

**А.А. Дорофеев**

### **МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ СПЛАЙНОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**

*Математическое моделирование широко применяется в различных сферах деятельности, однако в случаях, когда имеющейся численной информации недостаточно для получения полного представления об объекте, построение математической модели затруднено или может привести к заведомо недостоверному результату. Существуют подходы к решению задач моделирования в условиях недостатка данных, при этом для получения необходимого результата может возникнуть необходимость использования методов, имеющих сложную математическую структуру. В связи с этим актуальной является задача адаптации математических методов к условиям недостатка данных. В данной работе рассмотрено решение задачи интерполяции с использованием сплайн-функций – одного из наиболее широко используемых методов как в математической теории, так и в прикладной математике. Разработана методика, позволяющая адаптировать сплайновые методы к условиям недостатка исходных числовых данных; применение этой методики к построению модели образующей цилиндра с эллиптическими днищами обеспечило гладкую стыковку фрагментов и отсутствие перегибов. Выполнение требований точности и гладкости модели было достигнуто за счёт последовательного уточнения числовых данных посредством введения в модель дополнительных узлов интерполяции и корректировки их расположения. В результате построения и анализа модели установлено, что сплайновые методы могут быть применены к решению задач интерполяции практически любой сложности. При этом наличие аналитического обоснования каждого шага процесса моделирования позволяет полностью автоматизировать вычисления. Рассматриваемая в статье задача связана с изготовлением изделий на станках с числовым программным управлением. Однако в силу своей универсальности данная методика может быть применена на практике к решению задач в различных отраслях деятельности. Практическая ценность разработанной методики состоит в возможности её применения ко многим задачам, имеющим прикладную направленность, а её включение в состав современных систем проектирования и пакетов прикладных программ позволит расширить их функциональность за счёт предоставления пользователю возможности введения дополнительных ограничений, накладываемых на модель исходя из практической точки зрения, что может обеспечить высокую степень гибкости реализации.*

*Математическое моделирование; сплайн-функции; интерполяция; поверхность вращения; кубический сплайн; линейно-экспоненциальный сплайн; численный анализ модели.*

**A.A. Dorofeev**

### **THE TECHNIQUE FOR SPLINE APPROXIMATIONS BUILDING IN CONDITIONS OF LIMITED SOURCE DATA**

*Mathematical modeling is widely applied in different fields of activity but in cases when the available numerical information is insufficient to get a complete picture of the object mathematical model building is difficult or can lead to a deliberately unreliable result. There are approaches to solving modeling problems with a lack of data therewith it may be necessary to use methods with complicated mathematical structure to get the desired result. In this regard, the task of adapting mathematical methods to data scarcity conditions is relevant. This paper discusses the solution of the interpolation problem using spline functions as one of the most widely used methods in mathematical theory and applied mechanics. A technique has been developed to adapt spline methods to data shortage conditions, applying this technique to building of a cylinder with elliptical bottoms forming model provided smooth joining of fragments and absence of kinks. Meeting the requirements of precision and smoothness of the model was achieved by sequential refinement of numerical data with adding interpolation nodes to the model and correction of their location. As a result of building and analysis of the model it was found that spline methods can be applied to solving interpolation problems of almost any complexity. The availability of an analytical justification for every step of modeling process allows to automate the process fully. The problem considered in the article is connected with manufacturing products on the numerically controlled machines. However, this technique due to its versatility can be applied to solving problems in various fields of activity. The practical value of the developed technique is the possibility of its application to many practical tasks.*

*Its integration into modern CAD systems and application software packages will allow to expand their functionality by providing the user with the possibility to introduce the extra restrictions imposed on the model practically what can ensure a high degree of implementation flexibility.*

*Mathematical modeling; spline functions; interpolation; surface of revolution; cubic spline; linear-exponential spline; numerical analysis of a model.*

**Введение.** В современных условиях математическое моделирование широко применяется и развивается, охватывая различные сферы деятельности. Во многом это обусловлено использованием пакетов прикладных программ моделирования, которые предоставляют пользователю средство обработки информации, обладающее обширными возможностями выбора методов и средств моделирования и при этом не требующее знаний языков программирования. Процесс моделирования организуется в форме диалога между человеком и персональным компьютером.

Одной из основных сложностей, возникающих на практике при построении математических моделей, является недостаток исходной информации о моделируемом объекте, что может существенно затруднять построение модели, адекватно описывающей основные свойства объекта, а также привести к неправильным выводам и ошибкам в анализе. Причины недостатка исходных данных, могут заключаться как в сложности сбора данных, так и в специфике свойств моделируемого объекта, заключающейся в том, что для получения полного представления об объекте необходимо владеть некоторой дополнительной информацией помимо той, что может быть выражена количественно.

В [1] сформулирована постановка задачи моделирования в условиях недостатка данных, а также предложен подход к её решению с использованием сплайн-интерполяции: образующая поверхности вращения определяется как кусочно-заданная функция

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-4x^2}, & x \in [-0.45, 0); \\ 1, & x \in [0, 5]; \\ \sqrt{1-16(x-5)^2}, & x \in (5, 5.12], \end{cases} \quad (1)$$

при этом осложняющим фактором для построения сплайновой модели является разнородность фрагментов, её составляющих – прямолинейный участок, составляющий около 90% ширины образующей, с обеих сторон дополняется двумя дугами эллипса. Как отмечено в [2], приближения данной функции с помощью полиномиальных сплайнов сильно отклоняются от прямой линии на этом продолжительном участке. При этом также следует принять во внимание, что уточнение исходных данных путём добавления дополнительных узлов сети данных вдоль прямой не приведёт к качественному улучшению модели, так как полученное в результате приближение будет содержать локальные минимумы и максимумы на отрезках между этими узлами, что в данном случае неприемлемо с практической точки зрения – изготавливаемое по модели изделие вследствие дефекта формы не может быть пригодным к использованию.

Таблица 1

**Исходные данные – координаты узлов интерполяции**

$x_i$	-0.450	-0.225	0.000	5.000	5.120	5.240
$y_i$	0.436	0.893	1.000	1.000	0.877	0.280

Таким образом, исходная численная информация о модели (данные приведены в табл. 1) требует уточнения в виде дополнительных ограничений, обусловленных практически. Эти ограничения сформулированы в [1] и заключаются в следующем: 1) допустимое отклонение не превышает заданного значения  $\varepsilon$ ; 2) первая производная не должна осциллировать (т.е. переходить через нуль более одного раза); 3) вторая производная должна быть непрерывной и не принимать положительных значений. В [2] рассмотрено решение этой задачи с помощью линейно-экспоненциального сплайна – параметрической конструкции, при этом решение сводится к подбору значения параметра, что не является тривиальной задачей, так как требует анализа свойств базисных функций сплайнов, и соответственно функция, приближающая прямолинейный участок, имеет вид

$$T(x)|_{[0,5]} = 1.000184 + 0.0000441031x + 2.868004 \cdot 10^{-218} \sinh(-493 + 98.6x) - 6.313798 \cdot 10^{-218} \sinh(98.6x). \quad (2)$$

Так как для вычисления третьего и четвёртого слагаемых по формуле (2) требуется перемножение большого ( $\sinh 493 \approx \frac{e^{493}}{2}$  порядка  $10^{213}$ ) и малого (порядка  $10^{-218}$ ) чисел, то в условиях ограниченности разрядной сетки возможны значительные отклонения расчётных моделей от ожидаемого результата, по величине превышающие требуемую точность на несколько порядков вследствие ошибок округления.

Материалы и методы. В данной работе рассмотрено решение этой задачи с помощью кубического сплайна, включая процесс уточнения исходных данных, а также анализ полученных результатов. Кубическая сплайн-интерполяция – это метод интерполяции, при котором для заданного набора точек (узлов) строится кусочно-заданная функция, состоящая из кубических полиномов. Этот метод обеспечивает высокую степень гладкости, так как первые и вторые производные полинома непрерывны в узловых точках, а также отличается простотой реализации.

