УДК 004.8 DOI 10.18522/2311-3103-2025-4-163-173

А.Н. Целых, В.С. Васильев, Л.А. Целых, С.А. Барковский

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИ ОТСУТСТВИИ НАБЛЮДАЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Статья посвящена решению основной обратной задачи спектральной теории графов – определении основных параметров графа по спектру его собственных значений. В данной работе нас интересуют когнитивные причинные графовые модели сложных систем, динамика переменных которых недоступна. Мы рассматриваем нестохастические графовые модели, которые имеют нечисловые значения узлов и связей, а также плохо определенные системные факторы. При отсутствии исходных данных решение обратной задачи для направленного взвешенного знакового графа становится значительно более сложным. Когда графы имеют одинаковую топологию, но разные веса на дугах, то их спектры образуют в пространстве решений некоторое множество нечетких коллинеарных векторов. Линии этих векторов расходятся в пространстве векторов из-за их направленности к разным вершинам. В данной работе предлагается использовать алгоритм, позволяющий точно восстановить веса когнитивного графа, когда известен условный главный собственный вектор и топологический шаблон матрицы смежности. Данный алгоритм учитывает важную особенность матрицы смежности графа – направление главного собственного вектора к целевой вершине, что позволяет найти правильное решение из набора нечетких коллинеарных векторов в пространстве решений. Для того, чтобы добиться полного восстановления весов графа с приемлемой точностью предлагается объединить спектр графа и модель эффективную управления с задачей комбинаторной оптимизации. Восстанавливая веса матрицы смежности с использованием нашего подхода, мы сравниваем их с заданным графом. При сравнении учитываются такие параметры графа, как спектр графа, коэффициенты подобия для реконструированной матрицы, векторы отклика и управления.

Спектральная теория графов; спектр собственных значений; направленный взвешенный знаковый граф; восстановление весов графа.

A.N. Tselykh, V.S. Vasilev, L.A. Tselykh, S.A. Barkovskii

SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF SPECTRAL GRAPH THEORY IN THE ABSENCE OF OBSERVABLE VARIABLES

The article is devoted to solving the main inverse problem of spectral graph theory – determining the main parameters of a graph based on the spectrum of its eigenvalues. The article studies cognitive causal graph models of complex systems with unknown dynamics of variables. Non-stochastic graph models with non-numeric values of nodes and links, as well as poorly defined system factors are considered. In the absence of initial data, solving the inverse problem for a directed weighted signed graph is significantly complicated. When graphs have the same topology but different weights on arcs, their spectra form a set of fuzzy collinear vectors in the solution space. The straight lines of these vectors diverge in the vector space due to their directionality to different vertices. The article proposes to use an algorithm that allows one to accurately restore the weights of a cognitive graph when the conditional principal eigenvector and the topological structure of the adjacency matrix are known. This algorithm takes into account an important feature of the adjacency matrix of the graph - the direction of the main eigenvector to the target vertex, which allows finding the correct solution from a set of fuzzy collinear vectors in the solution space. To achieve complete restoration of the graph weights with acceptable accuracy, it is proposed to combine the graph spectrum and the effective control model with the combinatorial optimization problem. Restoring the adjacency matrix weights using our approach, we compare them with the given graph. The comparison takes into account such graph parameters as the graph spectrum, similarity coefficients of the restored matrix, response and control vectors.

Spectral graph theory; eigenvalue spectrum; directed weighted signed graph; graph weight recovery.

Введение. Основная обратная задача в спектральной теории графов состоит в определении параметров графа по его спектру собственных значений [1] . В данной работе нас интересуют когнитивные причинные модели (КМ) сложных систем (социальных, социально-экономических и политических), динамика переменных которых недоступна. Мы рассматриваем нестохастические КМ, которые имеют качественные и нечисловые узлы и связи, ненаблюдаемые переменные и плохо определенные системные факторы при отсутствии возможности получения данных временных рядов [2] . Эти модели представлены направленными взвешенными знаковыми графами с циклами. Моделирование интересующих нас систем осуществляется с помощью экспертных суждений, полученных непосредственно от человека или собранных из его опубликованных мнений. Это предопределяет высокую степень субъективности и неточности при определении весов на дугах графа.

Как отмечено в [3], характер смежности графа закодирован в весах его дуг. Даже незначительные неточности в весах могут существенно исказить модель, что может привести к неверным решениям на основе такой модели. Поэтому веса в графе могут быть уточнены с использованием особенности, присущей этому классу сложных систем. Представляется, что таким признаком может быть общая направленность модели, соответствующая тактической или стратегической цели моделируемой системы в ситуации принятия управленческих решений. Этот признак может быть выражен в терминах спектра графа. Как отмечено в [4], спектральный анализ дает представление о структурных и семантических свойствах графа. Направление главного вектора указывает на общую направленность системы.

В данном исследовании мы предлагаем алгоритм, который может точно реконструировать веса графа из одного условного главного собственного вектора и топологической модели матрицы смежности графа.

