

## Раздел II. Анализ данных, моделирование и управление

УДК 007.52:629.3.05

DOI 10.18522/2311-3103-2025-4-92-102

**В.А. Костюков**

### **МЕТОД ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО РАЗНЕСЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ГРУППЫ РОБОТОВ В УСЛОВИЯХ ПРЕПЯТСТВИЙ**

*При разработке алгоритмов планирования путей роботов, образующих группу, возникает проблема обеспечения гарантированного их не столкновения друг с другом и с возможными препятствиями. Кроме того, для группы может действовать требование поддержания заданного шаблона строя там, на тех участках движения группы, где это возможно с учетом препятствий. Однако часто образуется узкий пространственный коридор допустимого движения группы, который может быть обусловлен как исходными требованиями к траектории (например, условие нахождения ее в некоторой окрестности заданной точки), так и наличием препятствий и прочих помеховых воздействий. Наличие такого ограничительного коридора может привести к вынужденному сближению и даже пересечению пространственных траекторий движения отдельных роботов группы. Одним из возможных решений указанной проблемы является задание или корректировка временных параметрических представлений этих индивидуальных траекторий так, чтобы два робота с близко подходящими друг к другу пространственными траекториями в наиболее близких их точках находились в разное время. Причем интервал времени, отделяющий моменты нахождения этих двух роботов в этих точках, должен выбираться в зависимости от скорости роботов и их габаритов. На этой идее основан развиваемый метод пространственно-временного разнесения траекторий отдельных роботов группы. Метод подразумевает формирование и решение специальной задачи линейного программирования относительно целевых моментов времени ранее выделенных узлов пространственной траектории каждого ведомого робота. Ограничивающим фактором на изменение этих моментов выступает максимально возможная скорость перемещения робота. Для каждого робота производится предварительное выделение набора траекторий других роботов группы, от которых далее необходимо отстроиться в пространстве-времени. Это происходит в зависимости от приоритета роботов в группе. Приводятся примеры численной реализации алгоритма на базе предлагаемого метода, подтверждающие его эффективность.*

*Планирование пути группы роботов; пространственная траектория; временное параметрическое представление траектории; пространственно-временное разнесение близких траекторий; полигональные препятствия.*

**V.A. Kostyukov**

### **METHOD OF SPATIAL-TEMPORAL DIVERSITY OF TRAJECTORIES OF A GROUP OF ROBOTS IN THE CONTEXT OF OBSTACLES**

*When developing algorithms for planning the paths of robots forming a group, the problem of ensuring that they do not collide with each other and with possible obstacles arises. In addition, the group may be required to maintain a given formation template in those sections of the group's movement where this is possible taking into account obstacles. However, a narrow spatial corridor of permissible movement of the group is often formed, which can be caused by both the initial requirements for the trajectory (for example, the condition of its location in a certain vicinity of a given point), and the presence of obstacles and other interference effects. The presence of such a restrictive corridor can lead to a forced convergence and even intersection of the spatial trajectories of movement of individual robots in the group. One possible solution to this problem is to specify or adjust the time parametric representations of these individual trajectories so that two robots with spatial trajectories approaching each other are at their closest points at different times. Moreover, the time interval separating the moments of these two robots being at these points should be selected depending on the speed of the robots and their dimensions. The developed method of space-time separation of the trajectories of individual robots in a group is based on this idea. The method involves the for-*

*mation and solution of a special linear programming problem relative to the target moments of time of previously selected nodes of the spatial trajectory of each slave robot. The limiting factor for changing these moments is the maximum possible speed of the robot. For each robot, a preliminary selection of a set of trajectories of other robots in the group is made, from which it is then necessary to detach in space-time. This occurs depending on the priority of the robots in the group. Examples of numerical implementation of the algorithm based on the proposed method are given, confirming its effectiveness.*

*Path planning for a group of robots; spatial trajectory; temporal parametric representation of the trajectory; space-time separation of close trajectories; polygonal obstacles.*

**Введение.** Для планирования движения группы роботов в условиях препятствий актуальной задачей является переконфигурирование их строя. На движение группы может быть наложено требование движения строем с заданным шаблоном, а также допустимая степень отклонения от этого шаблона.

Задача движения строем с заданным шаблоном является актуальной при решении различных задач, таких как слежение группой за целью [1], ретрансляция связи [2], движение колонной или шеренгой [3], картографирование и георазведка [4], обследование местности и поиск объектов [5]. Поддержание заданного шаблона строя используется при создании многопозиционных радиолокационных систем с использованием БПЛА [6–8], а также при проведении сейсморазведки группой АНПА [9, 10].

Однако данная задача весьма осложняется при наличии препятствий и/или помеховых воздействий разной природы [11].

Действительно, перестроение по тому или иному геометрическому правилу в зависимости от конкретных форм препятствий и сцен весьма громоздко, если вообще возможно. Поэтому надо разработать метод перестроения, работоспособный для всех типов препятствий, но имеющий невысокую вычислительную сложность.

При этом само перестроение может не иметь детерминированный характер в отношении промежуточных конфигураций, однако должны быть гарантированы следующие условия: а) центры роботов группы должны не выходить за границу некоторого круга заданного радиуса, проведенного из геометрического центра всей группы (окрестность расширения группы); б) отдельные роботы группы не должны приближаться друг к другу более чем на заданное охранное расстояние. Кроме того, если для группы критичным является достаточно точное соблюдение заданного шаблона строя, тогда добавляется еще одно условие: в) в случае, когда позволяет текущая часть сцены с препятствиями, где находится группа в данный момент времени, группа должна соблюдать заданный шаблон строя.