Сплайн-функции являются одним из самых популярных методов интерполяции благодаря их эффективности и точности и находят широкое применение в построении математических моделей с помощью современного специализированного программного обеспечения. Благодаря своей распространённости сплайновые методы могут быть адаптированы к различным условиям посредством создания соответствующей модификации. Так, возможно применение систем базисных сплайнов для аппроксимации функций и экспериментальных зависимостей, имеются алгоритмы для определения параметров сплайнов [3]; разрабатываются алгоритмы, связанные с приближением сплайн-функциями, даётся описание пространств сплайнов, описываются алгоритмы приближения интерполяционными кубическими сплайнами с учётом граничных условий, а также параболические сплайны, В-сплайны и адаптивная аппроксимация сплайнами [4]. Для оптимизации параметров сплайна может быть использована математическая модель в виде модифицированной функции Лагранжа и специальный алгоритм нелинейного программирования [5]; с помощью сплайн-функций выполняется интерполяция сложных кривых поверхностей, для чего предлагается универсальная методика проектирования поверхностей сложных форм с использованием обобщённых эрмитовых сплайнов [6]. Помимо этого, решаются задачи выбора функционального базиса сплайна путём эффективного размещения узлов [7] и с помощью модификации кубического сплайна с изменением положения узлов склеивания [8], выполняется сравнительный анализ результатов приближённого вычисления с точными данными при интерполяции кубическим сплайном, включая анализ погрешностей и расхождений [9].

Многие практические задачи интерполяции решаются с помощью сплайнов: в [10] рассматривается двухэтапная схема при неизвестном числе элементов сплайна для аппроксимации многозначных функций, заданных последовательностью точек на плоскости, на примере задачи проектирования плана трасс линейных сооружений; в [11] для решения этой задачи используются сплайны сложной структуры. В [12] рассматриваются методы построения гладких решений в виде рациональных сплайн-функций специального вида для начальной задачи в случае нормальной системы двух дифференциальных уравнений.

Также заслуживают внимание современные исследования, связанные с применением сплайновых методов. Так, популярными являются В-сплайновые методы; имеются разработки на их основе, примерами которых могут служить модель подавления шума на усечённом телевизионном изображении с помощью дробного В-сплайна [13], а также моделирование суточных колебаний температуры с помощью В-сплайновой регрессии и усечённой сплайновой модели [14]. Широкое применение находят сплайновые конструкции специального вида; к таковым могут быть отнесены тонкопластинные сплайны (TPS), применяемые для анализа биомедицинских изображений [15] и в аналитических исследованиях – на основе методов TPS может строиться аппроксимация Лапласа, применяемая для максимизации предельной вероятности при анализе модели тонких пластин с косой нормалью

[16]. Аналитические исследования, основанные на сплайновых методах, также включают в себя разработку типизированных сплайновых методов для решения дифференциальных уравнений специального вида [17] и другие их применения и адаптации.

Для построения модели, удовлетворяющей указанным выше условиям, требуется уточнение данных на участке, где наблюдается максимальное отклонение от функции-оригинала, что может быть достигнуто посредством добавления дополнительных узлов склеивания на интервале  $(0, 5)$  (исходные данные приведены в табл. 1). Необходимо обратить внимание, что во избежание образования локальных экстремумов новые узлы следует располагать не строго вдоль прямой линии, при этом величина отступа не должна превышать допустимое отклонение  $\varepsilon = 0.02$ . Также следует учитывать, что введение дополнительных данных увеличивает вычислительную нагрузку на модель, в связи с чем уточнение должно выполняться исходя из соображений рациональности, то есть вклад каждого добавляемого узла в улучшение качественных свойств модели должен быть максимально возможным. Выполним с этой целью описанные ниже действия.

Для выявления точки максимального отклонения исследуем первую производную функции  $S_0(x)$  – естественного кубического сплайна, построенного по исходным числовым данным и граничным условиям  $S_0''(x) = 0$ . На рис. 1 приведено графическое представление функции  $S_0(x)$  в сопоставлении с моделируемой функцией  $f(x)$ , определяемой формулой (1), и производных первого и второго порядка вблизи точек стыка. Из этого сопоставления видно, что максимальное отклонение  $\delta_{\max}$  достигается именно на интервале  $(0, 5)$ , где наблюдается недостаток данных (рис. 1,а), а вторая производная функции  $f(x)$  имеет разрывы в точках стыка эллиптического и прямолинейного участков, в то время как сплайновая модель обеспечивает гладкость первой производной и соответственно непрерывность второй производной на всём интервале задания функции (рис. 1,б,в). На интервале  $(0, 5)$  функция  $S_0(x)$  определяется многочленом третьей степени:

$$S_0(x)|_{[0, 5]} = 1 + 0.0829031x - 0.0262926x^2 + 0.00194240x^3.$$

Так как максимальное отклонение наблюдается в точке экстремума, то в результате получаем, что  $\delta_{\max} \approx 0.076$  при  $x^* \approx 2.036$  – это значение является решением уравнения

$$0.0829031 - 0.0525853x + 0.00582721x^2 = 0,$$

левая часть которого определяет первую производную  $S_0'(x)$  на интервале  $(0, 5)$ . Добавляя новый узел склеивания  $(x^*, y^*)$ , необходимо учитывать величину допустимого отклонения от исходных значений, поэтому в качестве  $y^*$  выберем максимально возможное значение, которое может быть скорректировано в соответствии с требованиями, накладываемыми условиями задачи. В нашем случае можно положить  $y^* = 1.019$ , что будет являться значением моделирующей функции при  $x = x^*$ ; таким образом, для построения следующего приближения  $S_1(x)$  числовые данные дополняются узлом  $(x^*, y^*) = (2.036, 1.019)$ , который будет участвовать в дальнейших построениях наряду с имеющимися узлами. Все шаги уточнения данных, а также результаты анализа полученных моделей отражены в итоговых табл. 4 и 5, приведённых в конце раздела.

По числовым данным, представленным в третьей строке табл. 4, строится модель  $S_1(x)$  – кубический сплайн с граничными условиями  $S_1''(x) = 0$ :

$$S_1(x)|_{[0, 5]} = \begin{cases} 1 + 0.0787930x - 0.0576072x^2 + 0.0115377x^3, & x \in [0, 2.036]; \\ 1.128350 - 0.110328x + 0.0352811x^2 - 0.00366991x^3, & x \in (2.036, 5]. \end{cases}$$

На рис. 2 и в табл. 5 (первая и вторая строки) приведены результаты сопоставления моделей  $S_1$  и  $S_0$ : так, для модели  $S_1$  по сравнению с моделью  $S_0$  улучшение свойств модели наблюдается только по величине максимального отклонения, хотя оно также

превышает допустимое (рис. 2,а), при этом первая производная  $S_1'$  обращается в нуль в трёх точках (рис. 2,б), а вторая производная  $S_1''$  принимает положительные значения на интервале большей длины (рис. 2,в). Отсюда следует, что дальнейшую корректировку данных следует выполнять также исходя из соображений выполнения условия на величину максимально допустимого отклонения  $\delta_{\max}$ .

