

7. Yang H. et al. An improved spherical evolution with enhanced exploration capabilities to address wind farm layout optimization problem, *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 2023. 123, 106198, 106198. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2023.106198>.
8. Aksoy İ.C., & Mutlu M.M. Comparing the performance of metaheuristics on the Transit Network Frequency Setting Problem, *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 2024, pp. 1-20. Available at: <https://doi.org/10.1080/15472450.2024.2392722>.
9. Naka E., Zeqo E., & Kaziu A. Performance Analysis of Metaheuristic Algorithms on Benchmark Functions, *Interdisciplinary Journal of Research and Development*, 2024, 11 (2), 10. Available at: <https://doi.org/10.56345/ijrdv11n202>.
10. Tshewang Phuntsho, Tad Gonsalves. Metaheuristics Portfolio Optimization for Resource-Constrained Project Scheduling Problems with Milestones Payments, 14 July 2024, PREPRINT (Version 1) available at Research Square. Available at: <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-4725224/v1>.
11. Cuevas E., Rosas Caro J.C., Alejo Reyes A., González Ayala P., Rodríguez A. The Simulated Annealing Method, In: *Optimization in Industrial Engineering. Synthesis Lectures on Engineering, Science, and Technology*. Springer, Cham, 2025. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-031-74027-5_8.
12. Di Chen. Application of Improved Genetic Algorithms in Path Planning, *Journal of Internet Technology*. Dec. 2024, Vol. 25, No. 7, pp. 1091-1099.
13. Kaid H., Al-Ahmari A., Al-Shayea A., Abouel Nasr E., Kamrani A.K., Mahmoud H.A. Metaheuristics for optimizing unrelated parallel machines scheduling with unreliable resources to minimize makespan, *Advances in Mechanical Engineering*, 2022, 14 (5). DOI: 10.1177/16878132221097023.
14. Wang Q., Chen S. Latency-minimum offloading decision and resource allocation for fog-enabled Internet of Things networks, *Trans. Emerg. Telecommun. Technol*, 2020, 31, e3880.
15. Koprás B., Idzikowski F., Chen W.C., Wang T.J., Chou C.T., Bogucka H. Latency-Aware Virtual Network Embedding using Clusters for Green Fog Computing, In *Proceedings of the 2020 IEEE Globecom Workshops, Taipei, Taiwan, 7–11 December 2020*.
16. Khumalo N., Oyerinde O., Mfupe L. Reinforcement Learning-based Computation Resource Allocation Scheme for 5G Fog-Radio Access Network, In *Proceedings of the 2020 Fifth International Conference on Fog and Mobile Edge Computing (FMEC), Paris, France, 20–23 April 2020*, pp. 353-355.
17. Salehnia T. et al. SDN-based optimal task scheduling method in Fog-IoT network using combination of AO and WOA, *Handbook of Whale Optimization Algorithm*. Elsevier, 2024, pp. 109-128.
18. Salimi R., Azizi S., Abawajy J. A greedy randomized adaptive search procedure for scheduling IoT tasks in virtualized fog–cloud computing, *Trans. Emerg. Telecommun. Technol.*, 2024, Vol. 35, No. 5.
19. Vakilian S., Fanian A. Enhancing Users' Quality of Experienced with Minimum Energy Consumption by Fog Nodes Cooperation in Internet of Things, In *Proceedings of the 2020 28th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE), Tabriz, Iran, 4–6 August 2020*.
20. Vakilian S., Moravvej S.V., Fanian A. Using the Artificial Bee Colony (ABC) Algorithm in Collaboration with the Fog Nodes in the Internet of Things Three-layer Architecture, In *Proceedings of the 2021 29th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE), Tehran, Iran, 18–20 May 2021*, pp. 509-513.

Клименко Анна Борисовна – Российский государственный гуманитарный университет; e-mail: anna_klimenko@mail.ru; г. Москва, Россия; к.т.н.; доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики.

Klimenko Anna Borisovna – Russian State University for Humanities; e-mail: anna_klimenko@mail.ru; cand. in eng. sc.; associate professor of Fundamental and Applied Mathematics Department.

