22. *Kramer G.* Matematicheskie metody statistiki [Mathematical methods of statistics]: transl. from Engl. Moscow: Mir, 1975, 648 p.
23. *Mel'nikov A.K.* Vybor metoda rascheta tochnykh priblizheniy diskretnykh raspredeleniy veroyatnostey znacheniy statistik [Choosing the Method of Exact Approximations of Discrete Statistics Probability Distributions], *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Vestnik komp'yuternyh i informatsionnyh tekhnologiy], 2021, Vol. 18, No. 6 (204), pp. 39-48. DOI 10.14489/vkit.2021.06.pp.039-048.

Мельников Андрей Кимович – АО «Вычислительные решения»; e-mail: anta-mak@umail.ru; ak@comp-sol.ru; г. Москва, Россия; тел.: 84957693030; г.н.с.; д.т.н.; доцент ВАК.

Melnikov Andrey Kimovich – JSC "Computing Solutions"; e-mail: anta-mak@umail.ru; ak@comp-sol.ru; Moscow, Russia; phone: +74957693030; chief researcher officer, dr. of eng. sc.; associate professor of the Higher Attestation Commission.

УДК 519.857.6:656.025.415 DOI 10.18522/2311-3103-2025-6-136-145

И.Н. Розенберг, И.А. Дубчак

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНВАРИАНТОВ НЕЧЕТКОГО ГРАФА ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЖНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются вопросы оценки устойчивости транспортно-логистических систем (ТЛС) в условиях неопределенности, которые играют ключевую роль в обеспечении эффективного функционирования цепей поставок. Устойчивость систем анализируется в контексте их способности адаптироваться к внешним и внутренним воздействиям, таким как экономические колебания, изменение спроса, стихийные бедствия и технологические сбои. В данной статье предлагается использовать инварианты нечетких множеств, а именно нечеткое доминирующее множество, для оценки и анализа устойчивости транспортно-логистических систем в условиях неопределенности. Показано, что нечеткое доминирующее множество позволяет решать задачу размещения распределительных узлов в транспортно-логистической системе. Приведены примеры нахождения нечетких доминирующих множеств для нечетких и нечетких темпоральных графов как моделей транспортно-логистической системы. Нечеткие темпоральные графы также позволяют проводить более адекватное моделирование и анализ систем в случаях, когда параметр времени является одним из важных факторов. Практическая значимость исследования заключается в возможности проектирования более надежных и адаптивных ТЛС, способных эффективно функционировать в условиях неопределенности. Результаты могут быть использованы для оптимизации логистических процессов, снижения затрат и повышения устойчивости цепочек поставок. Полученные выводы также открывают перспективы для дальнейших исследований в области интеграции методов искусственного интеллекта и анализа больших данных в управлении транспортными системами. Дальнейшие исследования предлагается направить на интеграцию методов оптимизации потоков с учетом временных факторов и разработку цифровых двойников ТЛС.

Транспортно-логистическая система (ТЛС); неопределенность; устойчивость системы; нечеткий граф; нечеткий темпоральный граф; нечеткое доминирующее множество; динамические параметры.

I.N. Rozenberg, I.A. Dubchak

USING FUZZY GRAPH INVARIANTS FOR THE STABILITY ANALYSIS OF COMPLEX TRANSPORT SYSTEMS

This article examines the issues of assessing the sustainability of transport and logistics systems (TLS) under conditions of uncertainty, which play a key role in ensuring the effective functioning of supply chains. The sustainability of systems is analyzed in the context of their ability to adapt to external and internal influences, such as economic fluctuations, changes in demand, natural disasters and technological failures. In this paper, it is proposed to use fuzzy graph invariants, namely, a fuzzy dominating set, to assess and analyze the sustainability of transport and logistics systems under uncertainty. It is shown that a fuzzy dominating set allows solving the problem of placing distribution hubs in a transport and logistics system. Examples of finding fuzzy dominating sets for fuzzy and fuzzy temporal graphs as the models of transport and logistic system are presented. Fuzzy temporal graphs also allow for more adequate modeling and analysis of systems in cases where the time parameter is one of the important factors. The practi-

cal significance of the study lies in the possibility of designing a more reliable and adaptive TLS capable of functioning effectively under conditions of uncertainty. The results can be used to optimize logistics processes, reduce costs and increase the sustainability of supply chains. The findings also open prospects for further research in the field of integrating artificial intelligence methods and big data analysis in transport system management. Further research is proposed to be directed at integrating flow optimization methods considering time factors and developing digital twins of TLS.

Transport and logistics system (TLS); uncertainty; system stability; fuzzy graph; fuzzy temporal graph; fuzzy domination set; dynamic parameters.

Введение. Транспортная система играет важнейшую роль в устойчивом развитии общества и экономики. Она служит связующим звеном между различными регионами, обеспечивая перемещение людей и грузов. Глобальные тенденции показывают, что рынок транспортных услуг становится всё более комплексным и сложным, и все его составляющие интегрируются с использованием логистических концепций и новейших технологий, формируя понятие – транспортно-логистическая система.