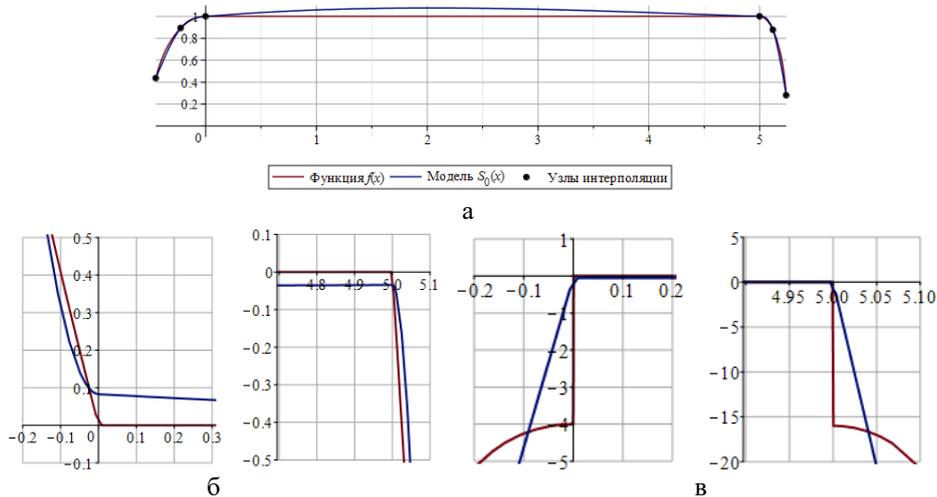


Рис. 1. Сопоставление моделируемой функции – образующей поверхности вращения  $f(x)$  и кубической сплайновой модели  $S_0(x)$ , построенной по 6 точкам исходных данных: а – графики функций (соотношение горизонтального и вертикального масштабов 1:1), б – первая производная, в – вторая производная

Для модели  $S_1$  точка максимального отклонения определяется исходя из соотношения  $S_1'(x) = 0$ :

$$0.0787930 - 0.115214x + 0.0346132x^2 = 0$$

(левая часть этого уравнения определяет первую производную сплайна  $S_1$  на интервале  $(0, 2.036)$ , где наблюдается максимальное отклонение), откуда  $x \approx 0.962$ .

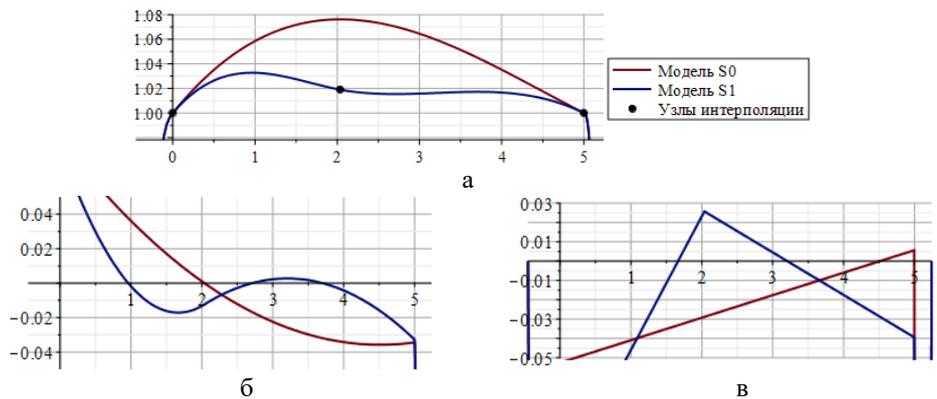


Рис. 2. Сопоставление кубических сплайновых моделей  $S_0$  – исходная модель (по 6 узлам) и  $S_1$  – модель после добавления одного дополнительного узла: а – отклонение от прямой линии на интервале  $[0, 5]$ , б – первая производная; в – вторая производная; на графиках видны участки, где требуется корректировка данных

При добавлении новых данных в модель кубической сплайн-интерполяции важным этапом является определение координат узлов с учётом изменения поведения интерполяционной функции. Для повышения точности модели вместо фиксированного выбора значений моделирующей функции  $y^* = f(x^*)$  в добавляемых узлах склеивания целесообразно рассмотреть параметрическое представление значения  $y^*$  в виде  $y^* = 1 + z$ , где приращение  $z$  варьируется от 0 до  $z_{\max}$  – максимального значения, определяемого исходя из координат ближайших узлов склеивания. Так, для модели  $S_1$  значение  $z$  при добавлении узла склеивания в точке  $x^* = 0.962$  может изменяться в пределах от 0 до 0.019.

Зависимость величины максимального отклонения и количества точек обращения в нуль первой производной, а также расположения этих точек от величины  $z$  достаточно сложна и требует содержательного аналитического исследования. Здесь мы рассмотрим экспериментальное исследование – сопоставим несколько моделей, построенных для различных значений  $z$  в указанных выше границах при  $x^* = 0.962$ ; в табл. 2 и на рис. 3,а приведены результаты этого сопоставления. Таким образом, для модели  $S_2$  в качестве оптимального может быть принято значение  $z^*$ , соответствующее минимуму максимального отклонения:

$$\delta_{\max}(z^*) = \min_z \delta_{\max}(z) \Rightarrow z^* = 0.018;$$

числовые данные для построения модели  $S_2$  приведены в строке 4 табл. 4.

Таблица 2

**Зависимость максимального отклонения моделирующей функции от величины приращения  $z$  при добавлении узла склеивания в точке  $x^* = 0.962$**

$z$	0.001	0.005	0.010	0.015	<b>0.018</b>
$\delta_{\max}$	0.032	0.030	0.028	0.025	<b>0.024</b>

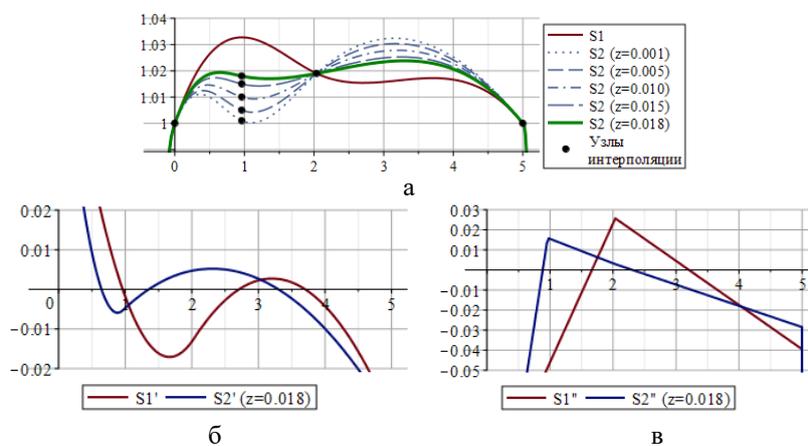


Рис. 3. Сопоставление графиков моделей  $S_1$  и  $S_2$ : а – определение оптимального расположения дополнительного узла для построения модели  $S_2$ , б – первая производная; в – вторая производная

Анализируя полученную модель  $S_2$ :

$$S_2(x)|_{[0,5]} = \begin{cases} 1 + 0.0744273x - 0.0908700x^2 + 0.0342546x^3, & x \in [0, 0.962]; \\ 1.032305 - 0.0263169x + 0.0138537x^2 - 0.00203225x^3, & x \in (0.962, 2.036]; \\ 1.030047 - 0.0229894x + 0.0122194x^2 - 0.00176468x^3, & x \in (2.036, 5], \end{cases}$$

заключаем, что ни одно из требований, накладываемых условиями задачи, для этой модели также не выполняется: максимальное отклонение также превышает допустимое, а первая производная обращается в нуль в трёх точках (результаты численного анализа приведены в третьей строке табл. 5). При этом качественные улучшения заключаются в уменьшении абсолютной величины максимального отклонения, уменьшении амплитуды осцилляций первой производной (рис. 3,б), а также уменьшении абсолютной величины положительного максимума второй производной (рис. 3,в). Таким образом, дальнейшее уточнение модели также следует выполнять посредством добавления узлов склеивания в точках с наибольшим отклонением, при этом индикатором местоположения этих точек является выполнение равенства  $S'(x) = 0$ .