УДК 330.4

DOI 10.18522/2311-3103-2025-4-120-127

С.И. Носков, С.В. Беляев

ГРУППИРОВКА ПРЕДИКТОРОВ В КОМБИНИРОВАННОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Дан краткий обзор публикаций по применению при математическом моделировании сложных систем комбинированных конструкций, содержащих в качестве составных элементов известные модельные формы. В частности, рассмотрены: алгоритм оценки параметров для создания математических моделей динамических систем; структурированные математические модели кислородного электрода и биологической очистки сточных вод; комбинированная модель, вклю-

чающая ионный обмен между кальцием и медью; объединение нестандартных конечно-разностных схем и метода экстраполяции Ричардсона для получения численных решений двух моделей биологических систем; математическая формулировка задачи и эвристический подход к оптимальному планированию маршрутов доставки в мультимодальной системе; математическая модель оптимизации стратегических и тактических решений во всех видах цепочек поставок на основе биомассы; метод разработки моделей различных типов для элементов химико-технологических систем с учетом различных видов имеющейся информации и объединении этих моделей в единый комплекс. Сформулированы два варианта постановки задачи вычисления оценок параметров комбинированной кусочно-линейной регрессии – при непустом и пустом пересечении индексных множеств, задающих состав независимых переменных в линейной и кусочно-линейной компонентах модели. Показано, что в обоих случаях при выборе в качестве функции потерь суммы абсолютных отклонений ошибок аппроксимации эти варианты сводятся к задачам линейно-булева программирования. Построены две версии комбинированной кусочно-линейной регрессионной модели выручки горно-металлургической компании «Северсталь». В качестве независимых переменных модели использованы объемы производства: горячекатанного, холоднокатанного и оцинкованного листа, листа с другим металлическим покрытием, листа с полимерным покрытием, сортового проката, метизной продукции.

Комбинированная кусочно-линейная регрессионная модель; группировка предикторов; задача линейно-булева программирования; индексное множество; мощность множества; горно-металлургическая компания.

S.I. Noskov, S.V. Belyaev

GROUPING PREDICTORS IN COMBINED PIECEWISE LINEAR REGRESSION

The article provides a brief overview of publications on the application of combined structures containing known model forms as constituent elements in mathematical modeling of complex systems. In particular, the following are considered: an algorithm for estimating parameters for creating mathematical models of dynamic systems; structured mathematical models of an oxygen electrode and biological wastewater treatment; a combined model including ion exchange between calcium and copper; a combination of non-standard finite-difference schemes and the Richardson extrapolation method to obtain numerical solutions of two models of biological systems; a mathematical formulation of the problem and a heuristic approach to optimal planning of delivery routes in a multimodal system; a mathematical model for optimizing strategic and tactical decisions in all types of biomass-based supply chains; a method for developing models of various types for elements of chemical-engineering systems taking into account various types of available information and combining these models into a single complex. Two variants of the problem statement for calculating the estimates of the parameters of a combined piecewise linear regression are formulated: with a non-empty and empty intersection of the index sets that define the composition of the independent variables in the linear and piecewise linear components of the model. It is shown that in both cases, when the sum of absolute deviations of approximation errors is selected as the loss function, both variants are reduced to linear-Boolean programming problems. Two versions of a combined piecewise linear regression model of revenue of the mining and metallurgical company Severstal are constructed. The following production volumes are used as independent variables of the model: hot-rolled, cold-rolled and galvanized sheet, sheet with another metal coating, sheet with a polymer coating, rolled products, hardware products.

Combined piecewise linear regression model; predictor grouping; linear-Boolean programming problem; index set; set power; mining and metallurgical company.