Существующие методы реконструкции графов направлены на генерацию графов, спектр Лапласа которых приблизительно соответствует спектру заданного входного графа, и чьи топологические метрики соответствуют заданному шаблону графа [3, 5–7]. Структурная реконструкция выполняется на основе исходного случайного графа, к которому применяется процесс перемонтирования ребер для соответствия собственным значениям Лапласа заданного графа [8]. В этом случае топологические свойства графа оцениваются с использованием метрик локальных параметров графа: центральностей посредничества, степени, коэффициентов кластеризации, распределения степеней и распределения длин кратчайших путей и т. д. То есть реконструкция точной топологии в виде набора смежностей и весов не была предусмотрена. В последние годы с развитием алгоритмов глубокого обучения графов был разработан ряд методов реконструкции сетей с использованием наблюдаемых и измеренных данных, включая следующие: методы высокоточной реконструкции сетей из измеримых данных временных рядов [9], методы, основанные на корреляциях, вызванных шумом [10], методы, основанные на долговременном стационарном отклике на постоянное во времени воздействие [11] и др. Эти результаты неприменимы к задачам определения точной топологии графа, а также при отсутствии наблюдаемых и измеримых признаков узлов.

Цель данной статьи – выйти за эти рамки, предложив метод, позволяющий восстанавливать веса графа при отсутствии наблюдаемых и измеримых переменных.

1. Метод восстановления веса графа. ***1.1. Постановка задачи.*** Оптимизационная задача реконструкции весов графа решается в два этапа: а) получение условного главного собственного вектора (пары векторов управления и отклика) путем решения оптимизационной задачи максимизации влияния (3) и б) получение реконструированных весов графа путем решения оптимизационной задачи (4) по шаблону матрицы смежности в допустимых границах.

Пусть модель управления $\mathscr{H} := \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}^T, \delta \rangle$ задана системой линейных уравнений (СЛАУ) (4) с ограничениями $\boldsymbol{N}$ на вектор воздействия управления $\boldsymbol{u}$ и вектор реакции $\boldsymbol{x}$:

$$(\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{I}$ – единичная матрица , δ - коэффициент затухания (DF), $\boldsymbol{A}^T$ – матрица смежности, где $a_{i,j}$ ($1 \le i, j \le n$) — весовой элемент матрицы $\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{n \times n}$, n – количество вершин в графе . По определению, $\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \delta \mathbf{A}$, где $\mathbf{Z}$ – матрица перехода. С учетом (1) для получения пары векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, выражающих эффективное управление, необходимо оптимизировать следующую нелинейную задачу оптимизации:

$$\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\mathbf{B} \mathbf{x}^T \mathbf{x}} \to \max, \tag{2}$$

где $\mathbf{B}=\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$ – матрица квадратичной формы. Тогда, учитывая (1), ограничения переводятся в матричную запись $\mathbf{C}=\left(\mathbf{N}^T\mathbf{N}\right)^{-1}\mathbf{N}^T\left(\mathbf{I}-\delta\mathbf{A}\right)$. Матрица ограничений $\mathbf{N}=\left(\mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \quad \dots \quad \mathbf{n}_L\right)$ имеет $L=\left|N^{(0)}\right|+\left|N^{(+)}\right|+\left|N^{(-)}\right|$ столбцы и n строки , где j столбец матрицы $\mathbf{N}$ определяется как $\mathbf{n}_j=\pm\delta_j^i$. $\delta_j^i=\left[i=j\right]$ – дельта Кронекера, которая имеет значение $n_j^i=\delta_j^i$ для $j\in N^{(0)}$ для $j\in N^{(+)}$, и $n_j^i=-\delta_j^i$ для $j\in N^{(-)}$. $N^{(0)}$, $N^{(+)}$ и $N^{(-)}$ обозначают наборы индексов вершин с ограничениями для управления воздействиями $\mathbf{u}$, где $N^{(0)}=\left\{i \mid u_i=0; 1\le i\le n\right\}$ – набор индексов неконтролируемых вершин; $N^{(+)}=\left\{j \mid u_j\ge 0; 1\le j\le n\right\}$ и $N^{(-)}=\left\{k \mid u_k\le 0; 1\le k\le n\right\}$ представляют собой наборы индексов вершин с ограничениями в положительном/отрицательном направлении управления соответственно.

Задача (2) сводится к задаче квадратичного программирования (3) относительно вектора $\mathbf{x}$ (или $\mathbf{u}$) при линейных ограничениях $\mathbf{Cx}\ge\mathbf{0}$ и нелинейном условии нормализации $(\mathbf{x}_m,\mathbf{x}_m)=1$:

$$\mathbf{x}_m^T\mathbf{B}\mathbf{x}_m\to\min \quad \mathbf{x}_m^T\mathbf{x}_m=1,\ \mathbf{x}_k^T\mathbf{B}\mathbf{x}_m=0,\ 1\le k\le m-1,\ \mathbf{C}\mathbf{x}_m\ge\mathbf{0}, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}_k$, $1\le k\le m$ – векторы отклика, m – число пар векторов воздействия и отклика, используемых для оптимизации. В этих задачах, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ..., $\mathbf{x}_k$, последовательно определялись из условий попарной ортогональности воздействий ($\mathbf{x}_l^T\mathbf{B}\mathbf{x}_k=0$, $1\le l\le k$). Матрица $\mathbf{A}$ (и $\mathbf{B}$) оставалась неизменной.