Транспортно-логистическая система (ТЛС) представляет собой объединение различных аспектов логистической деятельности, таких как управление запасами, обработка грузов, складское хозяйство и обмен информацией. Для достижения наивысшей эффективности в ТЛС необходим современный подход, который учитывает как процессы, так и ресурсы. Этот подход включает в себя системное мышление, прогнозирование, управление и принятие решений в условиях неопределенности.

С точки зрения организационно-технического подхода, главной целью ТЛС является обеспечение устойчивости системы путем внедрения механизмов управления потоками и гарантии надежности всех процессов. Компетенции, сосредоточенные в рамках ТЛС, отражают потенциал системы по доставке грузов конечному потребителю как на стратегическом, так и на тактическом уровнях. К основным компетенциям относятся развитие инфраструктуры, управление запасами и процессами хранения, обработка грузов и упаковка, а также эффективный обмен информацией между участниками логистической цепи. Ключевыми обстоятельствами, оказывающими отрицательное воздействие на развитие транспортной инфраструктуры, являются низкий объем грузопотоков в портовых терминалах; ограниченные возможности подъездных путей к морским портам; а также различные риски, связанные с политической, социальной, природной и климатической сферами.

Таким образом, для успешного функционирования транспортной системы требуется комплексный подход к управлению, что, в свою очередь, способствует улучшению качества жизни населения и устойчивому развитию экономики.

В работе [1] отмечено, что обычно ТЛС оцениваются с помощью разнообразных показателей, которые представляют собой конкретные переменные, подходящие для количественной оценки. Эти индикаторы играют важную роль в установлении базовых данных, выявлении тенденций, предсказании возможных проблем, оценке альтернатив, формировании целевых показателей эффективности и анализе конкретных юрисдикций или организаций. Отмечено, что выбор индикаторов может значительно повлиять на результаты анализа. Методология, которая может казаться полезной и желательной при использовании одного набора показателей, может оказаться вредной и нежелательной при применении других.

Авторы исследования [2] акцентируют внимание на том, что ограниченность ресурсов в транспортных компаниях требует рационального подхода к их использованию. Для разработки стратегии развития необходимо применять системный анализ, который позволит оценить риски и неопределенности, характерные для данного сектора. В работе предложена концепция, основанная на принципах формирования стратегий с учетом факторов риска, а также использование модели для достижения долгосрочных целей. Циклический процесс стратегического анализа рисков в условиях неопределенности призван уменьшить разрыв между поставленными целями и фактическими результатами.

Многие авторы отмечают, что функционирование ТРС происходит в условиях значительной неопределенности. Эта неопределенность обусловлена нерегулярностью производственных процессов, характером обслуживаемых отраслей экономики и нестабильностью работы отдельных компонентов системы. К числу факторов, способствующих этой ситуации, относятся неритмичность технологических процессов и вариативность продолжительности различных транспортных и технологических операций [3–6]. Нельзя не отметить, что отмеченные факторы существенно влияют на устойчивость системы, в том числе на управление цепочкой поставок.

В [7–9] были исследованы подходы к выявлению факторов, влияющих на построение цепочек поставок в транспортно-логистических системах. На основе многомерного аналитического обзора научных источников обоснована классификация внутренних и внешних факторов, влияющих на управление цепями поставок в ТЛС.

При этом отмечено [10, 11], что применение графовых моделей для решения задач ТЛС позволяет снижает сложность сетевых путей, затраты и время на создание и обслуживание сети на основе систем. Теория графов может быть использована для поиска сообществ (взаимозависимых множеств) в сетях, а также в качестве аппарата для моделирования и описания реальных сетевых систем, таких как транспорт, вода, электричество, интернет, схемы рабочих операций в процессе производства, строительства и т.д.

Одним из важных факторов, оказывающих значительное влияние на транспортно-логистические системы, является неопределенность [12]. Это явление можно охарактеризовать как объективное, поскольку оно связано с присутствием элементов, при которых результаты действий невозможно предсказать с высокой точностью, а влияние этих элементов на результат остается неизвестным [13, 14]. Неопределенность также может проявляться в виде недостатка или неточности информации об условиях реализации товара. При разработке управленческих решений важно учитывать воздействие неопределенных факторов и тщательно анализировать все возможные последствия различных альтернатив, которые могут быть предложены для выбора.

Помимо оценки устойчивости, многофакторности и неопределенности параметров ТЛС необходимо учесть, что значение ее параметров в различные моменты времени могут изменяться. Данные изменения могут существенно влиять на принятия решений в различные моменты времени. Все эти аспекты необходимо учесть для отображения структуры функционирования ТЛС в реальных условиях.

В случае, когда модель ТЛС представима в виде графа [15, 16], для оценки и анализа ее устойчивости естественно использовать инварианты графа: доминирующее множество, внешне устойчивое множество, множество баз и т.д. [17]. В данной работе в качестве такого инварианта предлагается использовать понятие доминирующего множества нечеткого графа (FG).