Введение. Исследование сложных объектов различного характера с помощью методов математического моделирования часто требует применения комбинированных формальных конструкций, содержащих в качестве составных элементов известные модельные формы. Так, в работе [1] обсуждается алгоритм оценки параметров для создания математических моделей динамических систем и представлен алгоритм рекурсивных наименьших квадратов на основе оценочных состояний, вычисляемых с помощью фильтра Калмана. В [2] структурированные математические модели кислородного электрода и биологической очистки сточных вод объединены для оптимизации положения электрода в биореакторе. Выявлены параметры, к изменению которых, как показало тестирование модели, она наиболее чувствительна. В исследовании [3] изучается адсорбция меди на инкапсулированном альгинатом кальция магнитном сорбенте. Разработана комбиниро-

ванная модель, которая включает ионный обмен между кальцием и медью, координационную реакцию между функциональной группой и медью, а также образование поверхностного комплекса между оксидом железа и медью. Статья [4] посвящена объединению нестандартных конечно-разностных схем и метода экстраполяции Ричардсона для получения численных решений двух моделей биологических систем. В некоторых случаях необходимо, чтобы численные решения правильно воспроизводили динамическое поведение систем, а в других – просто найти стационарное состояние. В [5] предложен комплексный подход к разработке моделей упругости, пластичности и разрушения неоднородных материалов в рамках метода дискретных элементов.

В работе [6] представлена математическая формулировка задачи и эвристический подход к оптимальному планированию маршрутов доставки в мультимодальной системе, объединяющей грузовики и беспилотные летательные аппараты. Модель имеет форму задачи смешанно-целочисленного линейного программирования. В исследовании [7] представлена математическая модель OPTIMASS для оптимизации стратегических (например, местоположение и тип объекта) и тактических (например, распределение) решений во всех видах цепочек поставок на основе биомассы. В [8] представлена комбинированная модель прогнозирования смещения бетонной плотины с помощью линейной модели авторегрессионного интегрированного скользящего среднего, в которой регрессионная модель опорных векторов строится для оптимизации и обработки нелинейного высокочастотного сигнала. В статье [9] предложен метод, заключающийся в разработке моделей различных типов (детерминированных, статистических, нечетких, гибридных) для элементов химико-технологических систем с учетом различных типов имеющейся информации (теоретической, статистической, нечеткой) и объединении этих моделей в единый комплекс. В [10] разработан комбинированный алгоритм идентификации математических моделей маневрирования судна, основанный на классическом генетическом алгоритме.

Следует также отметить посвященные разработке и анализу комбинированных моделей работы: [11] (применение комбинированной искусственной нейронной сети при моделировании компьютерных инцидентов), [12] (прогнозирование концентраций загрязняющих выбросов на основе вейвлет-преобразований и искусственных нейронных сетей), [13] (математическая модель процессов циклического вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах), [14] (комбинированный метод верификации объектно-ориентированных моделей данных), [15] (комбинированная модель процесса оценивания достоверности контроля технического состояния космических аппаратов в условиях неопределенности), [16] (математические модели структурного анализа элементов мультисервисных сетей связи).

Оценивание параметров и формирование групп переменных в комбинированной кусочно-линейной регрессии. В работе [17] предложен алгоритмический способ идентификации параметров комбинированной кусочно-линейной регрессионной модели

$$y_k = \alpha_0 + \sum_{i \in I_1} \alpha_i x_{ki} + \min_{j \in I_2} \{\beta_j x_{kj}\} + \varepsilon_k, k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Здесь y – зависимая переменная, $x_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$ – независимые переменные, $\alpha_0, \alpha_i, i \in I_1, \beta_j, j \in I_2$ – подлежащие вычислению параметры, k – номер наблюдения выборки данных, n – ее длина, ε_k – ошибки аппроксимации, I_1 и I_2 – наперед заданные индексные множества номеров предикторов. При этом

$$I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, m\}$$

и, в общем случае,

$$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset.$$

Все переменные в модели (1) детерминированы.

Заметим, что, если модель (1) построена для экономического объекта, ее кусочно-линейная составляющая $\min_{j \in I_2} \{\beta_j x_{kj}\}$ представляет собой правую часть производственной функции с постоянными пропорциями, называемой также функцией Леонтьева (см., например [18–20]).

В [17] при условии, что в качестве функции потерь выбрана сумма модулей ошибок аппроксимации

$$L(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k|, \quad (2)$$

задача оценивания параметров модели (1) сведена к задаче линейно-булева программирования (ЛБП).