Решается задача восстановления матрицы. $\mathbf{A}$ Подставляя $\mathbf{Zx}$ в $\mathbf{u}$ (2) и учитывая, что $\left\|\mathbf{Z}\right\|$ – норма матрицы, индуцированная нормой вектора $\left\|\mathbf{x}\right\|$, получаем задачу оптимизации для $\mathbf{Z}$ в форме квадратичного программирования по (4):

$$\begin{cases}\mathbf{x}_m^T\mathbf{B}\mathbf{x}_m=\left\|\mathbf{Z}\mathbf{x}_m\right\|^2=\left\|\left(\mathbf{I}-\delta\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_m\right\|^2\to\min\\ \mathbf{Z}\mathbf{x}_k=\mathbf{u}_k,\ 1\le k\le m-1\\ \mathbf{S}\le\mathbf{Z}\le\mathbf{T}\end{cases}, \tag{4}$$

где $\mathbf{u}_k$, $1\le k\le m$ – векторы (попарно ортогональные) оптимальных управляющих воздействий; $\mathbf{S}=\left(s_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ и $\mathbf{T}=\left(t_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ – матрицы нижних и верхних границ для переменных ограничений ($s_{i,j}\le z_{i,j}$, $1\le j\le n$; $z_{i,j}\le t_{i,j}$, $1\le j\le n$); $\mathbf{U}=\left(u_{i,k}\right)_{1\le i\le n,\,1\le k\le m}$ и $\mathbf{X}=\left(x_{i,k}\right)_{1\le i\le n,\,1\le k\le m}$ – матрицы векторов воздействия и реакции.

В ограничениях задачи (4) используются $m-1$ пары векторов $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$, $1\le k\le m-1$ и вектор $\mathbf{x}_m$. Объектом минимизации задачи (4) является норма вектора $\left\|\mathbf{u}_m\right\|$.

1.2. Алгоритм решения задачи. Функция Лагранжа для задачи (4) имеет следующий вид:

$$\mathrm{L}=\tfrac{1}{2}\left\|\mathbf{Z}\mathbf{x}_m\right\|^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1}y_{i,k}\left(u_{i,k}-\mathbf{z}_i\mathbf{x}_k\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{s}_i-\mathbf{z}_i\right)\mathbf{w}_i^T+\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{z}_i-\mathbf{t}_i\right)\mathbf{w}_i^T\to\min, \tag{5}$$

где $\mathbf{y}_k$, $1\le k\le m-1$ и $\mathbf{w}_i$, $1\le i\le n$ – множители Лагранжа, соответствующие ограничениям в виде равенств и неравенств соответственно; $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{t}_i$, $\mathbf{w}_i$, $1\le i\le n$ – строки матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{W}$.

Если для некоторых i и j выполняются $s_{i,j} \le a_{i,j}$ равенство $s_{i,j} = t_{i,j}$ и неравенство, а ограничения $s_{i,j} < t_{i,j}$ и $a_{i,j} \le t_{i,j}$ не могут быть активными одновременно, то $w_{i,j}$ достаточно одного множителя. Поэтому $\mathbf{w}_i$ для хранения множителей $w_{i,j}$, достаточно одного вектора $1 \le j \le n$. Тогда нет неоднозначности среди членов последних двух сумм в лагранжиане L. Для лучшего понимания мы также будем различать векторы $\breve{\mathbf{w}}_\mathbf{i}$ и $\widehat{\mathbf{w}}_\mathbf{i}$. Компоненты векторов $\breve{\mathbf{w}}_\mathbf{i}$ и $\widehat{\mathbf{w}}_\mathbf{i}$ равны нулю или содержат ненулевые значения множителей, $w_{i,j}$ соответствующих активным ограничениям $s_{i,j} \le a_{i,j}$ и $a_{i,j} \le t_{i,j}$, соответственно.

Лагранжиан (5) можно записать покомпонентно как:

$$\mathrm{L} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{z}_i\mathbf{x}_m\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1} y_{i,k}\left(u_{i,k} - \mathbf{z}_i\mathbf{x}_k\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{s}_i - \mathbf{z}_i\right)\breve{\mathbf{w}}_i^T + \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{z}_i - \mathbf{t}_i\right)\widehat{\mathbf{w}}_i^T \to \min . \qquad (6)$$

В используемом ниже методе множителей Лагранжа второго порядка [12, 13] активность или неактивность ограничений в виде неравенств указывается только знаком (а не значением) соответствующего множителя $w_{i,j}$. Такой же знак будет присвоен и $\delta w_{i,j}$. Связка множителей с ФР позволяет не ссылаться явно на значение n в итерационном процессе и не требует его передачи в функцию алгоритма программного блока.

Необходимые условия минимума модифицированной функции Лагранжа [12, 13] имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial z_{i,j}} = \mathbf{z}_i\mathbf{x}_m x_{j,m} - \sum\limits_{k=1}^{m-1} y_{i,k}x_{j,k} - \breve{w}_{i,j} + \widehat{w}_{i,j} = 0, \quad 1 \le i, j \le n, \\ \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial y_{i,j}} = u_{i,j} - \mathbf{z}_i\mathbf{x}_j = 0, \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m-1, \\ \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial w_{i,j}} = \left[\begin{array}{ll} p^{-1}\max\left(0; \breve{w}_{i,j} + p\left(s_{i,j} - a_{i,j}\right)\right) - p^{-1}\breve{w}_{i,j} = 0, & a_{i,j} < \tfrac{1}{2}\left(s_{i,j} + t_{i,j}\right), \quad 1 \le i, j \le n, \\ p^{-1}\max\left(0; \widehat{w}_{i,j} + p\left(a_{i,j} - t_{i,j}\right)\right) - p^{-1}\widehat{w}_{i,j} = 0, & a_{i,j} \ge \tfrac{1}{2}\left(s_{i,j} + t_{i,j}\right), \quad 1 \le i, j \le n, \end{array}\right. \end{cases} \qquad (7)$$

где p – параметр квадратичного штрафа, заданный в качестве входных данных.