Данная статья имеет следующую структуру. Во втором разделе приведены некоторые понятия нечетких графов. В третьем разделе поставлена задача анализа и оценки факторов устойчивости ТЛС на основе графовой модели. В четвертом разделе рассматривается применение нечеткой подхода для решения задач в области ТЛС на основе нечеткого доминирующего множества. В пятом разделе анализируется применение темпоральных нечетких графов для оптимизации ТСЛ с динамически изменяющимися параметрами. В заключении приводятся выводы и области дальнейших исследований.

Основные понятия и определения нечетких графов. *Ориентированным графом* [15] называется пара $G = (V, E)$, где V есть множество вершин; E есть множество ориентированных ребер - $E \subseteq V \times V$.

Нечеткий граф [16, 17] есть пара $\tilde{G} = (V, R)$, где V также есть множество вершин, R есть нечеткое отношение V, в котором элементы (ребра), соединяющие вершины V, имеют функцию принадлежности μ_R:$V \times V \rightarrow [0,1]$.

Пусть X есть произвольное подмножество вершин множества V. Для каждой вершины $y \in V \backslash X$, определим величину $\beta(X) = \underset{\forall y \in V}{\&} \underset{\forall x \in X}{\vee} \{\mu_R(x, y)\}$.

Множество X называется *доминирующим множеством вершин* графа $\tilde{G}$ со *степенью доминирования* $\beta(X)$ [18, 19].

Степень доминирования $\beta(X)$ означает, что во множестве X существует некоторая вершина, которая является смежной любой другой вершине графа со степенью не менее $\beta(X)$.

Пусть Y – минимальное доминирующее подмножество со степенью β(Y), если выполняется условие $(\forall X \subset Y)[\beta(X) < \beta(Y)]$. Пусть $Y_k = \{Y_{k_1}, Y_{k_2}, \dots, Y_{k_l}\}$ – семейство всех минимальных доминирующих подмножеств с k вершинами и степенями доминирования $\beta_{k1}, \beta_{k2}, \dots, \beta_{kl}$, соответственно и $\beta_k^0 = \max\{\beta_{ki}\}$. Тогда множество $\widetilde{D} = \{< \beta_1^0/1 >, < \beta_2^0/2 >, \dots, < \beta_n^0/n >\}$ есть *нечеткое доминирующее множество* графа $\tilde{G}$.

Нечеткий темпоральный граф есть тройка $\tilde{G} = (V, \{\tilde{\Gamma}_t\}, T)$ [20], где множество V есть множество вершин (|X|=n), множество целых чисел t={1,2,…,T} определяет дискретное время, а $\{\tilde{\Gamma}_t\}$ определяет нечеткое семейство соответствий, отображающих вершины V iв себя в моменты времени $t = \overline{1, T}$.

Решение задачи в четкой постановке. Пусть необходимо спроектировать ТЛС. В выделенной области в точках (пунктах) x1, x2, x3, x4, x5 планируется разместить распределительные узлы (рис. 1).

Указанные места могут представлять собой не только распределительные центры, но и склады различного назначения, производственные предприятия и т.д. Необходимо разместить распределительные узлы в ТЛС таким образом, чтобы узлы, могли выполнять свои функции без необходимости взаимодействия друг с другом. То есть нужно определить перечень обоснованного и достаточного наличия распределительных узлов.

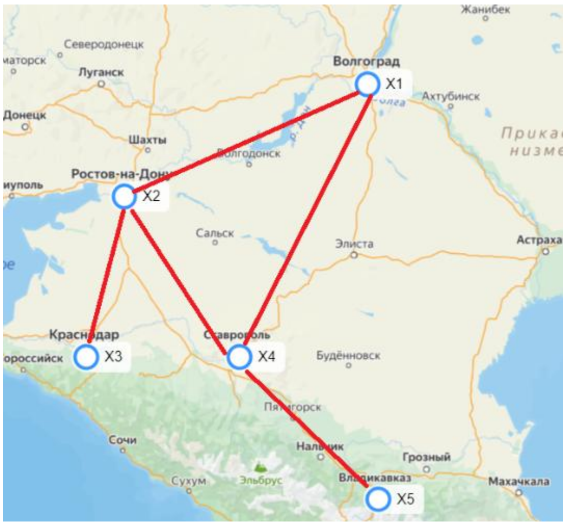

Рис. 1. Пример карты исследуемой области

В этом случае естественной моделью ТЛС является ее представление в виде графа, в котором вершины отображают распределительные центры, а ребра – связи между ними.

Также важно учитывать временные аспекты изменения параметров, характеризующие связи между точками на карте: загруженности дорог (скорость движения, пробки и остановки), стоимость перевозки (топливо, платные дороги и т.д.), нагрузка и ограничение по весу на данном участке дороги, состояние дороги (наличие ремонтов или строительных работ, которые могут замедлить движение), статистика аварийности на данном участке дороги, погодные условия, наличие заправок, пунктов отдыха и т.д.

При этом необходимо, чтобы ТЛС могла не только обособленно функционировать, но и могла адаптироваться и быстро переключаться между различными узлами, не нарушая общую цепь поставок в зависимости от поставленной задачи.