Повторяя эти операции несколько раз, получим модель  $S_3$  :

$$S_3(x)|_{[0, 5]} = \begin{cases} 1 + 0.0723236x - 0.106898x^2 + 0.0552429x^3, & x \in [0, 0.645]; \\ 1.015402 + 0.000688545x + 0.00416376x^2 - 0.00215353x^3, & x \in (0.645, 0.962]; \\ 1.013165 + 0.00766276x - 0.00308594x^2 + 0.000358495x^3, & x \in (0.962, 2.036]; \\ 1.012033 + 0.00933032x - 0.00390498x^2 + 0.000492587x^3, & x \in (2.036, 3.301]; \\ 1.178036 - 0.141536x + 0.0417982x^2 - 0.00412250x^2, & x \in (3.301, 5] \end{cases}$$

(рис. 4 и четвёртая строка табл. 5), для которой условия на величину максимального отклонения и однократное обращение в нуль первой производной выполняются (рис. 4,а,б), а по свойствам второй производной имеются качественные улучшения: производная  $S_3''$  принимает положительные значения на отрезке меньшей длины по сравнению с производной  $S_2''$ , также положительный максимум производной  $S_3''$  имеет меньшую абсолютную величину (рис. 4,в). При этом необходимо отметить, что выявление качественных улучшений свойств моделирующей функции и производных является существенным и в случае невыполнения ограничений, накладываемых условиями задачи, так как величина фактического отклонения от допустимого оказывает влияние на форму и гладкость модели. Также при анализе важно обращать внимание на «потенциально проблемные» участки, в которых могут нарушаться условия при дальнейшем уточнении положения узлов; так, для модели  $S_3$  таковой является окрестность точки  $x^* = 0.645$ , где вторая производная имеет локальный максимум (рис. 4,в). Что касается дальнейшего уточнения числовых данных, то для модели  $S_3$  требуется коррекция значения функции в точке  $x^* = 3.301$ , соответствующей положительному максимуму второй производной: нарушение условия  $S_3''(x) \leq 0$  свидетельствует о наличии перегиба в окрестности данной точки.

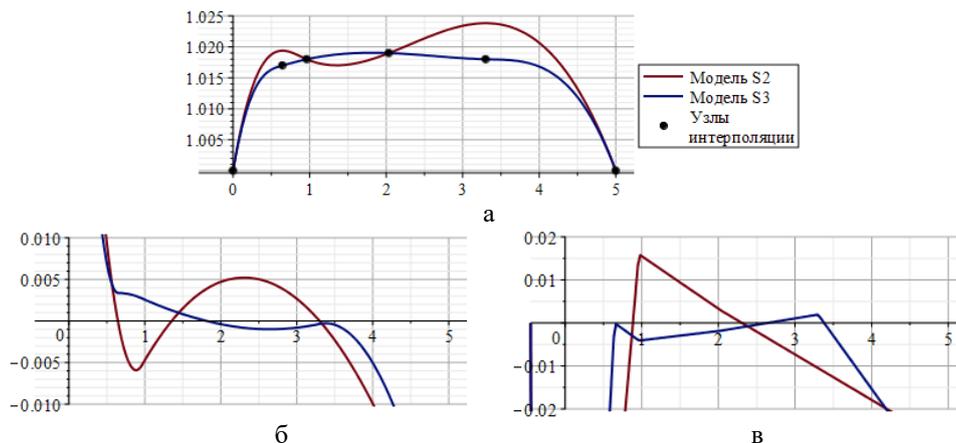


Рис. 4. Сопоставление моделей  $S_2$  и  $S_3$ : а – отклонение от прямой, б – первая производная; в – вторая производная

Для устранения перегиба необходимо скорректировать положение узла с помощью сдвига вверх, что соответствует увеличению значения  $y^*$ . Таким образом, значение  $z$  для данной точки может изменяться в пределах от 0.018 (текущее значение) до 0.019, что согласуется со значением в соседнем узле. Вторая производная кубического сплайна является кусочно-линейной функцией от  $x$ , для анализа представляет интерес её зависимость от величины параметра  $z$  на отрезках, прилегающих к корректируемому узлу склеивания:

$$\tilde{S}_{4,z}''(x)|_{[2.036, 5]} = \begin{cases} (0.0629053 - 3.330546z)x - 0.162718 + 8.606005z, & x \in [2.036, 3.301]; \\ (-0.0723199 + 2.643606z)x + 0.283660 - 11.114670z, & x \in (3.301, 5], \end{cases} \quad (3)$$

где  $\tilde{S}_{4,z}''(x)$  – вторая производная функции, получаемой при построении сплайна по данным для  $S_3$  с использованием параметрического представления  $y^* = 1 + z$  при  $x^* = 3.301$ , т.е. «предполагаемая» вторая производная функции  $S_4$ . При подстановке  $x = 3.301$  в (3) имеем:

$$\tilde{S}_{4,z}''(3.301) = 0.0449325 - 2.388128z;$$

как следует из рис. 5,а, коррекция положения узла склеивания при  $x^* = 3.301$  может привести к нарушению условия неположительности второй производной в другой точке  $x^* = 2.036$ , поэтому необходимо рассмотреть также аналитическое представление второй производной и для этого значения:

$$\tilde{S}_{4,z}''(2.036) = -0.0346428 + 1.825013z.$$

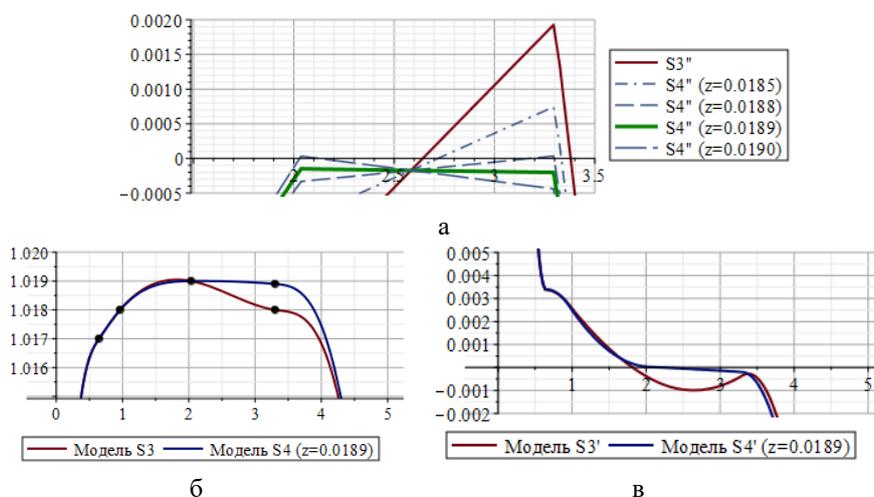


Рис. 5. Сопоставление моделей  $S_3$  и  $S_4$ : а – уточнение положения узла на основе коррекции по второй производной, б – моделирующая функция (устранение перегиба), в – первая производная

Для соблюдения условия неположительности требуется выполнение двух неравенств:  $\tilde{S}_{4,z}''(3.301) \leq 0$ ,  $\tilde{S}_{4,z}''(2.036) \leq 0$ . Решая эту систему относительно  $z$ , получаем

$$0.0188149 \leq z \leq 0.0189822;$$

таким образом, в качестве оптимального с точностью до 0.0001 может быть принято значение  $z^* = 0.0189$ .

С учётом выполненной коррекции числовые данные для построения модели  $S_4$  приведены в шестой строке табл. 4. При построении получаем, что

$$S_4(x)|_{[0, 5]} = \begin{cases} 1 + 0.0723205x - 0.106922x^2 + 0.0552867x^3, & x \in [0, 0.645]; \\ 1.015522 + 0.000125186x + 0.00500895x^2 - 0.00255866x^3, & x \in (0.645, 0.962]; \\ 1.012608 + 0.00921106x - 0.00443582x^2 + 0.000713952x^3, & x \in (0.962, 2.036]; \\ 1.018693 + 0.000245438x - 0.0000322759x^2 - 6.995107 \cdot 10^{-6}x^3, & x \in (2.036, 3.301]; \\ 1.152463 - 0.121327x + 0.0367966x^2 - 0.00372595x^3, & x \in (3.301, 5]; \end{cases}$$

графическое представление модели приведено на рис. 5,б,в), результаты численного анализа – в пятой строке табл. 5. Таким образом, требование  $S_4''(x) \leq 0$  также остаётся невыполненным, в данном случае положительное значение максимума второй производной обусловлено образованием перегиба в окрестности точки  $x^* = 0.645$ ; при этом качественные улучшения заключаются в уменьшении величины максимума и сокращении длины отрезка положительности второй производной  $S_4''$ , а дальнейшую корректировку модели необходимо выполнять, изменяя вертикальное положение узла склеивания при  $x^* = 0.645$ .