Векторно-матричная форма директив имеет вид:

$$\mathbf{z}_i\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T = \mathbf{y}_i\mathbf{X}_{m-1}^T + \breve{\mathbf{w}}_i - \widehat{\mathbf{w}}_i\,, \ \ \mathbf{z}_i\mathbf{X}_{m-1} = \left(u_{i,j}\right)_{1\times(m-1)}, \ 1 \le i \le n\,, \qquad (8)$$

где $\mathbf{e}_i$ – канонический базисный вектор ($e_{i,i} = 1$, $e_{i,j} = 0$, $j \ne i$, $1 \le i, j \le n$).

Внешнее произведение $\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T$ – положительно полуопределенная матрица. Порядок этой матрицы равен $n \times n$, а ранг равен единице, поэтому регуляризация по Тихонову и Арсенину [14] Требуется линеаризованная система (уравнение 2) необходимых условий минимума модифицированной функции Лагранжа по Берцекасу [13] с регуляризацией по Тихонову и Арсенину [14] имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T\right) = \mathbf{y}_i^{(\sigma+1)}\mathbf{X}_{m-1}^T + \breve{\mathbf{w}}_i^{(\sigma+1)} - \widehat{\mathbf{w}}_i^{(\sigma+1)} + \alpha\mathbf{z}_i^{(\sigma)}, \quad 1 \le i \le n, \\ \mathbf{z}_i^{(\sigma+1)}\mathbf{X}_{m-1} = \left(u_{i,j}\right)_{1\times(m-1)}, \quad 1 \le i \le n, \\ \left[\begin{array}{ll} z_{i,j}^{(\sigma+1)} = s_{i,j}, & z_{i,j}^{(\sigma)} \le s_{i,j} + w_{i,j}^{(\sigma)}/p, \\ \breve{w}_{i,j}^{(\sigma+1)} = 0, & z_{i,j}^{(\sigma)} > s_{i,j} + w_{i,j}^{(\sigma)}/p, \end{array}\right. \quad z_{i,j}^{(\sigma)} < \tfrac{1}{2}\left(s_{i,j} + t_{i,j}\right), \quad 1 \le i, j \le n, \\ \left[\begin{array}{ll} z_{i,j}^{(\sigma+1)} = t_{i,j}, & z_{i,j}^{(\sigma)} \ge t_{i,j} - w_{i,j}^{(\sigma)}/p, \\ \widehat{w}_{i,j}^{(\sigma+1)} = 0, & z_{i,j}^{(\sigma)} < t_{i,j} - w_{i,j}^{(\sigma)}/p, \end{array}\right. \quad z_{i,j}^{(\sigma)} \ge \tfrac{1}{2}\left(s_{i,j} + t_{i,j}\right), \quad 1 \le i, j \le n, \end{cases} \qquad (9)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации; σ – номер итерации. Собственное значение матрицы, $\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T$ соответствующее условному собственному вектору $\mathbf{x}_m$, с учетом $\|\mathbf{x}_m\| = 1$ равно $\lambda = 1$. Все остальные собственные значения, соответствующие условным собственным векторам, ортогональным, $\mathbf{x}_m$ равны $\lambda = 0$. Соответственно, собственные значения матрицы $\alpha\mathbf{I} + \mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T$ равны $\lambda = \alpha + 1$ для условного собственного вектора $\mathbf{x}_m$ и $\lambda = \alpha$ для остальных условных собственных векторов, ортогональных $\mathbf{x}_m$.

Алгоритм решения задачи оптимизации (4) представлен в табл. 1.

Таблица 1

Алгоритм реконструкции весов направленного графа с помощью условного главного собственного вектора

Вход : n, m, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}$, α, ρ, ε;

для того, $i := 1$ чтобы n сделать

$\mathbf{z}_i \leftarrow (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$; $\mathbf{w} \leftarrow (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$; $o \leftarrow TRUE$

пока (o);

$\mathbf{c} \leftarrow (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$; $V \leftarrow \varnothing$; $Q \leftarrow \varnothing$;

для того, $j := 1$ чтобы n сделать

$Q \leftarrow \left\{ j \middle| \left(z_{i,j} > s_{i,j} + w_j / p\right) \vee \left(z_{i,j} < t_{i,j} - w_j / p\right)\right\}$

$V \leftarrow \{1, 2, \ldots, n\} \setminus Q$

если $m > 1$ затем

$\mathbf{y} \leftarrow (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$;

если $V \neq \varnothing$ затем

$\mathbf{b} \leftarrow \left(\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i - \left(\mathbf{z}_i\mathbf{x}_m - \tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\mathbf{x}}_m\right)\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)^{-1}$;

$\tilde{\mathbf{G}}_{m-1}^T \leftarrow \tilde{\mathbf{X}}_{m-1}^T\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)^{-1}$; $\mathbf{y} \leftarrow \left(\tilde{\mathbf{G}}_{m-1}^T\tilde{\mathbf{X}}_{m-1}\right)^{-1}\left(\mathbf{u}_i - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{X}}_{m-1}\right)$;

$\tilde{\mathbf{c}} \leftarrow \mathbf{y}\tilde{\mathbf{G}}_{m-1}^T + \tilde{\mathbf{b}}$;