Представим эту задачу в более общем виде, а именно, пусть требуется не только рассчитать значения векторов параметров модели (1), но и сформировать индексные множества I_1 и I_2 , допуская при этом их непустое пересечение. Будем только считать наперед заданным количество элементов в каждом из этих множествах, их мощность:

$$|I_1| = p_1, |I_2| = p_2.$$

В этом случае функция потерь (2) должна быть преобразована к виду

$$L_1(\alpha, \beta, I_1, I_2) = \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k|.$$

Для сведения задачи минимизации функции $L_1(\alpha, \beta, I_1, I_2)$ к задаче ЛБП воспользуемся вычислительными приемами из [17, 21]. Введем следующие булевы переменные:

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i \in I_1 \\ 0, & i \notin I_1 \end{cases},$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 1, & j \in I_2 \\ 0, & j \notin I_2 \end{cases}.$$

Тогда последняя примет вид:

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ki} + z_k + u_k - v_k = y_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$-\delta_i B_i \leq \alpha_i \leq \delta_i B_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m \delta_i = p_1, \quad (5)$$

$$z_k \leq \beta_j x_{kj}, \quad k = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$\beta_j x_{kj} - z_k \leq (1 - \sigma_{kj}) M_j, \quad k = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^m \sigma_{kj} = 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$\beta_j \geq (1 - \gamma_j) N_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j = p_2, \quad (10)$$

$$\sigma_{ki} \in \{0, 1\}, \quad k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}, \quad (11)$$

$$\delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

$$\gamma_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (13)$$

$$u_k \geq 0, v_k \geq 0, z_k \geq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (14)$$

$$L_1(\alpha, \beta, I_1, I_2) = \sum_{k=1}^n (u_k + v_k) + \mu \sum_{j=1}^m \beta_j \rightarrow \min. \quad (15)$$

Здесь μ и $M_i, B_i, i = \overline{1, m}$ – наперед заданные соответственно малое и большие положительные числа, $N_j = 10 \max_{k=\overline{1, n}} \frac{y_k}{x_{kj}}, j = \overline{1, m}$. При этом должно соблюдаться условие $N_j \ll M_j, j = \overline{1, m}$.

Таким образом, при $\delta_i=0$ i -ая независимая переменная войдет в линейную часть модели (1) с нулевым коэффициентом (т.е. не войдет вовсе). Если же $\gamma_j=0$, то j -ый предиктор войдет в кусочно-линейную ее часть с коэффициентом, не меньшим чем M_j , следовательно, минимум в модели не сработает на переменной x_j ни на одном наблюдении выборки данных (т.е. x_j не попадет в эту часть).

Для того, чтобы обеспечить иногда требуемое в соответствии с целью моделирования выполнение условия $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, необходимо включить в состав ограничений задачи ЛБП следующие равенства:

$$\delta_i + \gamma_j = 1, \quad i = \overline{1, m}. \quad (16)$$

Комбинированная кусочно-линейная регрессионная модель горно-металлургической компании «Северсталь». Применим предложенный выше подход для построения модели выручки горно-металлургической компании «Северсталь». Воспользуемся при этом статистической информацией за 2009 – 2021 гг. (табл. 1) [22]. Введем следующие обозначения: y – выручка, млн. долл.; x_1 – горячекатаный лист, тыс. т.; x_2 – холоднокатаный лист, тыс. т.; x_3 – оцинкованный лист и лист с другим металлическим покрытием, тыс. т.; x_4 – лист с полимерным покрытием, тыс. т.; x_5 – сортовой прокат, тыс. т.; x_6 – метизная продукция, тыс. т.

Таблица 1

Статистическая информация

Год	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2009	13050	5977	2599	2228	294	759	806
2010	13573	6403	2252	1733	244	762	784
2011	15812	6053	1916	1991	241	805	764
2012	14104	6439	1835	2071	368	819	827
2013	9434	4206	1419	615	450	889	662
2014	8296	3662	1443	592	434	1168	636
2015	6396	3988	1336	624	418	1269	610
2016	5916	4080	964	560	386	1401	639
2017	7848	3949	1324	654	403	1406	615
2018	8580	3895	1286	835	391	1460	560
2019	8157	4382	977	934	448	1234	563
2020	6870	4442	918	939	471	668	587
2021	11638	4815	1092	1015	401	651	603

