsifrovuyu fil'tratsiyu [Introduction to digital filtering]: transl. from Engl. Moscow: Mir, 1976, 216 p.
4. *Bakshun D.I., Turulin I.I.* Metodika postroeniya struktury rekursivnogo fil'tra s konechnoy impul'snoy kharakteristikoy v vide funktsii, approksimiruyushchey okno Khanna [A technique for constructing the structure of a recursive filter with a finite impulse response in the form of a function approximating the Hann window], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2024, No. 3, pp. 64-70.

5. *Turulin I.I.* Raschet i primeneniye bystrodeystvuyushchikh tsifrovyykh rekursivnykh fil'trov s konechnoy impul'snoy kharakteristikoy: monografiya [Calculation and application of high-speed digital recursive filters with finite impulse response: monograph], under the general ed. of L.K. Samoylova. Taganrog: Izd-vo TRTU, 1999, 88 p.
6. *Turulin I.I.* Osnovy teorii rekursivnykh KIKh-fil'trov: monografiya [Fundamentals of the theory of recursive FIR filters: monograph]. Taganrog: Izd-vo YuFU, 2016, 264 p.
7. *Oleynikova T.V.* Issledovanie algoritmov rekursivnykh fil'trov s konechnymi impul'snymi kharakteristikami dlya vesovoy obrabotki signalov: diss. ... kand. tekhn. nauk [Investigation of algorithms for recursive filters with finite impulse characteristics for weight signal processing: cand. of eng. sc. diss.]. Taganrog, 1999.
8. *Oleynikova T.V.* Primeneniye bystroy tsiklicheskey svertki v korrelyatsionnom izmeritele vremennykh intervalov [The use of fast cyclic convolution in a correlation time interval meter], *Tez. dokl. vseros. nauch. konf. "Novye informatsionnye tekhnologii. Informatsionnoe, programmnoe i apparatnoe obespechenie"* [Abstracts of the All-Russian Scientific Conference "New Information Technologies. Information, Software, and Hardware"]. Taganrog, 1995, pp. 178-179.
9. *Oleynikova T.V. Turulin I.I.* Vesovaya obrabotka blizko raspolozhennykh signala i pomekhi oknami s kharakteristikami tipa okna Khemmignya [Weight processing of closely spaced signal and interference by windows with characteristics of the type of a Hammign window], *Tez. dokl. vseros. nauch. konf. «Radioelektronika, mikroelektronika, sistemy svyazi i upravleniya»* [Abstracts of reports of the All-Russian scientific conference "Radioelectronics, microelectronics, communication and control systems"]. Taganrog, 1997, pp. 232-233.
10. *Blu T., Unser M.* Quantitative Fourier Analysis of Approximation Techniques: Part I—Interpolators and Projectors, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, Vol. 47, No. 10, pp. 2783-2795.
11. *Stenger F.* Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. New York: Springer, 1993, 565 p.
12. *Unser M.* Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing, *IEEE Signal Processing Magazine*, 1999, Vol. 16, No. 6, pp. 22-38.
13. *Bronshcheyn I.N., Semendyaev K.A.* Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vuzov [Handbook of Mathematics for engineers and university students]. Moscow: Nauka, 1975.
14. *Lau B.K., Sreeram V.* Design of low order approximately linear phase IIR filters, *IEEE Symposium on Advances in Digital Filtering and Signal Processing*, 1998, pp. 92-95.
15. *Maximo A.* Efficient finite impulse response filters in massively-parallel recursive systems, *Journal of Real-Time Image Processing: collected papers*, 2015, Vol. 12, pp. 603-611.
16. *Dam H.H., Nordebo S., Teo K.L., Cantoni A.* Design of linear phase FIR filters with recursive structure and discrete coefficients, *IEEE International conference on acoustics, speech, and signal processing: collected papers*. Seattle, 1998, pp. 1269-1272.
17. *Hassan F., Khorbotly S.* Recursive implementation of exponential linear phase FIR filters, *18th IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems: collected papers*. Beirut, 2011, pp. 559-562.
18. *Sklyarov V.* FPGA-based implementation of recursive algorithms, *Microprocessors and Microsystems. Special Issue on FPGAs: Applications and Designs*, 2004, Vol. 28/5-6, pp. 197-211.
19. *Tomas D.* Logicheskie proektirovaniye i verifikatsiya sistem na System Verilog [Logical design and verification of the Verilog system]: transl. from Engl. A.A. Slinkina, A.S. Kamkina, M.M. Chupilko. Moscow: DMK Press, 2019, 384 p.
20. *Khakhanov V.I., Khakhanov I.V., Litvinova E.I. Guz' O.A.* Proektirovaniye i verifikatsiya tsifrovyykh sistem na kristallakh. Verilog & System Verilog [Design and verification of digital systems on crystals. Verilog and the Verilog system]. Khar'kov: KHNURE, 2010, 528 p.
21. *Ueykerli F.* Proektirovaniye tsifrovyykh ustroystv [Design of digital devices]. Vol. 1. Moscow: Postmarket, 2002, 544 p.

Бакшун Дмитрий Иванович – Южный федеральный университет; e-mail: bakshun@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185988588; аспирант.

Турулин Игорь Ильич – Южный федеральный университет; e-mail: iiturulin@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79618170609; д.т.н.; профессор.

Bakshun Dmitry Ivanovich – Southern Federal University; e-mail: bakshun@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79185988588; postgraduate student.

Turulin Igor Pyich – Southern Federal University; e-mail: iiturulin@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79618170609; cand. of eng. sc.; professor.