При построении модели  $S_5$  также рассмотрим аналитическое представление второй производной, отражающее её зависимость от величины параметра  $z$ , определяющего положение узла склеивания при  $x^* = 0.645$ , на прилежащих отрезках:

$$\tilde{S}_{5,z}''(x)|_{[0, 0.962]} = \begin{cases} (1.238376 - 53.332733z)x - 0.443723 + 13.522308z, & x \in [0, 0.645]; \\ (-1.679061 + 97.865237z)x + 1.438024 - 84.000382z, & x \in [0.645, 0.962]. \end{cases} \quad (4)$$

Сравнивая представления (3) и (4), заключаем, что выражения для производной  $S_5''$  содержит большие по модулю коэффициенты при  $z$ , что говорит о более высокой чувствительности этой модели к изменению положения узла склеивания. Так как максимум производной  $S_5''$  наблюдается при  $x^* = 3.301$ , то для более полного анализа целесообразно привести также аналитическое представление производной на отрезках интерполяции, прилегающих к этому узлу:

$$\tilde{S}_{5,z}''(x)|_{[2.036, 5]} = \begin{cases} (-0.0418574 + 2.459830z)x + 0.127501 - 7.503870z, & x \in [2.036, 3.301]; \\ (-0.0132941 - 0.533036z)x + 0.0332139 + 2.375250z, & x \in [3.301, 5], \end{cases}$$

откуда  $\tilde{S}_{5,z}''(0.645) = 0.355030 - 20.877304z$ ,  $\tilde{S}_{5,z}''(3.301) = -0.0106700 + 0.615698z$ .

Решая систему неравенств  $\tilde{S}_{5,z}''(0.645) \leq 0$ ,  $\tilde{S}_{5,z}''(3.301) \leq 0$  относительно  $z$ , получаем

$$0.0170055 \leq z \leq 0.0173299,$$

откуда следует, что с точностью до 0.0001 в качестве оптимального значения  $z^*$  может быть принято одно из значений 0.0171, 0.0172, 0.0173. Для однозначного определения оптимального значения  $z^*$  рассмотрим аналитическое представление второй производной на отрезках, прилегающих к узлу  $x^* = 0.645$ :

$$\tilde{S}_{5,0.0171}''(x)|_{[0, 0.962]} = \begin{cases} 0.326387x - 0.212191, & x \in [0, 0.645]; \\ -0.00556546x + 0.00161786, & x \in [0.645, 0.962] \end{cases}$$

$$\tilde{S}_{5,0.0172}''(x)|_{[0, 0.962]} = \begin{cases} 0.321053x - 0.211139, & x \in [0, 0.645]; \\ 0.00422106x - 0.00678218, & x \in [0.645, 0.962] \end{cases}$$

$$\tilde{S}_{5,0.0173}''(x)|_{[0, 0.962]} = \begin{cases} 0.315720x - 0.209787, & x \in [0, 0.645]; \\ 0.0140076x - 0.0151822, & x \in [0.645, 0.962] \end{cases}$$

Из этого представления следует, что при  $z^* = 0.0171$  угловые коэффициенты смежных участков производной  $S_5''$  имеют разные знаки, что говорит о наличии локального максимума второй производной при  $x^* = 0.645$  – «потенциально проблемной» зоны, в то время как при  $z^* = 0.0172$  и  $z^* = 0.0173$  локальный максимум в этой точке отсутствует (рис. 6).

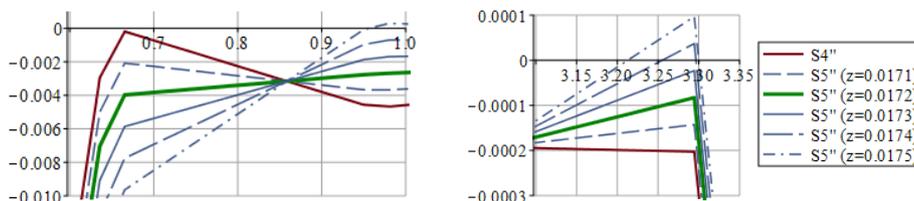


Рис. 6. Построение модели  $S_5$ : уточнение положения узла на основе анализа второй производной

В табл. 3 приведены значения максимума второй производной  $S_5''$  при этих двух значениях  $z^*$ : в случае  $z^* = 0.0172$  максимум имеет меньшее значение, что означает меньшую вероятность нарушения условия неположительности при дальнейшей корректировке модели. Таким образом, по совокупности двух факторов – величины максимального значения второй производной и отсутствия у неё других локальных максимумов – в качестве оптимального может быть принято значение  $z^* = 0.0172$ .

Таблица 3

**Зависимость максимального значения второй производной  $S_5''$  от величины приращения при вертикальной коррекции положения узла интерполяции**

$z$	<b>0.0172</b>	0.0173
$\max_{x \in (0, 5)} S_5''(x)$	<b>-0.000080</b>	-0.000018

По числовым данным в седьмой строке табл. 4 строится модель  $S_5$ :

$$S_5(x)|_{[0, 5]} = \begin{cases} 1 + 0.0724980x - 0.105570x^2 + 0.0535089x^3, & x \in [0, 0.645]; \\ 1.014170 + 0.00659288x - 0.00339109x^2 + 0.000703510x^3, & x \in (0.645, 0.962]; \\ 1.014510 + 0.00553255x - 0.00228887x^2 + 0.000321592x^3, & x \in (0.962, 2.036]; \\ 1.016591 + 0.00246591x - 0.000782663x^2 + 0.0000749959x^3, & x \in (2.036, 3.301]; \\ 1.153949 - 0.122367x + 0.0370341x^2 - 0.00374372x^3, & x \in (3.301, 5]. \end{cases} \quad (5)$$

Так как вторая производная  $S_5''$  не принимает отрицательных значений, что говорит о полном устранении перегибов на всём отрезке интерполяции (рис. 7,а,в), также первая производная  $S_5'$  обращается в нуль в одной точке и при этом монотонно убывает (рис. 7,б), то можно заключить, что модель  $S_5$  удовлетворяет всем заявленным условиям и соответственно может быть принята в качестве окончательной, что говорит о завершении процесса моделирования.

Результаты численного анализа модели  $S_5$  приведены в шестой строке табл. 5, графическое представление с окончательным расположением узлов интерполяции – на рис. 8,а; на рис. 8,б изображена созданная с помощью модуля Surface of Revolution программного пакета Maple трёхмерная визуализация поверхности вращения, построенной по сплайновой модели образующей.

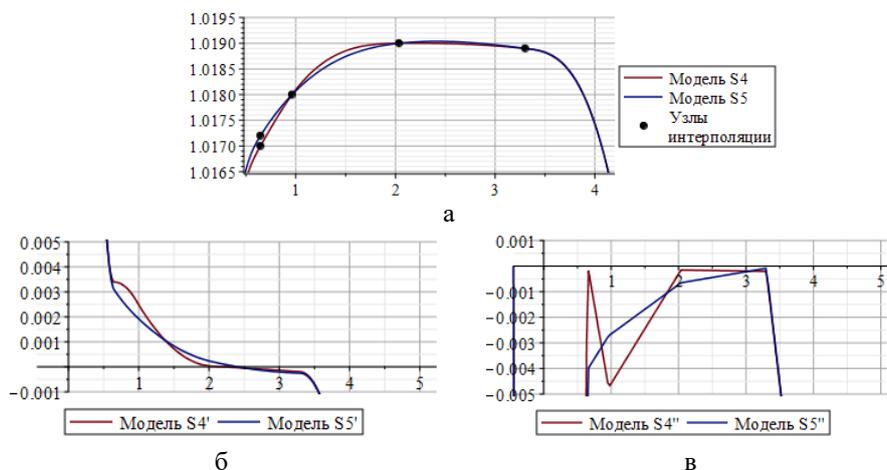


Рис. 7. Сопоставление моделей  $S_4$  и  $S_5$ : а – моделирующая функция (величина одного деления по вертикальной оси составляет 0.0001); б – первая производная; в – вторая производная