Описанный выше метод может быть реализован, например, с помощью следующего, описываемого ниже, алгоритма.

**Базовый алгоритм метода корректировки временных параметрических представлений траекторий роботов в условиях препятствий.** Поставленную выше задачу будем решать в три этапа.

На первом этапе в условиях заданной сцены находим траекторию движения ведущего робота группы.

На втором этапе строим специальный коридор относительно этой траектории – такое односвязное подмножество плоскости, что если формально простроить все траектории движения ведомых роботов с учетом их виртуальных положений согласно шаблону строя, но без учета карты препятствий, то эти траектории будут принадлежать этому подмножеству.

Далее, на третьем этапе, происходит построение предварительных траекторий для каждого ведомого робота в условиях препятствий, принадлежащих данному подмножеству, в результате чего получаем кусочно-ломаные пространственные траектории, соответствующие каждому роботу и не пересекающие ни одно из препятствий.

В завершение, на четвертом этапе, строим временные параметрические представления построенных траекторий каждого робота с учетом требований: а), б) и в). При этом для соблюдения требований б) и в) локально мы применяем специальный метод разнесения взаимно близких участков каждого робота в любой момент времени из заданного интервала.

Для нахождения траекторий как ведущего робота в исходной сцене, так и ведомых роботов для построенного коридора предполагается использовать планировщик на базе метода характеристического графа видимости (МХГВ) [12].

Однако можно также использовать методы на базе клеточной декомпозиции [13, 14]. Заметим, что в случае сильно ограниченного коридора движения метод диаграмм Вороного [15] не подойдет.

Рассмотрим особенности реализации четвертого этапа.

Прежде всего, введем понятие приоритета в отталкивании путем обобщения подхода, рассмотренного в [16]. Грубо это означает, что все роботы группы упорядочиваются таким образом, что данный  $k$ -й робот должен отталкиваться от центров всех других роботов с меньшим номером и большим приоритетом при условии, что эти роботы находятся в некоторой круговой ее окрестности. Ведущий робот, идущий первым, не должен отталкиваться ни от какого другого, потому что все роботы должны равняться на него.

Проанализируем степень близости двух кривых с учетом временной координаты следующим образом. Пусть имеем две кусочно-ломанные кривые, полученные после применения планировщика МХГВ. Вначале считаем, что точки первой из траекторий корректировать не надо и будем корректировать только вторую траекторию. Для этого рассмотрим траектории в трехмерном пространстве, две первые координаты которого есть координаты плоскости пространственного движения, а третья – временная. Все узлы получившейся для одной из траекторий кусочно-ломаной в расширенном трехмерном пространстве упорядочены в соответствии со своими номерами. Причем узлу с большим номером соответствует строго большее время, откладываемое по третьей координате расширенного пространства.

Далее, для каждого узла второй траектории в расширенном трехмерном пространстве, подлежащей корректировке, определяем те точки первой, которые попали в шар заданного ограничительного радиуса. Далее организуем процедуру отталкивания выбранного узла от этих точек первой кривой, которая прекращается, когда внутри ограничительного радиуса этой точки после смещения не будет каких-либо точек первой траектории. Затем точно такой же процедуре подвергаем следующую точку первой кривой и т.д.

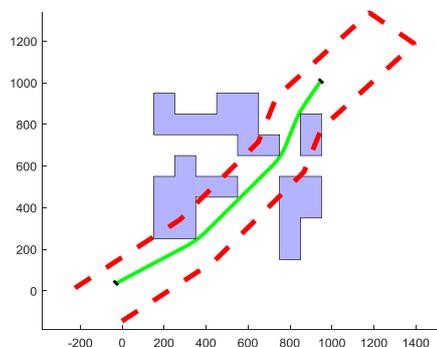
На рис. 1,а показана первоначально спланированная пространственная траектория для ведущего робота; здесь же показан *коридор*, внутри которого, согласно шаблону строя, должны были бы двигаться элементы группы в случае отсутствия препятствий.

Шаблон строя представляет собой треугольник (рис. 1,б); проставлены номера упорядоченной совокупности элементов группы, меньшему номеру соответствует больший приоритет в указанном выше смысле.

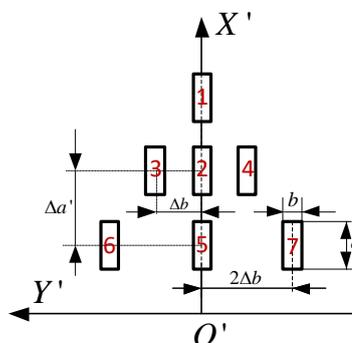
В рассматриваемом же случае наличия препятствий необходимо построить предварительные траектории движения каждого ведомого элемента *внутри этого коридора с учетом препятствий*. Эти траектории показаны красными линиями на рис. 1,а; здесь же показана полигональная невыпуклая зона, полученная объединением внешнего интегрального многоугольника коридора со всеми препятствиями сцены. На рис. 1,в показаны в увеличенном виде некоторые характерные зоны сцены с предварительно построенными кусочно-линейными траекториями для отдельных элементов группы. Из этих рисунков, в частности, видно, что точками старта и финиша для каждого робота группы являются их соответственные положения в строю согласно заданному шаблону, в начальный и конечный моменты времени.

