УДК 004.424.2 DOI 10.18522/2311-3103-2021-7-198-206

М.Д. Чекина

МОДИФИКАЦИЯ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ЯКОБИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СУПЕРДИФФУЗИИ РАДОНА НА РЕКОНФИГУРИРУЕМЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

При исследовании природных объектов часто возникает проблема моделирования сложных систем, обладающих структурой, не поддающейся описанию посредством инструментов евклидовой геометрии, поэтому для их представления используют фрактальную геометрию и соответствующей ей математический аппарат. Так модель переноса радона в неоднородной среде, использующая супердиффузию, отображает реальные данные точнее классической. Повышение концентрации радона в воздухе является одним из признаков приближающихся землетрясений, что обусловливает необходимость моделирования распространения этого радиоактивного инертного газа в реальном времени. Реконфигурируемые вычислительные системы обладают большим потенциалом для решения задач в реальном времени, но существующие на данных момент средства решения систем линейных алгебраических уравнений имеют низкую эффективность из-за нерегулярной структуры матриц, полученных при дискретизации модели супердиффузии радона с применением адаптивных сеток. Базовый подграф метода Якоби преобразуется следующим образом: входные данные векторизуются, структура кадра, в котором производится вычисление значения одного неизвестного, разделяется на несколько микрокадров, распараллеливая вычисления в первом микрокадре, где производится сумма произведений коэффициентов матрицы и значений неизвестных с предыдущей итерации. Полученные результаты буферизируются для последующей выдачи на второй микрокадр, где происходит окончательная обработка и выдача результата итерации. Описанные подход позволяет сократить простой оборудования при решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными нерегулярными матрицами, и дает выигрыш по скорости в 5–15 раз по сравнению с существующими методами решения СЛАУ на реконфигурируемых вычислительных системах.

Фракталы; супердиффузия; процесс переноса радона; ПЛИС; реконфигурируемые вычислительные системы.

M.D. Chekina

MODIFICATION OF THE IMPLEMENTATION OF THE JACOBI METHOD IN SIMULATING SUPERDIFFUSION OF RADON ON RECONFIGURABLE COMPUTER SYSTEMS

When studying natural objects, the problem of modeling complex systems with a structure that cannot be described by means of Euclidean geometry tools often arises, therefore, fractal geometry and the corresponding mathematical apparatus are used to represent them. So the model of radon transport in an inhomogeneous medium, using superdiffusion, displays real data more accurately than the classical one. An increase in the concentration of radon in the air is one of the signs of an approaching earthquake, which makes it necessary to simulate the propagation of this radioactive inert gas in real time. Reconfigurable computing systems have great potential for solving problems in real time, but the currently existing means for solving systems of linear equations have low efficiency due to the irregular structure of matrices obtained by discretizing the radon superdiffusion model using adaptive grids. The basic subgraph of the Jacobi method is transformed as follows: the input data is vectorized, the structure of the frame in which the value of one unknown is calculated is divided into several microframes, parallelizing the calculations in the first microframe, where the sum of the products of the matrix coefficients and the values of the unknowns from the previous iteration is performed. The results obtained are buffered for subsequent delivery to the second microframe, where the final processing and output of the iteration result takes place. The described approach allows to reduce equipment downtime when solving a system of linear equations with sparse irregular matrices, and gives a speed gain by 5–15 times in comparison with existing methods for solving linear system on reconfigurable computing systems.

Fractals; superdiffusion; radon transport; FPGA; reconfigurable computing systems.

Введение. В настоящее время широкое применение в различных областях науки и техники получили фрактальные алгоритмы. При помощи фрактальных алгоритмов решают такие актуальные задачи, как анализ финансовых рынков, фрактальное сжатие изображений, моделирование пористых веществ, фильтрации жидкостей и природных объектов, обладающих сложной геометрией. На основе фрактальных алгоритмов создаётся компьютерная графика для кино и компьютерных игр.

При всей своей эффективности и предсказательной точности фрактальные алгоритмы зачастую обладают большой вычислительной сложностью и требуют высокой производительности от вычислительной системы.

В точных и естественных науках часто возникают задачи, требующие для своего решения моделирования сложных систем различного характера. Для их описания не хватает инструментария, представляемого евклидовой геометрией, где любая даже самая сложная линия или поверхность при некотором приближении может быть заменена отрезком прямой. Применение фракталов позволяет моделировать сложные структуры неупорядоченных сред и протекающие в них процессы. Примерами неупорядоченных сред являются пористые тела. При этом фракталами могут быть поровое пространство, скелет породы, поверхность скелета породы и т.д.