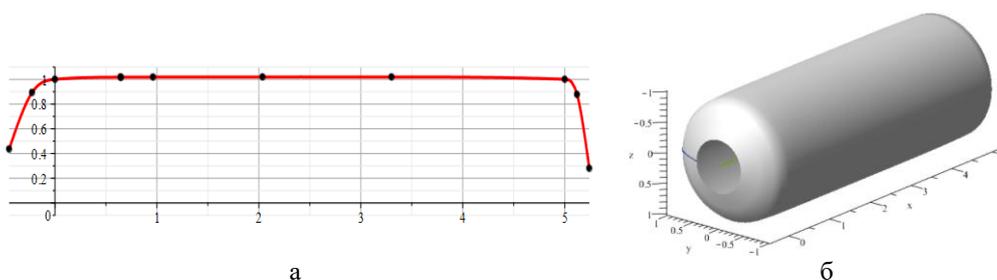


Рис. 8. Результаты моделирования: а – график кубической сплайн-функции  $S_5$  с указанием размещения узлов склеивания (соотношение горизонтального и вертикального масштабов 1:1); б – 3D-поверхность вращения, построенная по модели образующей  $S_5(x)$  (Maple)

Таблица 4

Динамика изменения положения узлов склеивания при последовательном уточнении числовых данных (в первой строке – координаты узлов интерполяции по горизонтальной оси, во второй и последующий строках – обозначение модели и координаты узлов по вертикальной оси; выделены изменения относительно предыдущей модели – значения координат добавленных узлов и уточнённые координаты имеющихся узлов)

$x_i$	-0.450	-0.225	0.000	0.645	0.962	2.036	3.301	5.000	5.120	5.240
$S_0$	0.436	0.893	1.000	-	-	-	-	1.000	0.877	0.280
$S_1$	0.436	0.893	1.000	-	-	<b>1.019</b>	-	1.000	0.877	0.280
$S_2$	0.436	0.893	1.000	-	<b>1.018</b>	1.019	-	1.000	0.877	0.280
$S_3$	0.436	0.893	1.000	<b>1.017</b>	1.018	1.019	<b>1.018</b>	1.000	0.877	0.280
$S_4$	0.436	0.893	1.000	1.017	1.018	1.019	<b>1.0189</b>	1.000	0.877	0.280
$S_5$	0.436	0.893	1.000	<b>1.0172</b>	1.018	1.019	1.0189	1.000	0.877	0.280

Таблица 5

**Сопоставление результатов анализа сплайновых моделей, построенных в ходе итерационного процесса уточнения числовых данных: максимальное отклонение, нули первой производной, интервалы положительности и максимум второй производной; 1 – максимальное отклонение в пределах допустимого, 2 – первая производная не осциллирует, 3 – вторая производная всюду неположительна**

Модель	$\delta_{\max}$	$S'(x) = 0$	$S''(x) > 0$	$\max S''(x)$	1	2	3
$S_0$	0.076193	2.036	(4.512, 5.000]	0.005687	-	+	-
$S_1$	0.032758	0.962, 2.706, 3.703	(1.664, 3.205)	0.025731	-	-	-
$S_2$	0.023834	0.644, 1.352, 3.301	(0.884, 2.308)	0.015977	-	-	-
$S_3$	0.019051	1.817	(2.642, 3.380)	0.001946	+	+	-
$S_4$	0.019002	2.212	(0.644, 0.653)	0.000116	+	+	-
$S_5$	0.019038	2.410	-	-0.000080	+	+	+

**Результаты и их обсуждение.** Предложенная в работе методика построения сплайновых приближений в условиях ограниченности исходных данных включает в себя следующие шаги:

- 1) **построение сплайновой модели** по набору числовых данных, определяемых координатами узлов интерполяции;
- 2) численный и качественный анализ модели – выполняется проверка выполнения требований, накладываемых условиями задачи, определяется направление дальнейшей корректировки модели в случае необходимости;
- 3) **определение координат дополнительных узлов интерполяции** – на наиболее «проблемных» участках добавляются новые узлы, их положение определяется исходя из условий максимальной оптимизации модели;
- 4) **коррекция координат имеющихся узлов склеивания** – при нарушении условий в узлах интерполяции изменяется положение узла (в данной статье рассмотрен пример вертикальной коррекции, но возможна также и горизонтальная);
- 5) **анализ чувствительности модели** – исследуется степень влияния вносимых в числовые данные изменений на точность приближения и гладкость функции.

На схеме на рис. 9 отображена последовательность действий при построении сплайновых приближений по данной методике.



Рис. 9. Схема процесса построения сплайнового приближения с уточнением данных

В работе рассмотрено применение методики к приближению функции (1) с помощью кубического сплайна, в результате чего получена модель (5); в табл. 6 приведено сравнение этой модели с моделью, построенной с использованием параметрического линейно-экспоненциального сплайна (2). На основании этого сравнения можно заключить, что каждый из этих методов имеет свои преимущества, при этом использование кубической сплайновой интерполяции позволяет избежать действий с большими и малыми величинами и тем самым снизить вероятность ошибок округления при расчётах.

Таблица 6

**Сравнение сплайновых методов моделирования по объёму численной информации и сложности вычислений**

Метод моделирования	Количество коэффициентов	Сложность вычислений
Линейно-экспоненциальный сплайн	20	высокая
Кубический сплайн	36	низкая

Ещё одним преимуществом данной методики является достаточно высокая степень формализации пошагового процесса моделирования; это обстоятельство говорит в пользу того факта, что на её основе может быть разработан алгоритм для создания программной реализации, предполагающей возможность задания пользователем исходных числовых данных и дополнительных ограничений, после чего весь процесс построения модели может быть полностью автоматизирован.

Помимо рассмотренной в этой статье задачи интерполяции формы сосудов для хранения веществ под давлением, изготавливаемых на оборудовании с числовым программным управлением, разработанная методика построения сплайновых приближений может быть применена ко многим задачам, имеющим прикладную направленность. Такими, например, являются задачи интерполирования профилей днищ, конструирования схем армирования конструкций из композиционных материалов, формирования траекторий движения рабочих органов четырёхкоординатного станка, где данная методика может быть использована при построении интерполяционных моделей с помощью САПР для получения управляющих программ намотки.

В задачах долгосрочного прогнозирования работы скважин на газоконденсатных месторождениях, на практике часто решаемых в условиях растущего спроса на эффективные методы управления добычей газа [18], данная методика может быть использована для аппроксимации исходных геолого-промысловых данных, а также улучшения точности прогнозов в виде технических приложений, математических моделей и алгоритмов для расчёта прогнозных ресурсов, позволяя таким образом оптимизировать процессы эксплуатации и увеличить общую эффективность добычи газа.

Также может быть оптимизировано решение существующих проблем в инженерных исследованиях: при моделировании напряжённо-деформированного состояния металлических конструкций возможно повышение точности расчётов и определение единиц сложной формы и напряжений в местах их соединений [19].

**Заключение.** Интегрирование данной методики в состав современных систем автоматизированного проектирования в виде программных модулей позволит расширить функциональность инструментария ПО, а также повысить гибкость процесса моделирования, в связи с чем актуальными являются вопросы исследования и разработки методов, используемых при построении математических моделей с помощью современного специализированного программного обеспечения; в частности, такими могут являться методы расчёта вероятностей связности [20]. Использование полученных результатов может повысить качество образовательного процесса, углубив теоретические значения и практические навыки студентов в вопросах выбора и реализации методов и алгоритмов обработки и анализа данных, численных методов для линейных систем, построения сложных программных приложений с применением объектно-ориентированной технологии и повторного использования кода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дорощев А.А., Бондаренко А.С., Трюхан С.А. Построение образующей поверхности вращения с использованием сплайн-интерполяции // Актуальные проблемы науки и техники. 2025: Матер. Всероссийской (национальной) научно-практической конференции, посвящённой 95-летию Донского государственного технического университета (Ростов-на-Дону, 12–14 марта 2025 года) / отв. ред. Н.А. Шевченко. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2025. – С. 635-637. – <https://ntb.donstu.ru/conference2025>.
2. Дорощев А.А., Пожарский Д.А. Интерполяция образующей поверхности вращения методом последовательных L-сплайновых приближений // Проблемы развития современного общества, Сборник научных статей 8-й Всероссийской национальной научно-практической конференции, (19-20 января 2023 года) / под ред. Кузьминой В.М. В 4-х т. Т. 4. – Курск: Изд-во ЗАО «Университетская книга», 2023. – С. 187-190. – <https://elibrary.ru/vzmvjd>.