Как видно из рис. 1,а,б, первоначальные траектории отдельных роботов на некоторых участках своего пути подходят достаточно близко друг к другу, поэтому необходима процедура отделения, отдаления взаимно близких участков разных пар траекторий друг относительно друга. При этом заранее не известно, подходят ли фактически два робота близко друг к другу, или их нахождение в близких пространственных точках достаточно разнесено во времени. Заметим, что процедура пространственной корректировки кривых, близко подходящих друг к другу, затруднена наличием препятствий, что существенно

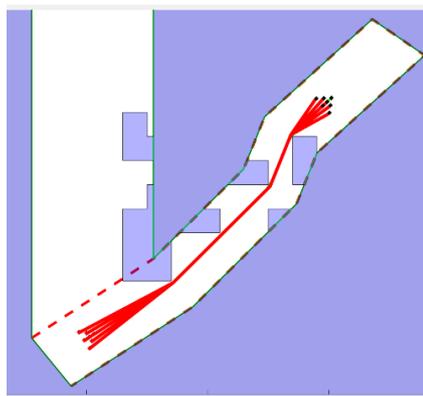
стесняет возможности такой корректировки. Однако сами пространственные кривые, спланированные по методу характеристического графа видимости, подходят достаточно близко к препятствиям (см. рис. 1,б), поэтому даже небольшое локальное перепланирование некоторых траекторий может привести к их пересечению с препятствиями.



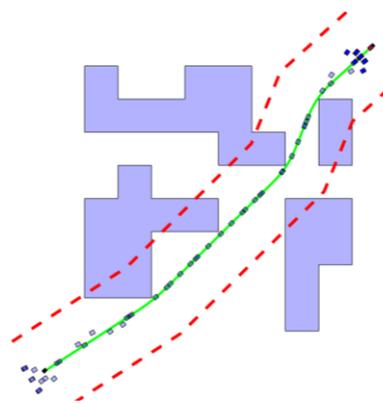
а – планирование траектории ведущего робота в среде с препятствиями



б – заданный шаблон строга



в – предварительные траектории движения каждого ведомого элемента внутри построенного коридора с учетом препятствий



г – визуализация некоторых промежуточных положений движущейся группы

Рис. 1. К определению индивидуальных траекторий элементов группы в конфликтной среде с препятствиями

Единственным приемлемым вариантом является произвести разнесение не пространственных кривых, а соответствующих им пространственно-временных, фазовых, кривых.

**Способ корректировки узлов пространственно-временных кусочно-ломаных отдельных роботов с учетом разнесения близких точек в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .** Опишем главный для искомого алгоритма планирования процесс построения таких пространственно-временных кривых, которые далее будем называть расширенными кусочно-ломаными в трехмерном пространстве « $x*y*t$ ». Эти кривые из  $\mathbb{R}^3$  есть просто одно из возможных представлений параметризации пространственных кривых в  $\mathbb{R}^2$ . Этим кривым соответствуют следующие матрицы:

для кусочно-ломаной ведущего (1-го) робота:

$$\hat{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} vt_1 & vt_2 & \dots & vt_u & \dots & vt_U \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_u^{(1)} & \dots & x_U^{(1)} \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_u^{(1)} & \dots & y_U^{(1)} \end{pmatrix}; \quad (1)$$

для расширенной кусочно-ломаной  $j$ -го ведомого  $j > 1$ :

$$\hat{P}^{(j)} = \begin{pmatrix} vt_1 & vt_2 & \dots & vt_u & \dots & vt_U \\ x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & \dots & x_u^{(j)} & \dots & x_U^{(j)} \\ y_1^{(j)} & y_2^{(j)} & \dots & y_u^{(j)} & \dots & y_U^{(j)} \end{pmatrix}, j = 2, \dots, N_g, \quad (2)$$

где использован нормирующий множитель  $v$ , который целесообразно считать равным крейсерской скорости роботов. Обозначим также  $P^{(j)}$  результат удаления первой строки из матрицы  $\hat{P}^{(j)}$  для всех  $j$ .

В этих матрицах первые строки выражают дискретные временные отсчеты  $t_u = \frac{T(u-1)}{n-1}, u = 1, 2, \dots, U$ ; вторая и третья – соответствующие координаты дискретных точек в эти моменты для данного робота.

Представление (1) для траектории ведущего робота далее меняться не будет; представления (2) для траекторий ведомых роботов далее меняться будут. Причем эти изменения будем проводить так, чтобы между самыми близкими участками каждой пары кривых двух роботов было расстояние в расширенном пространстве  $\mathbb{R}^3$  не меньше заданного  $D_{\mathbb{R}^3, min}$ .

Далее производим для каждого представления типа (2) следующие действия. Для каждой точки расширенного пространства  $\hat{P}_u^{(j)} = (vt_u, x_u^{(j)}, y_u^{(j)})^T$  находим набор  $SetP(\hat{P}_u^{(j)})$  ближайших точек на всех кусочно-ломаных, попадающих в окрестность  $D_{\mathbb{R}^3, min}$  относительно точки  $\hat{P}_u^{(j)}$  и индуцированных всеми другими представлениями роботов с приоритетом, большим чем у данного робота; каждая точка этого набора находится на минимальном расстоянии до  $\hat{P}_u^{(j)}$  в  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $K_{ju}$  – число таких точек. Введем обозначения:  $SetP(\hat{P}_u^{(j)})(1, :)$  – набор дискретных нормированных временных отсчетов для всех точек набора, есть вектор-строка длины  $K_{ju}$ ;  $SetP(\hat{P}_u^{(j)})(2: 3, :)$  – набор абсцисс и ординат, соответствующих этим отсчетам, есть матрица  $2 \times K_{ju}$ .