Структура ТЛС может изменяться ввиду различных событий, которые нарушают поток товаров или услуг в системе [21]. Постоянно увеличивающаяся масштабность ТЛС делает их более уязвимыми к разнообразным событиям. Для создания эффективных ТЛС необходимо обеспечить их надежность и устойчивость как в нормальных условиях, так и в ситуациях, когда возникают предсказуемые и непредсказуемые нештатные обстоятельства.

Решение задачи в нечеткой постановке. При определении связей между вершинами графа, в четкой постановке, ребрам назначались значения либо 0, либо 1, по наличию, либо отсутствии соответствующей связи. На практике функционирование ТЛС невозможно оценить однозначными критериями в рамках данных значений. ТРС представляет собой сложную многопараметричную систему со множеством условий. Также на наличие связей могут быть наложены различные условия: например, качество дорожного покрытия, наличие пробок на дорогах, спрос и т.д., При этом необходимо учесть, что пути в ТЛС двунаправлены и имеют различные значения оцениваемых характеристик.

Для определения оценки связей между вершинами графа необходимо применение математического аппарата, позволяющего учесть неоднозначность (либо качественность оценок параметров). Именно применение нечеткой логики обеспечит построение адекватной модели ТЛС в виде нечеткого графа [16, 17], где взаимодействия между элементами могут быть нечеткими. Использование нечетких графов позволяет вводить более гибкие критерии для оценки устойчивости, учитывая различные степени принадлежности ребер к определенным категориям.

Оценка устойчивости в транспортно-логистических системах позволяет определить слабые места в системе, которые могут привести к сбоям или снижению эффективности в условиях внешних или внутренних возмущений. Методы определения внутренне и внешне устойчивых множеств на графах могут быть применены в рамках транспортно-логистических систем (ТЛС). Так, например, внутренние устойчивые множества в ТЛС могут представлять собой ключевые узлы (например, склады, распределительные центры), удаление которых не приведёт к полной потере связи между остальными узлами сети. Что позволит ТЛС оставаться функциональными даже при сбоях или отказах в определённых точках. А внешние устойчивые множества могут представлять собой маршруты или транспортные средства, которые, если будут удалены, потребуют дополнительных ресурсов для восстановления нормальной работы системы, включая необходимость перенаправления грузов или использования альтернативных маршрутов.

В [22] предложено нахождение доминирующего нечеткого множества на основе алгоритма Магу.

Пусть множество X есть доминирующее множество графа $\tilde{G}$ со степенью β. Тогда для произвольной вершины $x_i \in V$ справедливо:

$$(\forall x_i \in V)\left[x_i \in X \vee \left(\exists x_j \in X \middle| \mu\left(x_j, x_i\right) \geq \beta\right)\right]. \quad (1)$$

Для каждой вершины $x_i \in V$ назначим Булеву переменную p_i такую, что, если $x_i \in X$ то $p_i = 1$, and 0 в противном случае. Назначим переменную $\xi_{ji} = \beta$ для выражения $\mu(x_j, x_i) \geq \beta$. Переходя от формы квантора предложения (1) к форме в терминах логических операций, мы получаем истинность логического предложения:

$$\Phi_D = \underset{i}{\&}\left(\underset{j}{\vee}\left(p_j \& \xi_{ji}\right)\right).$$

Далее раскрываем скобки воспользовавшись правилами нечеткого поглощения:

$$a \& a \wedge b = a;\ \xi' \wedge a \vee \xi'' \wedge a \wedge b = \xi' \wedge a, if\ \xi' \geq \xi''. \quad (2)$$

Получим:

$$\Phi_D = \underset{i=\overline{1,l}}{\vee}\left(p_{1_i} \& p_{2_i} \& \ldots \& p_{k_i} \& \beta_i\right). \quad (3)$$

Каждый дизъюнктивный член в выражении (3) определит подмножество вершин, которое образует минимальное доминирующее подмножество с вычисленной степенью β_i.

Пусть дан нечеткий ориентированный граф (рис. 2) с соответствующими весами на ребрах. В рамках рассматриваемой задачи рёбра графа представляют собой транспортные маршруты между узлами (складами, транспортными локациями, потребителями), которые могут иметь различные веса, отражающие время в пути, расходы на транспортировку или надежность маршрута (например, вероятность задержек, поломок или ремонт дороги).

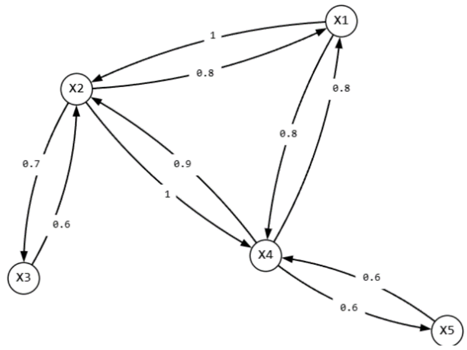

Рис. 2. Нечеткий граф ТЛС

Для рассматриваемого графа матрица смежности будет иметь вид:

$$R_X = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & 0.8 & 0 \\ x_2 & 0.8 & 0 & 0.7 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0.8 & 0.9 & 0 & 0 & 0.6 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{array}$$