Зададим мощность индексных множеств I_1 и I_2 : $p_1 = p_2 = 3$. Вначале путем решения задачи ЛБП (3)–(15) построим модель (1) с возможностью непустого пересечения этих множеств. При этом, учитывая положительный характер влияния всех шести предикторов на зависимую переменную, скорректируем ограничения (4) следующим образом:

$$0 \leq \alpha_i \leq \delta_i M_i, i = \overline{1,6}. \quad (17)$$

В результате получим модель:

$$y_k = -8384 + 1.95x_{k1} + 0.69x_{k3} + \min\{2.5x_{k1}, 6.5x_{k2}, 10.9x_{k5}\} + \varepsilon_k, k = \overline{1,13}, E=7.6, \quad (18)$$

где E – средняя процентная ошибка. При этом, хоть значение δ_2 и оказалось равно единице, но в линейную часть модели (18) переменная x_2 не вошла вследствие равенства нулю параметра α_2 , вызванного ограничениями (17). А вот переменная x_1 вошла и в линейную, и в кусочно-линейную части модели.

Теперь построим модель (1), потребовав пустоты пересечения множеств I_1 и I_2 , включив в состав ограничений задачи ЛБП ограничения (16):

$$y_k = -8320 + 1.99x_{k1} + 0.72x_{k3} + \min\{6.2x_{k2}, 10.3x_{k5}, 14.1x_{k6}\} + \varepsilon_k, k = \overline{1,13}, E=7.64. \quad (19)$$

Как легко убедиться, множество I_1 для моделей (18) и (19) одно и то же, а вот составы множества I_2 существенно различаются. Обращает также на себя внимание тот факт, что переменная x_4 не вошла ни в один из построенных вариантов модели, что указывает на ее статистическую незначимость. Отметим также, что, судя по значению критерия адекватности E , оба они обладают хорошим аппроксимационным качеством.