После этого решаем следующую задачу линейного программирования [17] для каждого ведомого  $j$ -го робота:

$$At^{(j)} \leq b^{(j)}, \quad (3)$$

$$l^{(j)} \leq t^{(j)} \leq q^{(j)}, \quad (4)$$

где

$$A_{U-1 \times U-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & \dots & . & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$b_u^{(j)} = \{b_u^{(j)}, u = 2, \dots, U\},$$

$$b_u^{(j)} = -\frac{1}{v_{max}} |P_u^{(j)} - P_{u-1}^{(j)}|, \quad (6)$$

$$l^{(j)} = \{l_u^{(j)}, u = 2, \dots, U\}, \quad (7)$$

$$l_u^{(j)} = \max_{1 \leq i \leq K_{ju}} \{SetP(\hat{P}_u^{(j)})(1, i) + \Delta \hat{t}_{uji}\}, \text{ если } SetP(\hat{P}_u^{(j)}) \neq \emptyset, \quad (8)$$

0, иначе

$$\Delta \hat{t}_{uji} = \sqrt{D_{\mathbb{R}^3, min}^2 - |SetP(\hat{P}_u^{(j)})(2: 3, i) - P_u^{(j)}|^2}, \quad (9)$$

$$(q^{(j)})_{U-1, 1} = [vT, vT, \dots, vT]^T. \quad (10)$$

Система неравенств (3) порождена требованием, чтобы каждый последующий временной отсчет отстоял от предыдущего не менее, чем на  $\frac{v}{V_{max}} |P_u^{(j)} - P_{u-1}^{(j)}|$ , что соответствует физической достижимости каждой следующей пространственной точки  $P_u^{(j)}$  из предыдущей  $P_{u-1}^{(j)}$  с учетом максимальной скорости  $V_{max}$ , которую может развить робот.

Неравенства (4) отвечают условию, что  $u$ -й узел расширенной ломаной  $j$ -го робота должен быть отстроен вверх от каждого близкого  $i$ -го узла в наборе  $SetP(\hat{P}_u^{(j)})$  не менее, чем на  $\Delta \hat{t}_{uji}$  (8), если только набор  $SetP(\hat{P}_u^{(j)})$  для  $u$ -го узла данного  $j$ -го робота не пуст. Иначе  $L_u^{(j)}$  полагается нулевым.

Опишем детально представленный алгоритм построения траекторий элементов группы с учетом: а) первоначально спланированной кривой ведущего робота в данной конфликтной среде; б) шаблона строя; в) препятствий, находящихся в области движения группы.

*Шаг 1.* Для ведущей планируем траекторию в данной конфликтной среде с учетом препятствий и затем строим соответствующее временное параметрическое представление по модифицированному методу Дубинса [18]:  $P_u^{(0)} = (x_u^{(0)}, y_u^{(0)})^T, u = 1, 2, \dots, U$ .

*Шаг 2.* Строим ограничивающий коридор для движения группы и интегрируем его с препятствиями, получая дополненный набор препятствий для последующего планирования траекторий каждой ведомого робота.

*Шаг 3.* Для каждой ведомого робота предварительно планируем пространственные кусочно-ломаные  $L^{N^{(j)-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_i^j\}_{i=1 \dots N^{(j)}}$  по МХГВ в условиях в данной конфликтной среде и дополненного набора препятствий.

*Шаг 4.* Для каждой  $L^{N^{(j)-1}}$  получаем кусочно-квадратичные кривые по методу Дубинса:

$$L^{N^{(j)-1}} C^{N^{(j)-2}}, j = 2, \dots, N_g,$$

каждую из которых будем представлять упрощенно набором вершин и радиусов скругления, либо, более точно – дискретным набором достаточного числа точек на этой кривой. Заметим, что временную параметризацию для этих кривых здесь не проводится.

*Шаг 5.* Получаем виртуальные положения каждой ведомого робота в базовой системе координат относительно соответствующих последовательных положений ведущего робота  $A'(t_u)(x_{*j}^*, y_{*j}^*, 1)^T, j = 1, 2, \dots, N_g, u = 1, 2, \dots, U$ , с учетом шаблона строя:

$$(x_u^{*(j)}, y_u^{*(j)}, 1)^T = A'(t_u)(x_{*j}^*, y_{*j}^*, 1)^T, j = 1, 2, \dots, N_g, u = 1, 2, \dots, U.$$

*Шаг 6.* «Проектируем» эти положения на соответствующие пространственные кривые  $L^{N^{(j)}} C^{N^{(j)-2}}$  по (8):

$$P_u^{(j)} = (x_u^{(j)}, y_u^{(j)})^T = f_{L^{N^{(j)-1}} C^{N^{(j)-2}}} [x_u^{*(j)}, y_u^{*(j)}; Par_{L^{N^{(j)}} C^{N^{(j)-2}}}], \\ u = 1, 2, \dots, U, t_u = \frac{T(u-1)}{U-1}, j = 1, 2, \dots, N_g. (11)$$

*Шаг 7.* Вводим *расширенные* кусочно-ломаные в трехмерном пространстве «x\*y\*t» для ведущей и ведомых робота по (1), (2), формируем вспомогательные величины (5)-(10), после чего для каждой ведомого робота решаем соответствующую задачу линейного программирования (3)-(4) с получением результирующих нормированных моментов времени искомой расширенной кривой этого робота. Так формируются *скорректированные расширенные* кривые. После этого задача решена.

**Численный расчет.** Пусть дано: геометрические параметры шаблона строя, согласно рис. 1,б:  $a=24$ м;  $b=20$ м;  $\Delta a = 14,4$ м;  $\Delta b = 12$ м; число элементов в строе  $n=7$ ; крейсерская и максимальная скорости каждого робота:  $V=10$ м/с,  $V_{max}=1,7$  V.