Тогда Φ_{D1}, согласно (1), для рассматриваемого графа определится как:

$$\Phi_{D1} = (1\mathrm{p}_1 \vee 0.8\mathrm{p}_2 \ \vee 0.8\mathrm{p}_4)\&\,(1\mathrm{p}_1 \vee 1\mathrm{p}_2 \ \vee 0.6\mathrm{p}_3 \vee 0.9\mathrm{p}_4)\&\,(0.7\mathrm{p}_2 \vee 1\mathrm{p}_3)\ \&(0.8\mathrm{p}_1 \vee 1\mathrm{p}_2 \vee 1\mathrm{p}_4 \vee 0.6\mathrm{p}_5)\&\,(0.6\mathrm{p}_4 \vee 1\mathrm{p}_5).$$

Раскроем скобки, применим правила нечеткого поглощения (2) получим:

$$\Phi_{D1} = (0.8\mathrm{p}_1\mathrm{p}_3\mathrm{p}_5 \vee 1\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\mathrm{p}_5 \ \vee 1\mathrm{p}_1\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4\mathrm{p}_5 \vee 0.6\mathrm{p}_2\mathrm{p}_4 \ \vee 0.7\mathrm{p}_2\mathrm{p}_5 \vee 0.8\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3 1\mathrm{p}_5 \vee 0.6\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 \ \vee 0.8\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4\mathrm{p}_5.$$

Откуда следует, что граф $\tilde{G}$ имеет 7 наименьших доминирующих подмножеств, а нечеткое доминирующее множество имеет вид:

$$\widetilde{D}_1 = \{< 0.7/2 >, < 0.8/3 >, < 1/4 >\}.$$

Нечеткое доминирующее множество показывает, что:

♦ в графе существуют две вершины x_2, x_5, из которых смежны все остальные вершины графа со степенью не менее 0.7;

♦ в графе существуют три вершины x_2, x_3, x_5, из которых смежны все остальные вершины графа со степенью не менее 0.8;

♦ в графе существуют четыре вершины x_1, x_2, x_3, x_5, из которых смежны все остальные вершины графа со степенью 1.

Необходимо отметить, что при определении нечеткого доминирующего множества на нечетких графах интерпретация полученного решения отличается от классического определения доминирующего множества четкого графа. В нечетких графах, даже если две вершины являются смежными, они могут быть частью нечеткого доминирующего множества, в случае, когда их степени принадлежности к этому множеству соответствуют заданным критериям. Это позволяет более гибко подходить к анализу графов и моделированию различных ситуаций.

Решение задачи с динамически изменяющимися параметрами. В рамках рассмотрения задачи построения эффективной транспортно-логистической системы нельзя не отметить, что значения параметров, накладываемых на ребра, могут изменяться. Так, например, в различные моменты времени (дни недели, месяцы, сезоны) время в пути, доступность маршрута, ограничения по весу и т.д. могут быть различными. При проектировании ТЛС четко определить, например, время пути от точки x_1 до точки x_2. Данные условия можно учесть, используя темпоральные нечеткие графы.

Пусть задан нечеткий темпоральный граф $\tilde{G} = (V, \{\tilde{\Gamma}_t\}, \{1,2\})$ с сезонной оценкой пропускной способности пути (рис. 3).

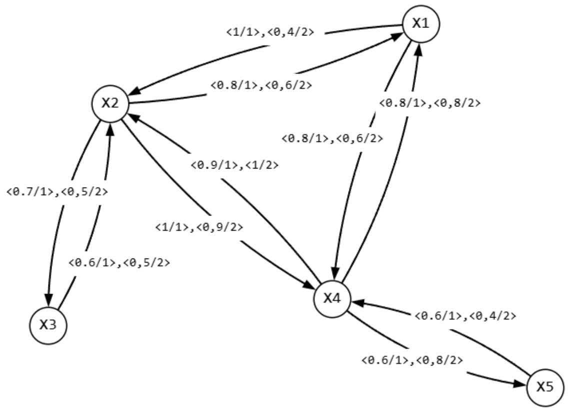

Рис. 3. Нечеткий темпоральный граф ТЛС

Оценка нечеткого доминирующего множества графа для t=1 была получена в предыдущем разделе. Для времени t=2 матрица смежности будет иметь вид:

$$R_2 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.5 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{array} \right| \end{array}.$$

Нечеткое доминирующее множество определится как:

$$\Phi_{D2} = (1p_1 \vee 0.6p_2 \vee 0.8p_4)\&(0.4p_1 \vee 1p_2 \vee 0.5p_3 \vee 1p_4)\&(0.5p_2 \vee 1p_3)\&(0.6p_1 \vee 0.9p_2 \vee 1p_4 \vee 0.4p_5)\&(0.8p_4 \vee 1p_5) =$$
$$= (0.8p_1p_3p_5 \vee 1p_1p_2p_3p_5 \vee 1p_1p_3p_4p_5 \vee 0.6p_2p_4 \vee 0.7p_2p_5 \vee 0.8p_2p_3 1p_5 \vee 0.6p_3p_4 \vee 0.8p_3p_4p_5..$$