Заключение. В работе представлены две версии постановки задачи идентификации параметров комбинированной кусочно-линейной регрессии – с возможностью непустоты пересечения индексных множеств, определяющих состав линейной и кусочно-линейной составляющих модели, и без такой возможности. Показано, что в обоих случаях при выборе в качестве функции потерь суммы модулей ошибок аппроксимации обе задачи сводятся к задачам линейно-булева программирования. Построены два варианта комбинированной кусочно-линейной регрессионной модели горно-металлургической компании «Северсталь».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Feng Ding*. Combined state and least squares parameter estimation algorithms for dynamic systems // *Applied Mathematical Modelling*. - 2014. – Vol. 38, No. 1. – P. 403-412. – DOI: 10.1016/j.apm.2013.06.007.
2. *Mario Novak, Predrag Horvat*. Mathematical modelling and optimisation of a waste water treatment plant by combined oxygen electrode and biological waste water treatment model // *Applied Mathematical Modelling*. – 2012. - Vol. 36, No. 8. – P. 3813-3825. – DOI: 10.1016/j.apm.2011.11.028.
3. *Soh-Fong Lim, Yu-Ming Zheng, Shuai-Wen Zou, J. Paul Chen*. Characterization of Copper Adsorption onto an Alginate Encapsulated Magnetic Sorbent by a Combined FT-IR, XPS, and Mathematical Modeling Study // *Environmental Science & Technology*. – 2008. – Vol. 42, No. 7. – P. 2551-2556. – DOI: 10.1021/es7021889.
4. *Gilberto González-Parra, Abraham J. Arenas, Benito M. Chen-Charpentier*. Combination of non-standard schemes and Richardson's extrapolation to improve the numerical solution of population models // *Mathematical and Computer Modelling*. – 2010. – Vol. 52, No. 7–8. – P. 1030-1036. - DOI: 10.1016/j.mcm.2010.03.015.
5. *S.G. Psakhie, E.V. Shilko, A.S. Grigoriev, S.V. Astafurov, A.V. Dimaki, A.Yu. Smolin*. A mathematical model of particle–particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic–plastic materials // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2014. – Vol. 130. – P. 96-115. - DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.034.
6. *Mohammad Moshref-Javadi, Ahmad Hemmati, Matthias Winkenbach*. A truck and drones model for last-mile delivery: A mathematical model and heuristic approach // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 80. – P. 290-318. – DOI: 10.1016/j.apm.2019.11.020.
7. *Annelies De Meyer, Dirk Cattryse, Jos Van Orshoven*. A generic mathematical model to optimise strategic and tactical decisions in biomass-based supply chains (OPTIMASS) // *European Journal of Operational Research*. – 2015. – Vol. 245, No. 1. – P. 247-264. – DOI: 10.1016/j.apm.2019.11.020.
8. *Bowen Wei, Liangjie Chen, Huokun Li, Dongyang Yuan, Gang Wang*. Optimized prediction model for concrete dam displacement based on signal residual amendment // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 78. – P. 20-36. – DOI: 10.1016/j.apm.2019.09.046.
9. *Orazbayev B.B., Orazbayeva K.N., Utenova B.E.* Development of mathematical models and modeling of chemical engineering systems under uncertainty // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2014. - Vol. 48. – P. 138-147. – DOI: 10.1134/S0040579514020092.
10. *Serge Sutulo, C. Guedes Soares*. An algorithm for offline identification of ship manoeuvring mathematical models from free-running tests // *Ocean Engineering*. – 2014. – Vol. 79. – P. 10-25. – DOI: 10.1016/j.oceaneng.2014.01.007.
11. *Саенко И.Б., Маликов А.В., Авраменко В.С., Ясинский С.А.* Нейросетевая модель диагностирования компьютерных инцидентов на объектах критической информационной инфраструктуры // *Информация и космос*. – 2019. – № 3. – С. 77-84.
12. *Кропотов Ю.А., Проскураков А.Ю., Белов А.А., Колтаков А.А.* Модели, алгоритмы системы автоматизированного мониторинга и управления экологической безопасности промышленных производств // *Системы управления, связи и безопасности*. – 2015. – № 2. – С. 184-197.
13. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Волков А.И., Юдинцева А.И.* Расчет ресурсных характеристик конструкционных сплавов при взаимном влиянии усталости и длительной прочности материала // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2023. – № 4. – С. 64-82.
14. *Семенов В.А., Морозов С.В., Ильин Д.В.* Комбинированный метод верификации масштабных моделей данных // *Труды Института системного программирования РАН*. – 2014. – Т. 26, № 2. – С. 197-230.
15. *Барановский А.М., Белозеров В.А., Опрышко Д.И.* Комбинированная модель процесса оценивания достоверности контроля технического состояния космических аппаратов в условиях неопределенности // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. - 2009. – Т. 52, № 4. – С. 56-61.
16. *Михалевич И.Ф.* Структурный анализ элементов мультисервисных сетей связи // *Телекоммуникации*. – 2007. – № 2. – С. 2-9.

17. Носков С.И. Идентификация параметров комбинированной кусочно-линейной регрессионной модели // Вестник Югорского государственного университета. – 2022. – № 4 (67). – С. 115-119.
18. Носков С.И., Лонишаков Р.В. Идентификация параметров кусочно-линейной регрессии // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. – 2008. – № 6. – С. 63-64.
19. Носков С.И., Хоняков А.А. Кусочно-линейные регрессионные модели объемов перевозки пассажиров железнодорожным транспортом // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2021. – № 4 (40). – С. 80-89.
20. Носков С.И. Кусочно-линейная производственная функция погрузки на железнодорожном транспорте // Электронный сетевой политематический журнал "Научные труды КубГТУ". – 2022. – № 4. – С. 72-79.
21. Носков С.И., Жукова М.С., Кириллова Т.К., Купитман Ю.О., Хоняков А.А. Уточнение способов идентификации параметров некоторых кусочно-линейных регрессий // Электронный сетевой политематический журнал "Научные труды КубГТУ". – 2023. – № 2. – С. 75-81.
22. Носков С.И., Афонин М.В., Бычков Ю.А., Медведев А.П., Торопов В.Д. Нелинейная регрессионная модель функционирования горно-металлургической компании // Инженерный вестник Дона. – 2024. – № 4 (112). – С. 59-68.