$q \leftarrow \mathbf{c}\mathbf{x}_m$

$$\forall j \in Q : w_j \leftarrow \left[\begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{m-1} y_k x_{j,k} - q x_{j,m} - \alpha\left(t_{i,j} - z_{i,j}\right) & \text{if } \left|z_{i,j} - s_{i,j}\right| > \left|t_{i,j} - z_{i,j}\right| \\ q x_{j,m} - \sum_{k=1}^{m-1} y_k x_{j,k} - \alpha\left(z_{i,j} - s_{i,j}\right) & \text{if } \left|z_{i,j} - s_{i,j}\right| \leq \left|t_{i,j} - z_{i,j}\right| \end{array}\right.;$$

еще

если $V \neq \varnothing$ затем $\tilde{\mathbf{c}} \leftarrow \left(\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i - \left(\mathbf{z}_i\mathbf{x}_m - \tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\mathbf{x}}_m\right)\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)^{-1}$;

$q \leftarrow \mathbf{c}\mathbf{x}_m$;

$$\forall j \in Q : w_j \leftarrow \left[\begin{array}{ll} -\alpha\left(t_{i,j} - z_{i,j}\right) - q x_{j,m} & \text{if } \left|z_{i,j} - s_{i,j}\right| > \left|t_{i,j} - z_{i,j}\right| \\ -\alpha\left(z_{i,j} - s_{i,j}\right) + q x_{j,m} & \text{if } \left|z_{i,j} - s_{i,j}\right| \leq \left|t_{i,j} - z_{i,j}\right| \end{array}\right.;$$

$o \leftarrow FALSE$;

для того, $j := 1$ чтобы n сделать

если (($c_j < s_{i,j} - \varepsilon$) ИЛИ ($c_j > t_{i,j} + \varepsilon$) ИЛИ ($w_j < -\varepsilon$)) то $o \leftarrow TRUE$

$\mathbf{z}_i \leftarrow \mathbf{c}$;

Выход : $\mathbf{Z}$.

1.3. Доказательство сходимости

Теорема. Пусть итерационный процесс задан уравнением (9). Тогда проекции $\mathbf{z}_i^{(\sigma)}\mathbf{x}_m$ приближений процесса (9) слабо сходятся к проекциям $\mathbf{z}_i\mathbf{x}_m$ решения задачи (4).

Доказательство. Поскольку в области безусловной минимизации положения компонент вектора, $\mathbf{z}_i^{(\sigma)}$ соответствующих условиям $z_{i,j}^{(\sigma)} = s_{i,j}$, $s_{i,j} < z_{i,j}^{(\sigma)} < t_{i,j}$, $z_{i,j}^{(\sigma)} = t_{i,j}$, строки матрицы $\mathbf{X}_{m-1}$, составляющие матрицу $\tilde{\mathbf{X}}_{m-1}$, а также $\tilde{\mathbf{I}}$, $\tilde{\mathbf{e}}_i$ и $\tilde{\mathbf{x}}_m$, не зависят от номера итерации σ , то отсюда следует, что задачу (6) можно переписать в следующем виде (16):

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right) = \mathbf{y}_i^{(\sigma)}\tilde{\mathbf{X}}_{m-1}^T + \alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)} - \tilde{\mathbf{d}}_i^{(\sigma-1)} \\ \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\tilde{\mathbf{X}}_{m-1} = \left(u_{i,j}\right)_{1\times(m-1)} \end{cases} \quad 1 \le i \le n, \tag{10}$$

где компоненты векторов $\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}$, $\tilde{\mathbf{x}}_m$, и $\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}$, строки матрицы $\tilde{\mathbf{X}}_{m-1}$, а также строки и столбцы матрицы, $\tilde{\mathbf{I}}$ соответствующие неактивным ограничениям $s_{i,j} < z_{i,j}^{(\sigma)} < t_{i,j}$, $1 \le j \le n$ и $\tilde{\mathbf{d}}_i^{(\sigma-1)} = \left(\mathbf{z}_i^{(\sigma-1)}\mathbf{x}_m - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}\tilde{\mathbf{x}}_m\right)\tilde{\mathbf{x}}_m^T$. Поскольку в области безусловной минимизации $\mathbf{z}_i^{(\sigma)}\mathbf{x}_m - \mathbf{z}_i^{(\sigma-1)}\mathbf{x}_m = \left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}\right)\tilde{\mathbf{x}}_m$, имеем $\tilde{\mathbf{d}}_i^{(\sigma)} = \tilde{\mathbf{d}}_i^{(\sigma-1)} = \tilde{\mathbf{d}}_i$. Тогда квадратичная форма (10) имеет вид

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T = \left(\mathbf{y}_i^{(\sigma+1)}\tilde{\mathbf{X}}_{m-1}^T + \alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{d}}_i^{(\sigma)}\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T = \\ &= \mathbf{y}_i^{(\sigma+1)}\left(\left(u_{i,j}\right)_{1\times(m-1)} - \left(u_{i,j}\right)_{1\times(m-1)}\right) + \left(\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{d}}_i\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T = \left(\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{d}}_i\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T. \end{aligned} \tag{11}$$

Используя неравенство Коши-Шварца [15] и неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим для членов $\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T$ и $\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T$ можно записать:

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T \le \\ &\le \sqrt{\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T}\sqrt{\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T} \le, \\ &\le \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T \end{aligned} \tag{12}$$

$$\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T \le \alpha\sqrt{\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T}\sqrt{\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T} \le \tfrac{1}{2}\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T + \tfrac{1}{2}\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T. \tag{13}$$