Также раскрываем скобки, применяя правила нечеткого поглощения (2) получим:

$$\Phi_{D2} = 0.5p_2p_4 \vee 0.5p_2p_5 \vee 0.9p_1p_2p_3p_5 \vee 0.5p_1p_3p_5 \vee 1p_1p_3p_4p_5 \vee 0.6p_2p_3p_5 \vee 0.8p_3p_4.$$

Откуда следует, что нечеткое доминирующее множество для времени t=2 имеет вид:

$$\widetilde{D}_2 = \{< 0.8/2 >, < 1/4 >\}.$$

Для определения нечеткого доминирующего множества в любой момент времени конъюнктивно перемножим значения Φ_{D1} и Φ_{D2}:

$$\Phi_{D1}\&\Phi_{D2} = ((0.8p_1p_3p_5 \vee 1p_1p_2p_3p_5 \vee 1p_1p_3p_4p_5 \vee 0.6p_2p_4 \vee 0.7p_2p_5 \vee 0.8p_2p_3 1p_5 \vee 0.6p_3p_4 \vee 0.8p_3p_4p_5)\&(0.5p_2p_4 \vee 0.5p_2p_5 \vee 0.9p_1p_2p_3p_5 \vee 0.5p_1p_3p_5 \vee 1p_1p_3p_4p_5 \vee 0.6p_2p_3p_5 \vee 0.8p_3p_4).$$

В результате получаем:

$$\Phi_{D1}\&\Phi_{D2} = 0.5p_1p_3p_5 \vee 0.9p_1p_2p_3p_5 \vee 1p_1p_3p_4p_5 \vee 0.5p_2p_4 \vee 0.6p_2p_3p_5 \vee 0.8p_3p_4p_5 \vee 0.6p_3p_4.$$

Откуда следует, что нечеткое доминирующее множество в любой момент времени имеет вид:

$$\widetilde{D}_{1,2} = \{< 0.6/2 >, < 0.8/3 >, < 1/4 >\}.$$

Это, в частности означает, что в любой момент времени существуют 2 вершины которые смежные со всеми остальными со степенью не менее 0.6; существуют 3 вершины которые смежные со всеми остальными со степенью не менее 0.8.

Заключение. В данной работе для оценки и анализа устойчивости ТЛС в условиях неопределенности предложено использовать инварианты нечетких графов, а именно, нечеткое доминирующее множество. Показано, что нечеткое доминирующее множество позволяет решить задачу размещения распределительных узлов ТЛС. Приведены примеры нахождения нечетких доминирующих множеств для нечеткого и нечеткого темпорального графов.

Применение нечетких темпоральных графов открывает новые возможности для анализа и позволяет учитывать неопределенность и вариативность в данных, что делает их более подходящими для сложных систем и процессов. Также нечеткие темпоральные графы позволяют более точно моделировать и анализировать системы, где время является критически важным фактором.

В дальнейших исследованиях транспортно-логистическая система будет проанализирована с точки зрения оптимизации потока, так как в теории графов внутренняя устойчивость и транспортный поток связаны через концепции устойчивости сети и ее способности поддерживать определенные уровни потока в условиях различных изменений или нарушений.

Подтверждения. *Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта № 103-00001-25-02 «Разработка и исследование методологии интеллектуального геоинформационного моделирования транспортных процессов в условиях неполноты информации».*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Cai J., Liu X., Xiao Z., Liu J.* Improving supply chain performance management: A systematic approach to analyzing iterative KPI accomplishment // Decision Support Systems. – 2009. – 46 (2). – P. 512-521.
2. *Izvarina N., Vorozhbit L., etc*. Problems of the economy and economic security in the Russian Federation in the context of digitalization // Essence, role and the place of economic security in the system of the national security. – 2019. – No. 4. – P. 47-60.
3. *Kondratenko Y., Kondratenko G., Sidenko Ie.*, Taranov M. Fuzzy and Evolutionary Algorithms for Transport Logistics Under Uncertainty // Intelligent and Fuzzy Techniques: Smart and Innovative Solution. – 2021. – P. 1456-1463. – DOI: 10.1007/978-3-030-51156-2_169.
4. *Kiselenko A.N., Sundukov E. Yu, Tarabukina N.A.* World of Transport and Transportation // Methods to Forecast Transport Systems Development under Modern Conditions. – 2022. – Vol. 20, Issue 3 (100). – P. 158-167.
5. *Scipioni A., Manzardo A., Ren J.* Hydrogen Economy. Supply Chain, Life Cycle Analysis and Energy Transition for Sustainability. – Academic Press, 2017. – 328 p.
6. *Cinar D., Gakis K., Pardalos P.* Sustainable Logistics and Transportation: Optimization Models and Algorithms. – Springer. 2017. – 338 p.
7. *Xiugang W., Lysochenko A. A.* Identification of Factors Influencing the Construction of Supply Chains in China's Transport and Logistics Systems // Management Sciences. – 2024. – Vol. 13. – P. 428-439.
8. *Osintsev N., Rakhmangulov A.* Supply Chain Sustainability Drivers: Identification and Multi-Criteria Assessment // Logistics. – 2025. – Vol. 9, No. 1. – P. 24.
9. *Karim M.R., Dulal M., Sakila F., Aditi P., Smrity S.J., Asha N.N*. Analyzing the factors influencing sustainable supply chain management in the textile sector // Cleaner Logistics and Supply Chain. – 2024. – Vol. 13. – P. 101.
10. *Kanchana M., Kavitha K.* A review on transportation and smart logistics using graph theoretical approach // Advances in Mathematics: Scientific Journal. – 2020. – 32. – P. 612-635.
11. *Yatskin D.V., Kochkarov A.A., Kochkarov R.A.* Modeling of transport and logistics systems and the study of the structural stability // Management Sciences in Russia. – 2020. – P. 102-111.
12. *Chislov O., Lyabakh N., Kolesnikov M., Bakalov M., Bezusov D.* Fuzzy modelling of the transportation logistics processes // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – 14 (2). – P. 77-87.
13. *Wang G.* TOPSIS Evaluation System of Logistics Transportation Based on an Ordered Representation of the Polygonal Fuzzy Set // International Journal of Fuzzy Systems. – 2020. – Vol. 22, No. 5. – P. 1565-1581.
14. *Dey B.* Warehouse location selection by fuzzy multi-criteria decision making methodologies based on subjective and objective criteria. International Journal of Management Science and Engineering Management. – 2015. – Vol. 11, No. 4. – P. 262-278.
15. *Ore O.* Theory of graphs. Amer. Math. Soc. Colloq. – Publ. Providence, 1962.