На рис. 2,а представлены исходные расширенные кривые, построенные для ведущей (красная кривая) и ведомых (зеленые кривые) на момент начала шага седьмого. Здесь горизонтальная плоскость соответствует плоскости движения, а вертикальная есть ось времени. Видно, что практически все зеленые кривые близко подходят друг к другу во многих местах и поэтому требуют корректировки. Для данного случая радиус окрестности был взят равным  $D_{\mathbb{R}^3, min} = 60$ м.

В результате расчета параметрического представления ведущего робота получено полное время движения всей группы  $T=142$ , с.

На рис. 2,б показаны результирующие расширенные кривые, построенные по окончании шага седьмого (см. выше базовый алгоритм метода). Видно, что зеленые кривые теперь отстоят каждая на достаточное расстояние, для того чтобы движение группы было безопасным. При этом, как видно из рис. 1,г, где запечатлены некоторые промежуточные положения движущейся группы, шаблон строя точно соблюдается в начале и конце движения.

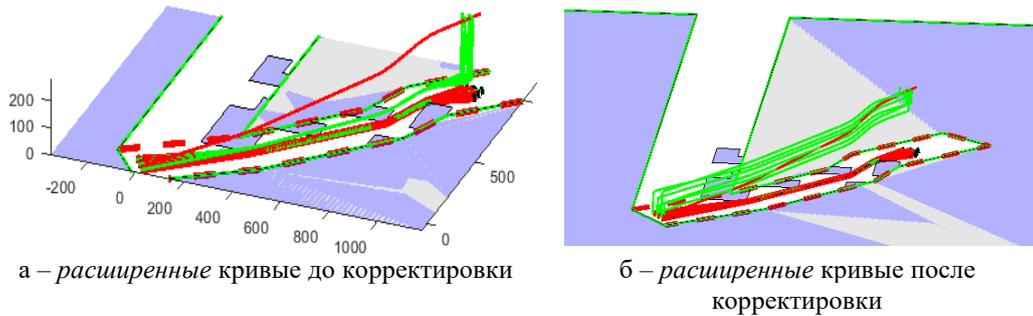


Рис. 2. Визуализация расширенных кривых всех роботов группы до и после их корректировки с целью разнесения близко расположенных участков разных кривых для Примера 1

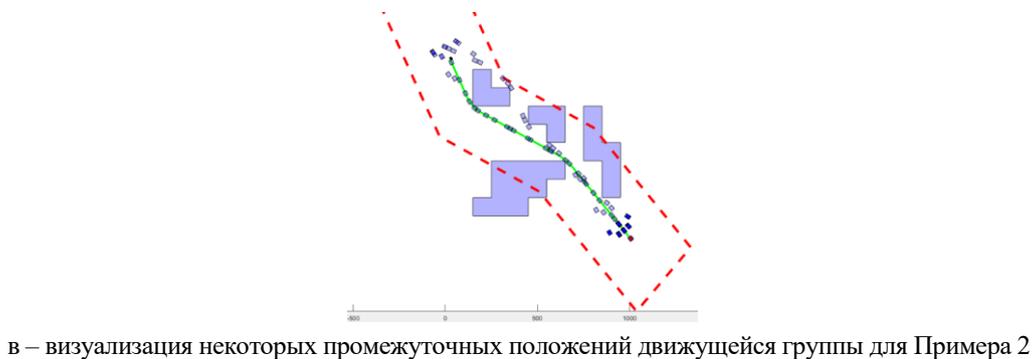
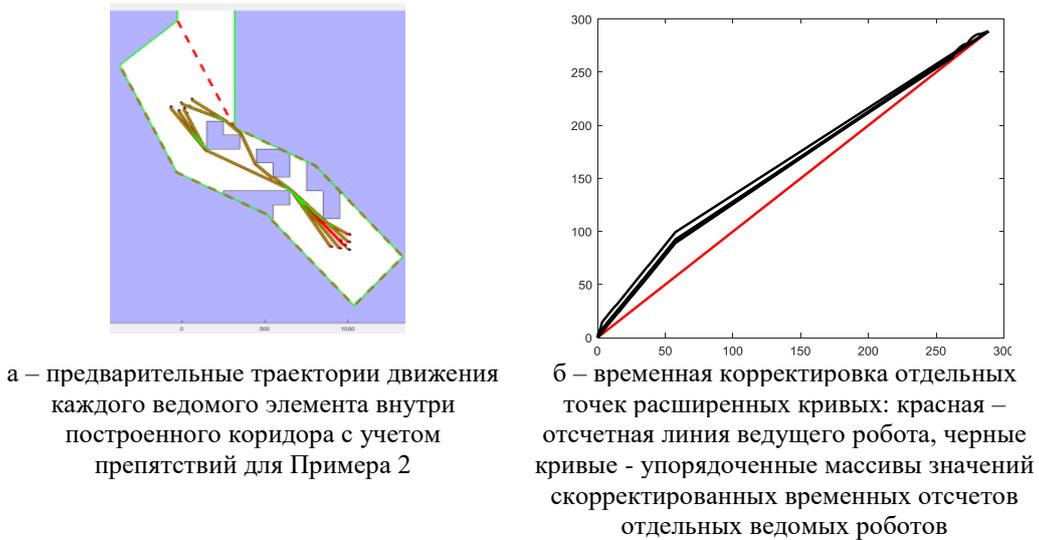


Рис. 3. Визуализация траекторий и перемещений роботов группы и временная корректировка отдельных точек расширенных кривых

На рис. 3,а приведены траектории отдельных роботов группы с шаблоном типа «треугольник», движущейся в условиях новой сцены из четырех препятствий (Пример 2). Линейные размеры шаблона строя в 2,5 раза больше, чем для предыдущего примера. Видно, что планирование, производимое по МХГВ, строит достаточно различающиеся пространственные траектории, область их приближенного совпадения значительно меньше, чем для предыдущего случая, поскольку изначально условия движения для разных роботов группы меняются в этом случае в большей степени из-за больших расстояний между рядами и шеренгами шаблона.