REFERENCES

1. Feng Ding. Combined state and least squares parameter estimation algorithms for dynamic systems, *Applied Mathematical Modelling*, 2014, Vol. 38, No. 1, pp. 403-412. DOI: 10.1016/j.apm.2013.06.007.
2. Mario Novak, Predrag Horvat. Mathematical modelling and optimisation of a waste water treatment plant by combined oxygen electrode and biological waste water treatment model, *Applied Mathematical Modelling*, 2012, Vol. 36, No. 8, pp. 3813-3825. DOI: 10.1016/j.apm.2011.11.028.
3. Soh-Fong Lim, Yu-Ming Zheng, Shuai-Wen Zou, J. Paul Chen. Characterization of Copper Adsorption onto an Alginate Encapsulated Magnetic Sorbent by a Combined FT-IR, XPS, and Mathematical Modeling Study, *Environmental Science & Technology*, 2008, Vol. 42, No. 7, pp. 2551-2556. DOI: 10.1021/es7021889.
4. Gilberto González-Parra, Abraham J. Arenas, Benito M. Chen-Charpentier. Combination of non-standard schemes and Richardson's extrapolation to improve the numerical solution of population models, *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, Vol. 52, No. 7-8, pp. 1030-1036. DOI: 10.1016/j.mcm.2010.03.015.
5. S.G. Psakhie, E.V. Shilko, A.S. Grigoriev, S.V. Astafurov, A.V. Dimaki, A.Yu. Smolin. A mathematical model of particle-particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic-plastic materials, *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, Vol. 130, pp. 96-115. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.034.
6. Mohammad Moshref-Javadi, Ahmad Hemmati, Matthias Winkenbach. A truck and drones model for last-mile delivery: A mathematical model and heuristic approach, *Applied Mathematical Modelling*, 2020, Vol. 80, pp. 290-318. DOI: 10.1016/j.apm.2019.11.020.
7. Annelies De Meyer, Dirk Cattryse, Jos Van Orshoven. A generic mathematical model to optimise strategic and tactical decisions in biomass-based supply chains (OPTIMASS), *European Journal of Operational Research*, 2015, Vol. 245, No. 1, pp. 247-264. DOI: 10.1016/j.apm.2019.11.020.
8. Bowen Wei, Liangjie Chen, Huokun Li, Dongyang Yuan, Gang Wang. Optimized prediction model for concrete dam displacement based on signal residual amendment, *Applied Mathematical Modelling*, 2020, Vol. 78, pp. 20-36. DOI: 10.1016/j.apm.2019.09.046.
9. Orazbayev B.B., Orazbayeva K.N., Utenova B.E. Development of mathematical models and modeling of chemical engineering systems under uncertainty, *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2014, Vol. 48, pp. 138-147. DOI: 10.1134/S0040579514020092.
10. Serge Sutulo, C. Guedes Soares. An algorithm for offline identification of ship manoeuvring mathematical models from free-running tests, *Ocean Engineering*, 2014, Vol. 79, pp. 10-25. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2014.01.007.
11. Saenko I.B., Malikov A.V., Avramenko V.S., Yasinskiy S.A. Neyrosetevaya model' diagnostirovaniya komp'yuternykh intsidentov na ob'ektakh kriticheskoy informatsionnoy infrastruktury [Neural network model for diagnosing computer incidents at critical information infrastructure facilities], *Informatsiya i kosmos* [Information and Space], 2019, No. 3, pp. 77-84.
12. Kropotov Yu.A., Proskuryakov A.Yu., Belov A.A., Kolpakov A.A. Modeli, algoritmy sistemy avtomatizirovannogo monitoringa i upravleniya i ekologicheskoy bezopasnosti promyshlennykh proizvodstv [Models, algorithms for an automated monitoring and management system for environmental safety of industrial production], *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti* [Control, Communication and Security Systems], 2015, No. 2, pp. 184-197.