Используя (11), (12) и (13), получаем

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T = \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T + \left(\alpha\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{d}}_i\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T \le \\ &\le \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T + \\ &+ \tfrac{1}{2}\alpha\left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right\|^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right\|^2 - \tilde{\mathbf{d}}_i\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T \end{aligned}. \tag{14}$$

Квадратичная форма (14) имеет вид

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\tilde{\mathbf{x}}_m\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\tilde{\mathbf{x}}_m\right)^T + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\tilde{\mathbf{d}}_i^T + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{d}}_i\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\right)^T + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{d}}_i\tilde{\mathbf{d}}_i^T \le \\ &\le \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\tilde{\mathbf{x}}_m\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\tilde{\mathbf{x}}_m\right)^T + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\tilde{\mathbf{d}}_i^T + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{d}}_i\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{d}}_i\tilde{\mathbf{d}}_i^T \end{aligned}. \tag{15}$$

Это подразумевает, что

$$\left|\mathbf{z}_i^{(\sigma+1)}\mathbf{x}_m\right| \le \left|\mathbf{z}_i^{(\sigma)}\mathbf{x}_m\right|, \qquad (16)$$

откуда следует, что проекции $\mathbf{z}_i^{(\sigma)}\mathbf{x}_m$ слабо сходятся к проекциям $\mathbf{z}_i\mathbf{x}_m$ ($\mathbf{z}_i^{(\sigma)}\mathbf{x}_m \to \mathbf{z}_i\mathbf{x}_m$).

По разностям (10) получаем

$$\begin{cases} \left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right) = \left(\mathbf{y}_i^{(\sigma+1)} - \mathbf{y}_i^{(\sigma)}\right)\tilde{\mathbf{X}}_{m-1}^T + \alpha\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}\right) \\ \left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\tilde{\mathbf{X}}_{m-1} = \left(u_{i,j}\right)_{1\times(m-1)} - \left(u_{i,j}\right)_{1\times(m-1)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad 1 \le i \le n. \qquad (17)$$

Тогда квадратичная форма (17) имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T = \\ &= \left(\left(\mathbf{y}_i^{(\sigma+1)} - \mathbf{y}_i^{(\sigma)}\right)\tilde{\mathbf{X}}_{m-1}^T + \alpha\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}\right)\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T = . \\ &= \left(\mathbf{y}_i^{(\sigma+1)} - \mathbf{y}_i^{(\sigma)}\right)\left(\mathbf{u}_i^T - \mathbf{u}_i^T\right) + \alpha\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T \end{aligned} \qquad (18)$$

Затем

$$\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\left(\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T = \alpha\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}\right)\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)^T, \qquad (19)$$

что подразумевает

$$\left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right\|^2_{\alpha\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{x}}_m\tilde{\mathbf{x}}_m^T} = \alpha\left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right\|^2 + \left(\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\tilde{\mathbf{x}}_m\right)^2 = \alpha\left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}\right\|^2. \qquad (20)$$

Из (20) получаем

$$\left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right\| \le \left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma-1)}\right\|. \qquad (21)$$

Если неравенство

$$\left(\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\tilde{\mathbf{x}}_m\right)^2 \ge \gamma\left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right\|^2, \ \gamma > 0, \qquad (22)$$

справедливо для члена $\left(\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\tilde{\mathbf{x}}_m\right)^2$ в (20), то векторы $\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}$ сходятся в норме (21) со скоростью не хуже скорости сходимости геометрической прогрессии с декрементом $q = \sqrt{\alpha/(\alpha+\gamma)}$.

Если же, наоборот, для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторой итерации σ, неравенство

$$\left(\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\tilde{\mathbf{x}}_m\right)^2 < \varepsilon, \qquad (23)$$

выполняется, то выполняется (24):

$$\varepsilon > \left(\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right)\tilde{\mathbf{x}}_m\right)^2 \ge \left(\left|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\tilde{\mathbf{x}}_m\right| - \left|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)}\tilde{\mathbf{x}}_m\right|\right)^2 \ge 0. \qquad (24)$$

Это означает, что проекции $\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\tilde{\mathbf{x}}_m$ слабо сходятся к прогнозы $\mathbf{z}_i\mathbf{x}_m$:

Стоит отметить, что полученная выше сходимость является слабой сходимостью (16) в области безусловной оптимизации. Если неравенство $\left\|\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma+1)} - \tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}\right\| < \varepsilon'$ выполняется для любого $\varepsilon' > 0$, то это означает сходимость (21).

Тогда справедливы следующие результаты:

а) Проекции $\mathbf{z}_i^{(\sigma)}\mathbf{x}_m$ в итеративном процессе (9) слабо сходятся к проекциям $\mathbf{z}_i\mathbf{x}_m$ решения задачи (4).

б) При определенных условиях векторы $\mathbf{z}_i^{(\sigma)}$ в итеративном процессе (9) сходятся к решению задачи (4).

Таким образом, доказательство завершено.

2. Численное моделирование. Предложенный метод был протестирован на моделях, параметры которых приведены в табл. 2. Реконструкция весов ориентированных взвешенных знаковых графов проводилась при ограничениях на узлы в заданном диапазоне изменения значений элементов их матрицы смежности.

Таблица 2

Параметры испытанных моделей.