На рис. 3,б приведены скорректированные временные координаты  $t^{(j)}$  каждого ведомого робота в зависимости от номера временной итерации, тактируемой дискретными временными отсчетами интервала времени ведущего робота (эти кривые показаны черным цветом). Также здесь приведены значения временных отсчетов самой ведущего робота. На рис. 3 в приведены некоторые промежуточные положения движущейся группы, шаблон строя строится точно в конце рассматриваемого участка движения группы.

Развитый здесь метод пространственно-временного разнесения роботов группы обобщает результаты работы [19] по планированию перемещений группы с требованием сохранения шаблона строя на линейных участках траекторий. Кроме того, этот метод может быть дополнительным инструментом при организации децентрализованного управления этой группой, в том числе с учетом кинематических и динамических характеристик ее элементов [20].

**Заключение.** В настоящей статье рассмотрена важная задача планирования движения группы роботов в условиях препятствий. Предполагается, что с помощью какого-либо планировщика произведено предварительное построение кусочно-линейных пространственных траекторий каждого робота. Некоторые участки двух разных траекторий двух роботов могут настолько близко подходить друг к другу, что повышается вероятность столкновения соответствующих роботов. Ситуация осложняется тем, что пространственная корректировка таких траекторий, которую можно было бы свести к отодвиганию друг от друга таких близко расположенных участков, затруднена наличием препятствий.

Для решения этой проблемы вначале вводится понятие расширенных кусочно-ломаных как дискретизированных временных параметрических представлений траекторий всех роботов. Далее предлагается метод разнесения близких участков таких кривых по временной координате, в случае, когда соответствующая пространственная корректировка невозможна или сильно ограничена наличием препятствий. При таком разнесении используется принцип приоритета: все роботы группы предварительно нумеруются в порядке убывания приоритета, ведущий робот – первый, для каждого ведомого оценивается положение его расширенной ломаной только относительно соответствующих ломаных роботов с приоритетом, большим, чем у данного.

Обосновывается допустимый диапазон корректирующего изменения нормированной временной координаты для каждого узла каждой расширенной кусочно-ломаной, содержащей в соответствующей малой окрестности данного узла узлы других аналогичных кривых. Эта окрестность берется в трехмерном пространстве, ее радиус выбирается как порог срабатывания опасного приближения соответствующих пространственно-временных точек разных траекторий друг к другу. При этом также учитывается корреляция соседних узлов одной и той же расширенной кривой в отношении потенциальной достижимости данной точки из предыдущей при заданной максимальной скорости движения роботов. Ставится специальная задача линейного программирования для каждого ведомого робота относительно искомых скорректированных моментов времени ее узлов. Решение этой задачи для всех ведомых роботов позволяет разнести на безопасное расстояние близкие точки расширенных траекторий каждой пары роботов с учетом заданных порядка приоритетности и порога срабатывания близких точек.

Эффективность развитого подхода подтверждается соответствующими численными расчетами.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00492 «Разработка методов оптимального целераспределения в группе подвижных робототехнических комплексов», <https://rscf.ru/project/24-29-00492/> на базе АО «НКБ Робототехники и систем управления».*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Sun F., Li H., Zhu W., Kurths J. Fixed-time formation tracking for multiple nonholonomic wheeled mobile robots based on distributed observer // *Nonlinear Dynamics*. – 2021. – Vol. 106. – P. 3331-3349.
2. Dong X., Yu B., Shi Z., Zhong Y. Time-Varying Formation Control for Unmanned Aerial Vehicles: Theories and Applications // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. – Vol. 23 (1). – P. 340-348.
3. Arteaga-Escamilla C.M., Castro-Linares R., Álvarez-Gallegos J. Leader-follower formation with reduction of the off-tracking and velocity estimation under visibility constraints // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. – 2021. – Vol. 18 (610).
4. Безрук Г.Г., Мартынова Л.А., Саенко И.Б. Динамический метод поиска антропогенных объектов в морском дне с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов // *Тр. СПИИРАН*. – 2018. – Т. 3 (58). – С. 203-226.
5. Pack D.J., DeLima P., Toussaint G.J., York G. Cooperative control of UAVs for localization of intermittently emitting mobile targets // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*. – 2009. – Vol. 39 (4). – P. 959-970.
6. Шенета А.П., Ненашев В.А. Точностные характеристики определения координат объектов в двухпозиционной системе малогабаритных бортовых РЛС // *Информационно-управляющие системы*. – 2020. – Т. 2. – P. 31-36.
7. Nenashv V.A.; Khanykov I.G. Formation of Fused Images of the Land Surface from Radar and Optical Images in Spatially Distributed On-Board Operational Monitoring Systems // *Journal of Imaging*. – 2021. – Vol. 7 (251).
8. Ненашев В.А., Ханьков И.Г. Формирование комплексного изображения земной поверхности на основе кластеризации пикселей локационных снимков в многопозиционной бортовой системе // *Информатика и автоматизация*. – 2021. – Т. 20, № 2. – С. 302-340.
9. Мартынова Л.А. Метод эффективного удержания положения АНПА на маршрутной траектории при ведении сейсморазведки // *Информационно-управляющие системы*. – 2018. – Т. 3. – С. 34-44.
10. Мартынова Л.А., Колюхов Г.В., Пашкевич И.В., Рухлов Н.Н. Особенности группового управления АНПА при ведении сейсморазведки // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2017. – № 9 (194). – С. 21-33.
11. Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhov V. Method for Optimizing of Mobile Robot Trajectory in Repeller Sources Field // *Informatics and Automation*. – 2021. – Vol. 20 (3). – P. 690-726.
12. Костюков В.А., Медведев М.Ю., Пишихов В.Х. Алгоритм планирования пути в двумерной среде с полигональными препятствиями на классе кусочно-ломаных траекторий // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2023. – № 5 (235). – С. 34-48.
13. Ferguson D., Stentz A. Using interpolation to improve path planning: The field D\* algorithm // *J. of Field Robotics*. – 2006. – Vol. 23, No. 2. – P. 79-101. – DOI: 10.1002/rob.20109.
14. Daniel K., Nash A., Koenig S., Felner A. Theta\*. Any-angle path planning on grids // *J. of Artificial Intelligence Research*. – 2010. – Vol. 39. – P. 533-579. – DOI: 10.1613/jair.2994.
15. Guibas L.J., Knuth D.E., Sharir M. Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams // *Algorithmica*. – 1992. – 7 (1). – P. 381-413.
16. Морозова Н.С. Виртуальные формации и виртуальные лидеры в задаче о движении строем группы роботов // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. – 2015. – № 1. – С. 135-149.
17. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. – М.-Л.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. – 708 с.
18. Костюков В.А., Медведев М.Ю., Пишихов В.Х. Алгоритмы планирования сглаженных индивидуальных траекторий движения наземных роботов // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2022. – Т. 23, № 11. – С. 585-595.
19. Костюков В.А., Медведев М.Ю., Пишихов В.Х. Планирование движения наземных роботов в среде с препятствиями: алгоритмы построения траекторий в группе при заданном шаблоне // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2023. – № 01.
20. Пишихов В.Х., Медведев М.Ю. Децентрализованное управление группой однородных подвижных объектов в двумерной среде с препятствиями // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2016. – Т. 17 (5). – С. 346-353.