Экспериментально показано, что модель переноса радона в неоднородной среде, использующая супердиффузию, а не классическую, наиболее точно отражает реальные данные [1]. Повышение концентрации радона в воздухе из-за сейсмической активности земной коры является одним из признаков приближающихся землетрясений. Этот параметр учитывается в системах оценки сейсмической опасности, которые используются для управления системами раннего предупреждения о землетрясения. Данный инертный газ является радиоактивным и опасен для человека. В связи с этим критическую важность имеет точность и скорость моделирования распространения радона. Поэтому возникает необходимость создания эффективной параллельной реализации для решения задачи в реальном времени.

Реконфигурируемые вычислительные системы (РВС), состоящие из множества программируемых логических интегральных схем (ПЛИС), работающих в качестве единого ресурса, обладают большим потенциалом для моделирования процесса распространения радона в реальном времени. На данный момент разработаны способы реализации на РВС методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для ленточных матриц, которые наиболее часто возникают в задачах математической физики, но они показывают небольшую эффективность для разреженных матриц с нерегулярной структурой, из-за специфики распределения значимых элементов в которых, возникают большие простои оборудования.

Математическая модель переноса радона. Аномальная диффузия описывает процессы переноса на стационарных процессах, характеризующиеся нестационарным распределением частиц в пространстве, где квадрат расстояния r, которое прошла частица за время t, пропорционален $r^2 \sim Dt^{\chi}$, где $\chi = 1$ для классической диффузии и $\chi \neq 1$ – для аномальной. Если параметр χ больше единицы, то такой случай называют супердиффузией (ускоренное блуждание случайных частиц), при χ меньше единицы говорят о субдиффузии (замедленное блуждание частиц). Для описания этого явления используется дифференциальное уравнение дробного порядка, при этом порядок дробной производной связан с размерностью фрактала. К процессам супердиффузии относится перенос техногенных и естественных радионуклидов, миграция природного газа по трещинам в горных породах и другие фрактальные процессы. Обычно такие процессы описываются дробными производными по пространственным координатам. К процессам субдиффузии относится перколяция, диффузия в дефектных средах с временным удержанием, диффузия в пористых средах с прилипанием и др. Субдиффузия обычно описывается уравнениями с дробными степенями по времени.

Математический аппарат модели переноса радона во фрактальной пористой среде выглядит следующим образом [2]:

$$u_t' = C \cdot D^{\chi}_{[0;x]} u + C \cdot D^{\chi}_{[0;y]} u - \lambda u + Q \cdot$$

Здесь C – коэффициент диффузии радона в грунте; Q – объемный источник радона, численно равный концентрации радона, образующегося в единицу времени в единице объема пористой среды на заданной глубине; u – поровая активность радона в единицу объема порового пространства; η – пористость среды; λ – постоянная распада радона. Дробный дифференциальный оператор соответствует правилу:

$$D^{\chi}_{[0;x]} u(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\chi)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\chi-1}}, \; 1 < \chi < 2 \cdot$$

В настоящее время способ решения задач супердиффузии на равномерных сетках в значительной степени утратил свою актуальность [3,4]. Для максимально точного описания геометрии сложных областей повсеместно применяются технологии адаптации расчетной сетки. Двумерную адаптивную сетку удобно хранить в виде четверичного дерева, где вычисления производятся в листовых ячейках дерева [5]. Для каждой расчетной области строится своя адаптивная сетка, поэтому в каждом новом случае вид СЛАУ будет уникален (рис. 1).

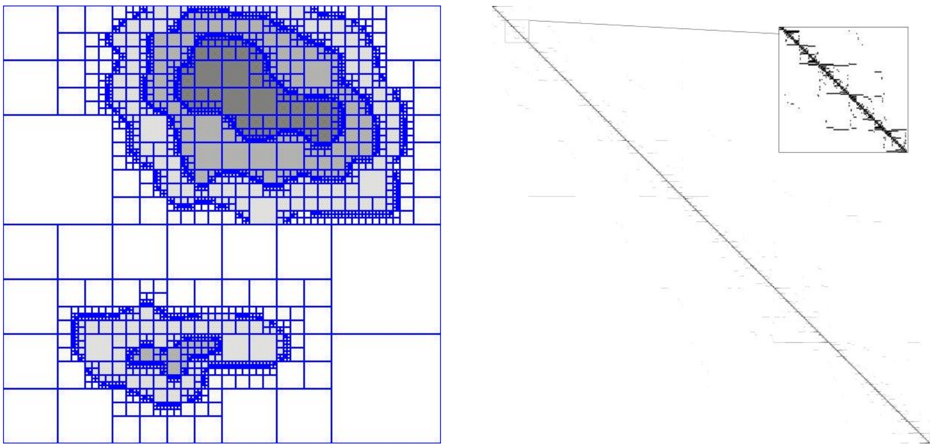

Рис. 1. Полученная для расчетной области адаптивная сетка и вид СЛАУ ей соответствующий

Реализация метода Якоби на РВС с учетом особенностей задачи. Задачи математической физики, требующие решения СЛАУ, имеющих пять диагоналей со значимыми коэффициентами, успешно решаются на РВС посредством метода Якоби, который возможно распараллелить как по итерациям, так и по слоям. В этом случае значения вектора неизвестных вычисляются по формуле:

$$x_{ij}^{k+1} = \frac{1}{a_{ij}} \left(b_i - \left(a_{i-1j} x_{i-1j}^k + a_{i+1j} x_{i+1j}^k + a_{ij-1} x_{ij-1}^k + a_{ij+1} x_{ij+1}^k \right) \right) \cdot \quad (1)$$

Таким образом, для поиска неизвестного на новом итерационном слое необходимы значения четырёх элементов вектора *x* из предыдущей итерации.