13. Volkov I.A., Igumnov L.A., Volkov A.I., Yuditseva A.I. Raschet resursnykh kharakteristik konstruktivnykh splavov pri vzaimnom vliyaniy ustalosti i dlitel'noy prochnosti materiala [Calculation of resource characteristics of structural alloys under the mutual influence of fatigue and long-term strength of the material], *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics], 2023, No. 4, pp. 64-82.
14. Semenov V.A., Morozov S.V., Il'in D.V. Kombinirovannyi metod verifikatsii masshtabnykh modeley dannykh [Combined method for verification of large-scale data models], *Trudy Instituta sistemnogo programmirovaniya RAN* [Transactions of the Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences], 2014, Vol. 26, No. 2, pp. 197-230.
15. Baranovskiy A.M., Belozеров V.A., Opryshko D.I. Kombinirovannaya model' protsessa otsenivaniya dostovernosti kontrolya tekhnicheskogo sostoyaniya kosmicheskikh apparatov v usloviyakh neopredelennosti [Combined model of the process of assessing the reliability of monitoring the technical condition of spacecraft under uncertainty], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie* [News of higher educational institutions. Instrument engineering], 2009, Vol. 52, No. 4, pp. 56-61.
16. Mikhalevich I.F. Strukturnyy analiz elementov mult'iservisnykh setey svyazi [Structural analysis of elements of multiservice communication networks], *Telekommunikatsii* [Telecommunications], 2007, No. 2, pp. 2-9.
17. Noskov S.I. Identifikatsiya parametrov kombinirovannoy kusochno-lineynoy regressionnoy modeli [Identification of parameters of a combined piecewise linear regression model], *Vestnik YUgorskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Yugra State University], 2022, No. 4 (67), pp. 115-119.
18. Noskov S.I., Lonshakov R.V. Identifikatsiya parametrov kusochno-lineynoy regressii [Identification of parameters of piecewise linear regression], *Informatsionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh system* [Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems], 2008, No. 6, pp. 63-64.
19. Noskov S.I., Khonyakov A.A. Kusochno-lineynye regressionnye modeli ob'emov perevozki passazhirov zheleznodorozhnym transportom [Piecewise linear regression models of passenger transportation volumes by rail], *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* [Models, systems, networks in economics, technology, nature and society], 2021, No. 4 (40), pp. 80-89.
20. Noskov S.I. Kusochno-lineynaya proizvodstvennaya funktsiya pogruzki na zheleznodorozhnom transporte [Piecewise linear production function of loading on rail transport], *Elektronnyy setevoy politematicheskii zhurnal "Nauchnye trudy KubGTU"* [Electronic online polythematic journal "Scientific Works of KubSTU"], 2022, No. 4, pp. 72-79.
21. Noskov S.I., Zhukova M.S., Kirillova T.K., Kupitman Yu.O., Khonyakov A.A. Utochnenie sposobov identifikatsii parametrov nekotorykh kusochno-lineynykh regressiy [Refinement of methods for identifying parameters of some piecewise linear regressions], *Elektronnyy setevoy politematicheskii zhurnal "Nauchnye trudy KubGTU"* [Electronic online polythematic journal "Scientific Works of KubSTU"], 2023, No. 2, pp. 75-81.
22. Noskov S.I., Afonin M.V., Bychkov Yu.A., Medvedev A.P., Toropov V.D. Nelineynaya regressionnaya model' funktsionirovaniya gorno-metallurgicheskoy kompanii [Nonlinear regression model of functioning of a mining and metallurgical company], *Inzhenernyy vestnik Dona* [Engineering Bulletin of the Don], 2024, No. 4 (112), pp. 59-68.

Носков Сергей Иванович – Иркутский государственный университет путей и сообщения; e-mail: sergey.noskov.57@mail.ru; г. Иркутск, Россия; тел.: +79149022494; кафедра информационных систем и защиты информации; д.т.н.; профессор.

Беляев Сергей Вячеславович – Иркутский государственный университет путей и сообщения; e-mail: bsv2001@list.ru; г. Иркутск, Россия; тел.: +79041514500; кафедра информационных систем и защиты информации; магистрант.

Noskov Sergey Ivanovich – Irkutsk State Transport University; e-mail: sergey.noskov.57@mail.ru; Irkutsk, Russia; phone: +79149022494; the Department of Information Systems and Information Security; dr. of eng. sc.; professor.

Belyaev Sergey Vyacheslavovich – Irkutsk State Transport University; e-mail: bsv2001@list.ru; Irkutsk, Russia; phone: +79041514500; the Department of Information Systems and Information Security; master's student.