## REFERENCES

1. Sun F., Li H., Zhu W., Kurths J. Fixed-time formation tracking for multiple nonholonomic wheeled mobile robots based on distributed observer, *Nonlinear Dynamics*, 2021, Vol. 106, pp. 3331-3349.
2. Dong X., Yu B., Shi Z., Zhong Y. Time-Varying Formation Control for Unmanned Aerial Vehicles: Theories and Applications, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 23 (1), pp. 340-348.
3. Arteaga-Escamilla C.M., Castro-Linares R., Álvarez-Gallegos J. Leader-follower formation with reduction of the off-tracking and velocity estimation under visibility constraints, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2021, Vol. 18 (610).
4. Bezruk G.G., Martynova L.A., Saenko I.B. Dinamicheskiy metod poiska antropogennykh ob"ektov v morskoye dne s ispol'zovaniem avtonomnykh neobitaemykh podvodnykh apparatov [Dynamic method of searching for anthropogenic objects in the seabed using autonomous uninhabited underwater vehicles], *Tr. SPIIRAN [SPIIRAS Proceedings]*, 2018, Vol. 3 (58), pp. 203-226.
5. Pack D.J., DeLima P., Toussaint G.J., York G. Cooperative control of UAVs for localization of intermittently emitting mobile targets, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 2009, Vol. 39 (4), pp. 959-970.
6. Shepeta A.P., Nenashev V.A. Tochnostnye kharakteristiki opredeleniya koordinat ob"ektov v dvukhpozitsionnoy sisteme malogabaritnykh bortovykh RLS [Accuracy characteristics of object location in a two-position system of small onboard radars], *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy [Information and Control Systems]*, 2020, Vol. 2, pp. 31-36.
7. Nenashev V.A.; Khanykov I.G. Formation of Fused Images of the Land Surface from Radar and Optical Images in Spatially Distributed On-Board Operational Monitoring Systems, *Journal of Imaging*, 2021, Vol. 7 (251).
8. Nenashev V.A., Khanykov I.G. Formirovaniye kompleksnogo izobrazheniya zemnoy poverkhnosti na osnove klasterizatsii pikseley lokatsionnykh snimkov v mnogopozitsionnoy bortovoy sisteme [Formation of a fused image of the land surface based on pixel clustering of location images in a multi-position onboard system], *Informatika i avtomatizatsiya [Informatics and Automation]*, 2021, Vol. 20, No. 2, pp. 302-340.
9. Martynova L.A. Metod effektivnogo uderzhaniya polozheniya ANPA na marshrutnoy traektorii pri vedenii seysmorazvedki [Features of ABBA Group management during seismic exploration], *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy [Information and Control Systems]*, 2018, Vol. 3, pp. 34-44.
10. Martynova L.A., Konyukhov G.V., Pashkevich I.V., Rukhlov N.N. Osobennosti gruppovogo upravleniya ANPA pri vedenii seysmorazvedki [Features of ABBA Group management during seismic exploration], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences]*, 2017, No. 9 (194), pp. 21-33.
11. Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhopov V. Method for optimizing of mobile robot trajectory in repeller sources field, *Informatics and Automation*, 2021, Vol. 20 (3), pp. 690-726.
12. Kostjukov V.A., Medvedev M.Yu., Pshikhopov V.Kh. Algoritm planirovaniya puti v dvukhmernoy srede s poligonal'nymi prepyatstviyami na klasse kusochno-lomanykh traektoriy [Path planning algorithm in a two-dimensional environment with polygonal obstacles on a class of piecewise-broken trajectories], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences]*, 2023, No. 5 (235), pp. 34-48.
13. Ferguson D., Stentz A. Using interpolation to improve path planning: The field D\* algorithm, *J. of Field Robotics*, 2006, Vol. 23, No. 2, pp. 79-101. DOI: 10.1002/rob.20109.
14. Daniel K., Nash A., Koenig S., Felner A. Theta\*. Any-angle path planning on grids, *J. of Artificial Intelligence Research*, 2010, Vol. 39, p. 533-579. DOI: 10.1613/jair.2994.
15. Guibas L.J., Knuth D.E., Sharir M. Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams, *Algorithmica*, 1992, 7 (1), pp. 381-413.
16. Morozova N.S. Virtual'nye formatsii i virtual'nye lidery v zadache o dvizhenii stroem gruppy robotov [Virtual formations and virtual leaders in the problem of the motion of a group of robots in formation], *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Protssy upravleniya [Bulletin of St. Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]*, 2015, No. 1, pp. 135-149.
17. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]. Moscow-Leningrad: Gos. izd-vo fiz.-mat. literatury, 1962, 708 p.
18. Kostjukov V.A., Medvedev M.Yu., Pshikhopov V.Kh. Algoritmy planirovaniya sglazhennykh individual'nykh traektoriy dvizheniya nazemnykh robotov [Algorithms for planning smoothed individual trajectories of ground robots], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie [Mechatronics, Automation, Control]*, 2022, Vol. 23, No. 11, pp. 585-595.