16. *Mordeson J.N. Nair P.S.* Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs // Studies in Fuzziness and Soft Computting. – 2000. – 46.
17. *Kaufmann A.* Introduction a la theorie des sous-ensemles flous. – Paris: Masson, 1977.
18. *Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.* Stable Sets in Graphs // Algorithms and Combinatorics. – 1993. – 2. – P. 272-303.
19. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткие графы и гиперграфы. – М.: Научный мир, 2005. – 255 с.
20. *Nagoorgani A., Chandrasekaran V.T.* Domination in fuzzy graph // Advances in Fuzzy Sets and Systems. – 2006. – 1 (1). – P. 17-26.
21. *Varajão J., Lourenço J.C., Gomes J.* Models and methods for information systems project success evaluation // A review and directions for research. – 2022. – 8 (12). – e11977.
22. *Bozhenyuk A., Belyakov S., Knyazeva M., Rozenberg I.* Searching Method of Fuzzy Internal Stable Set as Fuzzy Temporal Graph Invariant // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – 583. – P. 501-510.

REFERENCES

1. *Cai J., Liu X., Xiao Z., Liu J.* Improving supply chain performance management: A systematic approach to analyzing iterative KPI accomplishment, *Decision Support Systems,* 2009, 46 (2), pp. 512-521.
2. *Izvarina N., Vorozhbit L., etc*. Problems of the economy and economic security in the Russian Federation in the context of digitalization, *Essence, role and the place of economic security in the system of the national security*, 2019, No. 4, pp. 47-60.
3. *Kondratenko Y., Kondratenko G., Sidenko Ie.*, Taranov M. Fuzzy and Evolutionary Algorithms for Transport Logistics Under Uncertainty, *Intelligent and Fuzzy Techniques: Smart and Innovative Solution,* 2021, pp.1456-1463. – DOI:10.1007/978-3-030-51156-2_169.
4. *Kiselenko A.N., Sundukov E. Yu, Tarabukina N.A.* World of Transport and Transportation, *Methods to Forecast Transport Systems Development under Modern Conditions,* 2022, Vol. 20, Issue 3 (100), p. 158-167.
5. *Scipioni A., Manzardo A., Ren J.* Hydrogen Economy. Supply Chain, Life Cycle Analysis and Energy Transition for Sustainability. Academic Press, 2017, 328 p.
6. *Cinar D., Gakis K., Pardalos P.* Sustainable Logistics and Transportation: Optimization Models and Algorithms. Springer. 2017, 338 p.
7. *Xiugang W., Lysochenko A. A.* Identification of Factors Influencing the Construction of Supply Chains in China's Transport and Logistics Systems, *Management Sciences,* 2024,Vol. 13, pp. 428-439.
8. *Osintsev N., Rakhmangulov A.* Supply Chain Sustainability Drivers: Identification and Multi-Criteria Assessment, *Logistics,* 2025, Vol. 9, No. 1, pp. 24.
9. *Karim M.R., Dulal M., Sakila F., Aditi P., Smrity S.J., Asha N.N.* Analyzing the factors influencing sustainable supply chain management in the textile sector, *Cleaner Logistics and Supply Chain,* 2024, Vol. 13, pp. 101.
10. *Kanchana M., Kavitha K.* A review on transportation and smart logistics using graph theoretical approach, *Advances in Mathematics: Scientific Journal,* 2020, 32, pp. 612-635.
11. *Yatskin D.V., Kochkarov A.A., Kochkarov R.A.* Modeling of transport and logistics systems and the study of the structural stability, *Management Sciences in Russia,* 2020, pp. 102-111.
12. *Chislov O., Lyabakh N., Kolesnikov M., Bakalov M., Bezusov D.* Fuzzy modelling of the transportation logistics processes, *Journal of Physics: Conference Series,* 2021, 14 (2), pp. 77-87.
13. *Wang G.* TOPSIS Evaluation System of Logistics Transportation Based on an Ordered Representation of the Polygonal Fuzzy Set, *International Journal of Fuzzy Systems,* 2020, Vol. 22, No. 5, pp. 1565-1581.
14. *Dey B.* Warehouse location selection by fuzzy multi-criteria decision making methodologies based on subjective and objective criteria, *International Journal of Management Science and Engineering Management,* 2015, Vol. 11, No. 4, pp. 262-278.
15. *Ore O.* Theory of graphs. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Providence, 1962.
16. *Mordeson J.N. Nair P.S.* Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs, *Studies in Fuzziness and Soft Computting,* 2000, 46.
17. *Kaufmann A.* Introduction a la theorie des sous-ensemles flous. Paris: Masson, 1977.
18. *Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.* Stable Sets in Graphs, *Algorithms and Combinatorics,* 1993, 2, pp. 272-303.
19. *Bershteyn L.S., Bozhenyuk A.V.* Nechetkie grafy i gipergrafy [Fuzzy graphs and hypergraphs]. Moscow: Nauchnyy mir, 2005, 255 p.
20. *Nagoorgani A., Chandrasekaran V.T.* Domination in fuzzy graph, *Advances in Fuzzy Sets and Systems,* 2006, 1 (1), pp. 17-26.