3. *Зайнидинов Х.Н., Нурмуродов Ж.Н., Гофуржонов М.Р.* Алгоритмы и программы восстановления функций с помощью кубических базисных сплайнов // *Автоматика и программная инженерия.* – 2022. – № 1 (39). – <http://www.jurnal.nips.ru>.
4. *Иродова И.П.* Сплайны в вычислительной математике: учеб.-метод. пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2022. – 44 с. – <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20220203.pdf>.
5. *Карпов Д.А., Струченков В.И.* Оптимизация параметров сплайна при аппроксимации многозначных функций // *Russian Technological Journal.* – 2023. – 11 (2). – С. 72-83. – <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-72-83>.
6. *Ахмедов Ю.Х., Асадов Ш.К., Бадиев М.М.* Интерполяция сложных кривых поверхностей сплайн-функциями // *Universum: технические науки.* – 2023. – 3 (108). – <https://doi.org/10.32743/UniTech.2023.108.3.15130>.
7. *Basna R., Nassar H. & Podgórski K.* Spline-based methods for functional data on multivariate domains // *J. Math. Industry.* – 2024. – 14, 13. – <https://doi.org/10.1186/s13362-024-00153-w>.
8. *Sun M., Lan L., Zhu C., Lei F.* Cubic spline interpolation with optimal end conditions // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 2023. – Vol. 425. – P. 115039. – <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115039>.
9. *Курасов Д.А., Волоскова М.М., Сабирова Р.Д., Хомутова Е.И., Кутузов А.С.* Исследование метода интерполирования сплайнами и его реализация на языке программирования Python // *Современные наукоёмкие технологии.* – 2024. – № 4. – С. 46-53. – <https://doi.org/10.17513/snt.39972>.
10. *Карпов Д.А., Струченков В.И.* Сплайн-аппроксимация многозначных функций в проектировании трасс линейных сооружений // *Russian Technological Journal.* – 2022. – 10 (4). – С. 65-74. – <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>.
11. *Струченков В.И., Карпов Д.А.* Использование сплайнов сложной структуры в проектировании дорожных трасс // *Russian Technological Journal.* – 2024. – 12 (1). – С. 111-122. – <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-1-111-122>.
12. *Рамзанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* О решении начальной задачи для нормальной системы с помощью рациональных сплайн-функций // *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки.* – 2023. – Т. 38. – Вып. 1. – С. 33-39. – <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2023-38-1-33-39>.
13. *Ji D., Xue X., Xu Ch.* Truncated total variation in fractional B-spline wavelet transform for micro-CT image denoising // *Journal of X-Ray Science and Technology.* – 2023. – Vol. 31, No. 3. – P. 555-572. – <https://doi.org/10.3233/xst-221326>.
14. *Handajani S.S., Pratiwi H., Respatiwan R., et al.* Comparison of B-Spline and truncated Spline regression models for temperature forecast // *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan.* – 2023. – Vol. 17, No. 4. – P. 1969-1984. – <https://doi.org/0.30598/barekengvol17iss4pp1969-1984>.
15. *Faubert A.C.* Clipping spline: interactive, dynamic 4D volume clipping and analysis based on thin plate spline // *Biomedical Optics Express.* – 2025. – Vol. 16, No. 2. – P. 499. – <https://doi.org/10.1364/boe.544231>.
16. *Cavieres J., Ibacache-Pulgar G., Contreras-Reyes Ja. E.* Thin plate spline model under skew-normal random errors: estimation and diagnostic analysis for spatial data // *Journal of Statistical Computation and Simulation.* – 2023. – Vol. 93, No. 1. – P. 25-45. – <https://doi.org/10.1080/00949655.2022.2090564>.
17. *Einy M., Rashidinia Ja., Ghorbanalinezhad S.* Quintic and Septic C 2-spline methods for initial fractional differential equations // *Journal of Innovative Applied Mathematics and Computational Sciences.* – 2023. – Vol. 3, No. 1. – P. 35-48. – <https://doi.org/10.58205/jiamcs.v3i1.58>.
18. *Толтаев В.А., Ахмедов К.С.* Долгосрочное прогнозирование работы скважин газоконденсатных месторождений методами кубической сплайн-аппроксимации // *Нефтепромышленное дело.* – 2024. – № 9. – С. 10-22. – URL: <https://rucont.ru/efd/904508>.
19. *Yusufov A. et al.* Application of Computer-Aided Design (CAD) Systems when Solving Engineering Survey Tasks // *Universum: технические науки.* – 2023. – 3 (108). – <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/15088>.
20. *Иванченко А.Н., Иванченко К.Н.* Метод расчёта вероятности связности двухполюсной сети произвольной структуры // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки.* – 2023. – № 2. – С. 25-33. – <https://doi.org/10.17213/1560-3644-2023-2-25-33>.

#### REFERENCES

1. *Dorofeev A.A., Bondarenko A.S., Tryukhan S.A.* Postroenie obrazuyushchey poverkhnosti vrashcheniya s ispol'zovaniem spлайн-interpolyatsii [Building of a Revolution Surface Forming Using Spline Interpolation], *Aktual'nye problemy nauki i tekhniki. 2025: Mater. Vserossiyskoy (natsional'noy) nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy 95-letiyu Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta (Rostov-na-Donu, 12–14 marta 2025 goda)* [Actual Problems of Science and Techincs. 2025: materials of All-Russian (national) Scientific and Practical Conference devoted to 95<sup>th</sup> anniversary of the Don State Technical University (Rostov-on-Don, March 12-14, 2025)], the responsible ed. N.A. Shevchenko. Rostov-on-Don: DGTU, 2025, pp. 635-637. Available at: <https://ntb.donstu.ru/conference2025>.