19. Kostyukov V.A., Medvedev M.Yu., Pshikhopov V.Kh. Planirovanie dvizheniya nazemnykh robotov v srede s prepyatstviyami: algoritmy postroeniya traektoriy v gruppe pri zadannom shablone [Motion planning of ground robots in an environment with obstacles: algorithms for constructing trajectories in a group for a given template], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2023, No. 01.
20. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu. Detsentralizovannoe upravlenie gruppoy odnorodnykh podvizhnykh ob"ektov v dvumernoy srede s prepyatstviyami [Decentralized control of a group of homogeneous moving objects in a two-dimensional environment with obstacles], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2016, Vol. 17 (5), pp. 346-353.

**Костюков Владимир Александрович** – НКБ «РиСУ»; e-mail: wkost-einheit@yandex.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: 88634371694; к.т.н.; с.н.с.

**Kostyukov Vladimir Aleksandrovich** – Joint-Stock Company "Robotics and Control Systems"; e-mail: wkost-einheit@yandex.ru; Taganrog, Russia; phone: 88634371694; cand. of eng. sc.; senior researcher.

УДК 65.012.2

DOI 10.18522/2311-3103-2025-4-102-110

**А.А. Богнюков, Д.Ю. Зорькин, И.А. Тарасова**

### **ПРИМЕНЕНИЕ ИНСТРУМЕНТОВ ПРОЕКТНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ: ДИАГРАММА ГАНТА И СЕТЕВОЙ ГРАФИК**

*Разработана интегративная модель, синтезирующая методы календарного планирования с функционалом ПО (Excel, MS Project) для многоуровневой оптимизации проектов. Центральное внимание уделяется трем взаимодополняющим методикам: диаграмме Ганта, сетевому графику и анализу критического пути, формирующим концептуальную основу эффективной координации проектных процессов. Исследование детализирует алгоритм создания диаграммы Ганта, визуализирующей временные рамки и последовательность задач, с акцентом на функциональные возможности специализированных программных решений, включая Microsoft Project и Excel, обеспечивающих автоматизацию построения и корректировки графиков. Раскрывается принцип конструирования сетевого графика, интерпретируемого как ориентированный граф с ребрами (работами) и вершинами (событиями). Данный подход позволяет идентифицировать логические зависимости между этапами проекта и выявить критический путь – последовательность операций с нулевым временным резервом, определяющую минимальную продолжительность проекта. Практическая иллюстрация расчета критического пути подкрепляется примерами, демонстрирующими его роль в оптимизации временных ресурсов. Важным аспектом исследования становится анализ резервов времени, направленный на минимизацию рисков срыва сроков через рациональное перераспределение ресурсов. Методологический аппарат дополняется инструментами визуализации: графиками потребности и диаграммами загрузки ресурсов, обеспечивающими оперативный контроль над материальными и кадровыми активами на всех фазах проекта. Финальным элементом системы планирования выступает календарный план, структурирующий данные о наименованиях работ, их хронологических интервалах и ресурсоемкости. Этот документ служит интеграционной основой для синхронизации операционной деятельности, гарантирующей соблюдение установленных сроков. Практическая ценность исследования заключается в адаптации теоретических принципов проектного менеджмента к реальным условиям: представленные кейсы и методики могут быть имплементированы в деятельность управленческих команд, экономистов и отраслевых специалистов для повышения эффективности реализации комплексных проектов в мультидисциплинарных контекстах.*

*Проектное планирование; диаграмма Ганта; сетевой график; критический путь; анализ резервов времени; календарный план; управление ресурсами; график загрузки ресурсов; оптимизация проекта; временные ограничения; последовательность работ; визуализация проекта; эффективность управления; распределение ресурсов; сроки выполнения задач.*

**A.A. Bognyukov, D.Yu. Zorkin, I.A. Tarasova**

### **USING PROJECT PLANNING TOOLS: GANTT CHART AND NETWORK DIAGRAM**

*An integrative model has been developed that combines calendar planning methods with software functionality (Excel, MS Project) for multi-level project optimization. Central focus is placed on three complementary methodologies: the Gantt chart, network diagram, and critical path analysis, which form the conceptual foundation for effective coordination of project processes. The study details the algorithm*