21. *Varajão J., Lourenço J.C., Gomes J.* Models and methods for information systems project success evaluation, *A review and directions for research,* 2022, 8 (12), e11977.
22. *Bozhenyuk A., Belyakov S., Knyazeva M., Rozenberg I.* Searching Method of Fuzzy Internal Stable Set as Fuzzy Temporal Graph Invariant, *Communications in Computer and Information Science,* 2018, 583, pp. 501-510.

Розенберг Игорь Наумович – Российский университет транспорта; e-mail: avb@itt.net.ru, yaroshinna@gmail.com; г. Москва, Россия; тел.: +79166652310; д.т.н.; зав. кафедрой «Геодезия, геоинформатика и навигация».

Дубчак Ирина Александровна – Российский университет транспорта; e-mail: iri-dubchak@yandex.ru; г. Москва, Россия; тел.: +79166652310; заместитель директора.

Rozenberg Igor Naumovich – Russian University of Transport; e-mail: avb@itt.net.ru, yaroshinna@gmail.com; Moscow, Russia; phone: +79166652310; dr. of eng. sc.; head of the Department of Geodesy, Geoinformatics and Navigation.

Dubchak Irina Alexandrovna – Russian University of Transport; e-mail: iri-dubchak@yandex.ru; Moscow, Russia; phone: +79166652310; deputy director.

УДК 004.056 DOI 10.18522/2311-3103-2025-6-145-157

Е.В. Карачанская, О.В. Рыбкина

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАЩИЩЕННОЙ ОТ ЗАРАЖЕНИЯ ВИРУСАМИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ SIR-МОДЕЛИ

Представлен анализ детерминированных моделей распространения эпидемии компьютерных вирусов (SIR-модели) и их классификация. Выделены основные направления исследований данных моделей. Приведен анализ существующих стохастических моделей на основе SIR-модели и их разнообразие. Предлагается метод построения стохастической SIR-модели на основе классической SIR-модели в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито с винеровским процессом. Особенностью предложенного метода является сохранение инвариантов, один из которых присутствует в классической модели, а второй связан с постановкой задачи информационной безопасности. Показана возможность построения стохастической и детерминированной модели информационной системы, защищенной с вероятностью 1 от заражения компьютерными вирусами: стохастическая, инфицирование которой вирусами происходит непрерывно, и детерминированная, в которой вирус находится в информационной системе. Математическая стохастическая модель информационной системы, защищенной от эпидемии компьютерных вирусов, строится как система стохастических дифференциальных уравнений, первыми интегралами которой являются инварианты, сохраняющиеся с вероятностью 1. В качестве показателя защищенности системы рассматривается некоторое функциональное соотношение между переменными модели, сохраняющие постоянное значение. Внесение в модель компенсатора (программное управлением с вероятностью 1 (PCP1)), позволяет сохранять с вероятностью 1 заданный показатель защищенности, описанный с помощью переменных модели. Аналогичным образом, на основе предложенного алгоритма, строится детерминированная модель информационной системы, защищенной от заражения компьютерными вирусами. В построенную модель вводится управление, подобное программному управлению с вероятностью 1, которое позволит сохранять значение инвариантов. Особенность предлагаемых моделей состоит в том, что в модели сохраняются инварианты, связанные со свойствами, которые обеспечивают защищенность информационной системы. Исследование поведения построенных моделей проводится с использованием численного моделирования в среде MathCad. По результатам исследований сделаны выводы о возможности применения предложенного метода при построении стохастических моделей на основе других моделей распространения эпидемии, а также для моделей защиты информационной системы от распространения эпидемии компьютерных вирусов.

SIR-модель; информационная безопасность; модель защищенной информационной системы; сохранение свойств.