Номер модели	Ссылки	Параметры тестовых моделей		ДФ, δ
1	2	3		4
	[16]	Имя: Enterprise Stability; Матрица 9x9 на 44 ребрах с кумулятивным весом по абсолютной величине 17,1		0.6
	[17]	Название: Клинический риск при приеме лекарств, матрица 17x17 на 83 гранях с кумулятивным весом в абсолютном значении 15,73		0.7
	[18]	Название: Финансовый кризис в Малайзии; матрица 24x24 на 41 ребрах с кумулятивным весом по абсолютному значению 41,0. $N^{(0)} \in R \vert [1,5,8,9,15,17,22]$		0,5
	[19]	Имя: Специалист по Ближнему Востоку; Матрица 62x62 на 99 ребрах с кумулятивным весом по абсолютному значению 99,0		0.3
	[20]	Название: Dutch PM; матрица 85x85 на 89 ребрах с кумулятивным весом по абсолютной величине 89,0. $N^{(0)} \in R \vert [49,62]$		0.25

Как показано в табл. 3, предложенный алгоритм восстановил веса матрицы смежности графа по заданным параметрам с приемлемыми коэффициентами подобия. Коэффициент подобия вычисляется как проекция результирующего вектора на исходный вектор.

Таблица 3

Результаты, полученные для тестовых моделей.

Номер тестовой модели	Коэффициент подобия для:		
	Вектора ответа	Вектора управления	Реконструированной матрицы
1	2	3	4
	0,999717	0,999328	1,010855
	0,999905	0,999830	0,980328
	0,998662	0,999746	0,945098
	0,998883	1.044929	0,949404
	0,999798	1.172636	0,946034

3. Обсуждение полученных результатов. Предложенный алгоритм оценивался по нескольким параметрам и критериям оценки:

Выполнимость. Возникающие в (4) задачи являются задачами квадратичного программирования с переменными ограничениями (в виде неравенств). По построению матрица задачи $\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T$ является положительно полуопределенной. Поскольку ранг матрицы $\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m^T$ равен единице, регуляризация Тихонова [14] преобразует матрицу в строго положительно определенную. Это обеспечивает однозначную решаемость задачи минимизации (4).

Точночть. Алгоритм является вычислительно эффективным с точностью $O\left(n^3 \cdot m \cdot l\right)$, где m – число условных собственных пар, используемых при решении задачи (4); l – число итераций. На тестовых примерах $l \sim O(l)$.

Сходимость. Поскольку допустимая область переменных ограничений с положительно определенной матрицей является выпуклой, то сходимость задачи квадратичного программирования (9) гарантирована. Высокая скорость сходимости достигается за счет использования методов множителей Лагранжа второго порядка [13] и метода Пауэлла [21] (или метод сопряженных направлений) используется для решения полученных систем линейных уравнений.

Время выполнения. Во всех исследованных примерах на одном ядре процессора Intel Pentium, CPU L7200 1,33 ГГц время выполнения не превышало 1 с (табл. 4). Такое время выполнения вполне приемлемо для принятия управленческих решений, не требующих сверхбыстрой реакции.

Таблица 4

Время работы алгоритма

Число моделей	Размерность матрицы	Время выполнения, мс
1	9×9	0 .0668
2	17×17	0,1079
3	24×24	0,1291
4	62×62	0,4656
5	85×85	0,7657

Параметр регуляризации . Существует пороговое значение параметра регуляризации, ниже которого может нарушаться сходимость для некоторых строк матрицы системы линейных уравнений (9). Во всех тестовых примерах параметр регуляризации $2\cdot 10^5$ обеспечивает быструю мгновенную сходимость за 1-2 итерации.

Надежность результатов. Положительно-определенная матрица системы линейных уравнений (9) и выпуклость допустимой области переменных ограничений гарантируют существование единственного глобального минимального решения задачи (4).

Заключение. Одной из важнейших и нерешенных задач в теории графов является реконструкция топологии графов. При отсутствии временного ряда данных для графовой модели сложных систем с нестохастическими параметрами решение этой задачи становится значительно более сложным.

Из исходной матрицы смежности получаем условный спектр квадратичной матрицы, сформированной из передаточной функции модели управления. Модифицируя этот спектр, восстанавливаем веса графа из шаблона матрицы смежности в допустимых границах.

Предложенный алгоритм реконструкции учитывает важную особенность матрицы смежности графа – направление главного собственного вектора к целевой вершине (по отклику). Когда графы имеют одинаковую топологию, но разные веса на дугах, то их спектры образуют в пространстве решений некоторое множество нечетких коллинеарных векторов. Линии этих векторов расходятся в пространстве векторов из-за их направленности к разным вершинам.