2. Dorofeev A.A., Pozharskiy D.A. Interpolyatsiya obrazuyushchey poverkhnosti vrashcheniya metodom posledovatel'nykh L-splaynovykh priblizheniy [Interpolation of revolution surface forming by method of successive L-spline approximations], *Problemy razvitiya sovremennogo obshchestva, Sbornik nauchnykh statey 8-y Vserossiyskoy natsional'noy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, (19-20 yanvarya 2023 goda) [The Problems of Modern Society Development, Collection of scientific articles of 8<sup>th</sup> All-Russian National Scientific and Practical Conference, (January 19-20, 2023)], red. by Kuz'minov V.M. In 4ur vol. Vol. 4. Kursk: Izd-vo ZAO «Universitetskaya kniga», 2023, pp. 187-190. Available at: <https://elibrary.ru/vzmvjd>.
3. Zaynidinov Kh.N., Nurmurodov Zh.N., Gofurzhonov M.R. Algoritmy i programmy vosstanovleniya funktsiy s pomoshch'yu kubicheskikh bazisnykh splaynov [Algorithms and programs of restoring functions using the cubic basic splines], *Avtomatika i programmnaya inzheneriya* [Automation and Software Engineering], 2022, No. 1 (39). Available at: <http://www.jurnal.nips.ru>.
4. Irodova I.P. Splayny v vychislitel'noy matematike: ucheb.-metod. posobie [Splines in computational mathematics: educational and methodical manual]. Yaroslavl': YarGU, 2022, 44 s. Available at: <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20220203.pdf>.
5. Karpov D.A., Struchenkov V.I. Optimizatsiya parametrov splayna pri approksimatsii mnogoznachnykh funktsiy [Optimization of spline parameters in approximation of multivalued functions], *Russian Technological Journal*, 2023, 11 (2), pp. 72-83. Available at: <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-72-83>.
6. Akhmedov Yu.Kh., Asadov Sh.K., Badiev M.M. Interpolyatsiya slozhnykh krivykh poverkhnostey splayn-funktsiyami [Interpolation of Complex Curved Surfaces by Spline Functions], *Universum: tekhnicheskie nauki: elektronnyy nauchnyy zhurnal* [Universum: Technical Sciences], 2023, 3 (108). Available at: <https://doi.org/10.32743/UniTech.2023.108.3.15130>.
7. Sun M., Lan L., Zhu C., Lei F. Cubic spline interpolation with optimal end conditions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2023, Vol. 425, pp. 115039. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115039>.
8. Sun M., Lan L., Zhu C., Lei F. Cubic spline interpolation with optimal end conditions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2023, Vol. 425, pp. 115039. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115039>.
9. Kurasov D.A., Voloskova M.M., Sabirova R.D., Khomutova E.I., Kutuzov A.S. Issledovanie metoda interpolirovaniya splaynami i ego realizatsiya na yazyke programirovaniya Python [Investigation of the splines interpolation method and its implementation in the Python programming language], *Sovremennyye naukoemkie tekhnologii* [Modern High-Tech Technologies], 2024, No. 4, pp. 46-53. Available at: <https://doi.org/10.17513/snt.39972>.
10. Karpov D.A., Struchenkov V.I. Splayn-approksimatsiya mnogoznachnykh funktsiy v proektirovanii trass lineynykh sooruzheniy [Spline approximation of multivalued functions in linear structures routing], *Russian Technological Journal*, 2022, 10 (4), pp. 65-74. Available at: <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>.
11. Struchenkov V.I., Karpov D.A. Ispol'zovanie splaynov slozhnoy struktury v proektirovanii dorozhnykh trass [The use of complex structure splines in roadway design], *Russian Technological Journal*, 2024, 12 (1), pp. 111-122. Available at: <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-1-111-122>.
12. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. O reshenii nachal'noy zadachi dlya normal'noy sistemy s pomoshch'yu ratsional'nykh splayn-funktsiy [About solution of the initial problem for normal system using rational spline functions], *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Estestvennye nauki* [The Dagestan State University Bulletin. Series 1. Natural Sciences], 2023, Vol. 38, Issue 1, pp. 33-39. Available at: <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2023-38-1-33-39>.
13. Ji D., Xue X., Xu Ch. Truncated total variation in fractional B-spline wavelet transform for micro-CT image denoising, *Journal of X-Ray Science and Technology*, 2023, Vol. 31, No. 3, pp. 555-572. Available at: <https://doi.org/10.3233/xst-221326>.
14. Handajani S.S., Pratiwi H., Respatiawan R., et al. Comparison of B-Spline and truncated Spline regression models for temperature forecast, *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 1969-1984. Available at: <https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss4pp1969-1984>.
15. Faubert A.C. Clipping spline: interactive, dynamic 4D volume clipping and analysis based on thin plate spline, *Biomedical Optics Express*, 2025, Vol. 16, No. 2, pp. 499. Available at: <https://doi.org/10.1364/boe.544231>.
16. Cavieres J., Ibacache-Pulgar G., Contreras-Reyes Ja. E. Thin plate spline model under skew-normal random errors: estimation and diagnostic analysis for spatial data, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2023, Vol. 93, No. 1, pp. 25-45. Available at: <https://doi.org/10.1080/00949655.2022.2090564>.
17. Einy M., Rashidinia Ja., Ghorbanalinezhad S. Quintic and Septic C 2-spline methods for initial fractional differential equations, *Journal of Innovative Applied Mathematics and Computational Sciences*, 2023, Vol. 3, No. 1, pp. 35-48. Available at: <https://doi.org/10.58205/jiamcs.v3i1.58>.

18. Tolpaev V.A., Akhmedov K.S. Dolgosrochnoe prognozirovanie raboty skvazhin gazokondensatnykh mestorozhdeniy metodami kubicheskoy splayn-approksimatsii [Long-term prediction of wells operation in gas condensate fields using cubic spline approximation methods], *Neftepromyslovoe delo* [Oil-field Engineering], 2024, No. 9, pp. 10-22. Available at: <https://rucont.ru/efd/904508>.
19. Yusufov A. et al. Application of Computer-Aided Design (CAD) Systems when Solving Engineering Survey Tasks, *Universum: tekhnicheskie nauki* [Universum: Technical Sciences], 2023, 3 (108). Available at: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/15088>.
20. Ivanchenko A.N., Ivanchenko K.N. Metod rascheta veroyatnosti svyaznosti dvukhpolyusnoy seti proizvol'noy struktury [Method for calculation of the probability of connectivity of a two-pole network of an arbitrary structure], *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki* [University News. North-Caucasus Region. Technical Sciences], 2023, No. 2, pp. 25-33. Available at: <https://doi.org/10.17213/1560-3644-2023-2-25-33>.

**Дорофеев Алексей Анатольевич** – Донской государственный технический университет; e-mail: [AlexeiDorofeyev@yandex.ru](mailto:AlexeiDorofeyev@yandex.ru); г. Ростов-на-Дону, Россия; к.т.н.; доцент кафедры высшей математики; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2496-6691>; AuthorID: [https://elibrary.ru/author\\_items.asp?authorid=1305339](https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=1305339).

**Dorofeev Alexei Anatol'evich** – Don State Technical University; e-mail: [AlexeiDorofeyev@yandex.ru](mailto:AlexeiDorofeyev@yandex.ru); Rostov-on-Don, Russia; cand. of eng. sc.; associate professor of the Department of Higher Mathematics; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2496-6691>; AuthorID: [https://elibrary.ru/author\\_items.asp?authorid=1305339](https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=1305339).

УДК 004.652

DOI 10.18522/2311-3103-2025-6-105-121

**А.А. Коблов, О.М. Ромакина, А.С. Клемешева, А.З. Арсеньева**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ МУЛЬТИМОДЕЛЬНЫХ ХРАНИЛИЩ ДАННЫХ В ИГРОВОЙ ИНДУСТРИИ**

*Проводится исследование целесообразности и эффективности применения мультимодельных баз данных для хранения и обработки данных в игровой индустрии. Современные игровые проекты характеризуются высокой сложностью и разнородностью данных: от строго структурированной информации об игроках, предметах и квестах до слабоструктурированных и сильносвязанных данных, таких как системы рецептов, диалоговые деревья, отношения между кланами и внутриигровые энциклопедии. Существующие подходы, основанные на реляционных или одномоделных NoSQL-хранилищах, часто не обеспечивают необходимой гибкости, производительности и удобства разработки для таких комплексных сценариев. Целью исследования является проектирование и сравнительный анализ производительности мультимодельного решения в контексте типовых игровых механик. Авторами разработана структура мультимодельного хранилища на базе СУБД ArangoDB, которая интегрирует документную, графовую и ключ-значение модели данных. Архитектура решения охватывает ключевые компоненты RPG-игр: управление игроками и инвентарём, систему квестов, диалогов, рецептов крафта, таблиц добычи, клановых взаимоотношений, а также полнотекстовый поиск по внутриигровой энциклопедии с использованием ArangoSearch. Экспериментальная часть включает подробное сравнение производительности разработанного мультимодельного хранилища с реляционной СУБД PostgreSQL и документной MongoDB на реалистичных наборах данных и запросах. Результаты демонстрируют значительное преимущество мультимодельного подхода при выполнении операций, требующих обхода сложных связей: например, поиск враждебных игроков через граф клановых отношений в ArangoDB выполняется в среднем в 11 раз быстрее, чем аналогичный JOIN-запрос в PostgreSQL. В то же время, для сценариев с частыми модификациями линейно организованных данных (например, обновление статуса квестов) мультимодельное хранилище показывает несколько более низкую производительность по сравнению с реляционной моделью, что однако является допустимым в контексте общей архитектуры игрового проекта. Исследование подтверждает, что мультимодельные СУБД, в частности ArangoDB, представляют собой перспективное решение для игровой индустрии, позволяя в рамках единой платформы эффективно комбинировать различные модели данных, упрощать разработку и достигать высокой производительности на сложносвязанных данных, что является критически важным для современных многопользовательских игр.*

*Мультимодельные хранилища данных; NoSQL модели данных; схемы баз данных; документная модель; графовая модель; реляционная модель; хранилища данных; ArangoDB; разработка игр.*