Интегрируя спектр графа и эффективную модель управления в задачу комбинаторной оптимизации, мы показали, как добиться полной реконструкции весов графа с приемлемой точностью.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00029, https://rscf.ru/project/25-21-00029/ в Южном федеральном университете.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Chu M.T., Golub G.H.* Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications. Oxford University Press, 2005.
2. *Tselykh A., Vasilev V., Tselykh L.* Assessment of influence productivity in cognitive models, *Artif. Intell. Rev*., 2020, 53, pp. 5383-5409. Available at: https://doi.org/10.1007/s10462-020-09823-8.
3. *Nicoletti S., Carletti T., Fanelli D., Battistelli G., Chisci L.* Generating directed networks with prescribed Laplacian spectra, *J. Phys. Complex*., 2021, 2, 015004. Available at: https://doi.org/10.1088/2632-072X/abbd35.
4. *Butterworth J., Dunne P.E*. Spectral Techniques in Argumentation Framework Analysis. In: 6th International Conf. on Computational Models of Argument (COMMA). Potsdam, Germany, 2016, pp. 9-16. Available at: https://doi.org/10.3233/978-1-61499-686-6-167.
5. *Shine A., Kempe D.* Generative Graph Models based on Laplacian Spectra?, *In: The World Wide Web Conference*. ACM, New York, NY, USA, 2019, pp. 1691-1701. Available at: https://doi.org/10.1145/3308558.3313631.
6. *Martinkus K., Loukas A., Perraudin N., Wattenhofer R.* Spectre: Spectral conditioning helps to overcome the expressivity limits of one-shot graph generators, *In: 39th International Conference on Machine Learning (ICML 2022)*, 2022, pp. 15159-15179.
7. *Luo T., Mo Z., Pan S.J.* Fast Graph Generation via Spectral Diffusion, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell*., 2024, 46, pp. 3496-3508. Available at: https://doi.org/10.1109/TPAMI.2023.3344758.
8. *Pandey P.K., Badarla V*. Reconstruction of network topology using status-time-series data, *Phys. A Stat. Mech. its Appl*., 2018, 490, pp. 573-583. Available at: https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.091.
9. *Wang Z., Jiang W., Wu W., Wang S.* Reconstruction of complex network from time series data based on graph attention network and Gumbel Softmax, *Int. J. Mod. Phys. C*, 2023, 34, Available at: https://doi.org/10.1142/S0129183123500572.
10. *Zhang Z., Chen Y., Mi Y., Hu G*. Reconstruction of dynamic networks with time-delayed interactions in the presence of fast-varying noises, *Phys. Rev. E,* 2019, 99, 042311. Available at: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.042311.
11. *Timme M.* Revealing Network Connectivity from Response Dynamics, *Phys. Rev. Lett*., 2007, 98, 224101. Available at: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.224101.
12. *Bertsekas D.P.* The Method of Multipliers for Equality Constrained Problems, *In: Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Elsevier, 1982, pp. 95-157. Available at: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-093480-5.50006-4.
13. *Bertsekas D.P.* Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods, *Athena Scientifi, Belmont*, MA, 1996.
14. *Tikhonov A., Arsenin V.* Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley, New York, 1977.
15. Lancaster, P., Tismenetsky, M.: The theory of matrices: with applications. Academic Press, Orlando, Fla, USA (1985).
16. *Groumpos P.P.* Why Model Complex Dynamic Systems Using Fuzzy Cognitive Maps? Robot. Autom. Eng. J., 2017, 1. Available at: https://doi.org/10.19080/RAEJ.2017.01.555563.
17. *Mazzuto G., Stylios C., Ciarapica F.E., Bevilacqua M., Voula G*. Improved Decision-Making through a DEMATEL and Fuzzy Cognitive Maps-Based Framework, *Math. Probl. Eng*., 2022, pp. 1-14. Available at: https://doi.org/10.1155/2022/2749435.
18. *Kim D.-H.* Cognitive Maps of Policy Makers on Financial Crises of South Korea and Malaysia: A Comparative Study, *Int. Rev. Public Adm*., 2004, 9, pp. 31-38. Available at: https://doi.org/10.1080/12294659.2005.10805047.
19. *Bonham G.M., Shapiro M.* CHAPTER SIX. Explanation of the Unexpected: The Syrian Intervention in Jordan in 1970, *In: Structure of Decision: The Cognitive Maps of Political Elites*. Princeton University Press, 2015, pp. 113-141. Available at: https://doi.org/10.1515/9781400871957-009.
20. *van Esch F.A.W.J.* From belief to behaviour. Using cognitive maps to test ideational policy explanations, *In: 10th Conference of the ECPR Standing Group on the European Union*. ECPR Press, Rome, 2021.
21. *Powell M.J.D.* An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *Comput. J.*, 1964, 7, pp. 155.162. Available at: https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.155.

Целых Александр Николаевич – Южный федеральный университет; e-mail: ant@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185562047; кафедра ИАСБ; д.т.н.; зав. кафедрой.

Васильев Владислав Сергеевич – Южный федеральный университет; e-mail: vsvasilev@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185983647; кафедра ИАСБ; к.т.н.; доцент.

Целых Лариса Анатольевна – Южный федеральный университет; e-mail: l.tselykh58@gmail.com; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185562047; кафедра ИАСБ; к.э.н.; доцент.

Барковский Симон Антонович – Южный федеральный университет; e-mail: sbarkovskiy@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +78634393932; кафедра ИАСБ; старший преподаватель.

Tselykh Alexander Nikolayevich – Southern Federal University; e-mail: ant@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79185562047; the department IASB; dr. of eng. sc.; head of department.

Vasilev Vladislav Sergeevich – Southern Federal University; e-mail: vsvasilev@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79185983647; the department IASB; cand. of eng. sc.; associate professor.

Tselykh Larisa Anatolievna – Southern Federal University; e-mail: l.tselykh58@gmail.com; Taganrog, Russia; phone: +79185562047; the department IASB; cand. of ec. sc.; associate professor.

Barkovskii Simon Antonovich – Southern Federal University; e-mail: sbarkovskiy@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +78634393932; the department IASB; senior lecturer.