Параллельное вычисление неизвестных по формуле (1) можно представить в виде информационного графа, показанного на рис. 2.

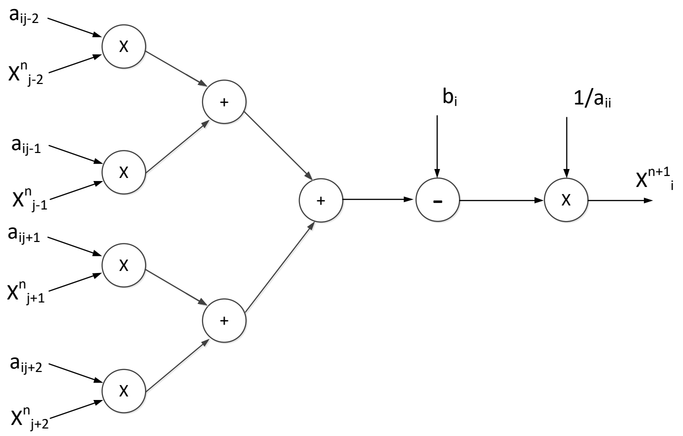

Рис. 2. Параллельная форма одной итерации метода Якоби для пятидиагональной СЛАУ

Показанную выше структуру можно минимизировать посредством редукции числа входных каналов, после чего структуру, показанную на рис. 3.

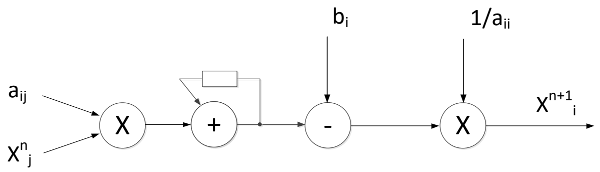

Рис. 3. Базовый подграф метода Якоби, редуцированный по каналам

Для одновременного вычисления нескольких ступеней метода Якоби можно применить распараллеливание по итерациям, последовательно соединяя несколько базовых подграфов (рис. 4). На каждой итерации на вход ступени поступает поток операндов a_{ij} и x_j^k, вычисленные на предыдущей ступени. Выходными данными ступени являются новые значения x_j^{k+1}, которые в свою очередь подаются на следующую итерацию.

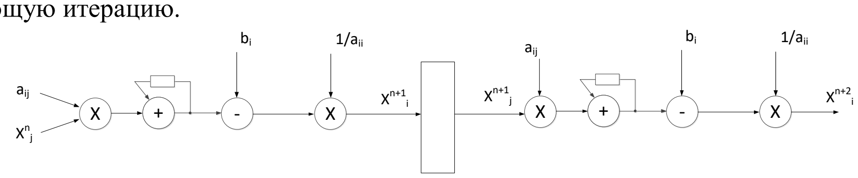

Рис. 4. Распараллеливание по итерациям

Задержка между выходом x_j^k и x_j^{k+1} с рядом стоящих ступеней составит два такта, что наглядно показывает временная диаграмма, представленная на рис. 5.

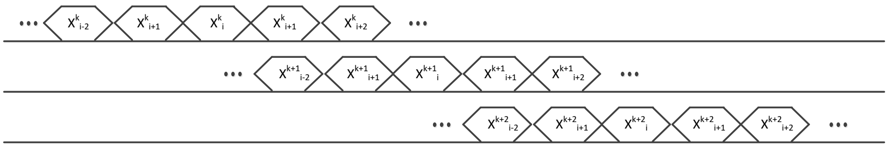

Рис. 5. Временная диаграмма появления выходных данных трех ступеней метода Якоби

Подобный подход был реализован в работе [6], но он становится малоэффективным, если СЛАУ содержит матрицу с нерегулярной структурой, как в случае дискретизации математической модели, описывающей супердиффузию газа, на адаптивных сетках. Специфика распределения ненулевых элементов в матрице полученной СЛАУ такова, что решения ее на реконфигурируемых вычислительных системах известными методами не эффективны и ведут к чрезмерным расходам оборудования [7]. Например, количество диагоналей, содержащих значимые элементы может приближаться к количеству строк в матрице. При этом только пять центральных диагоналей плотно заполнены коэффициентами и содержат 70–95 % всех ненулевых элементов матрицы. Если для решения подобной СЛАУ применить метод Якоби, ориентированный на специфику ленточных матриц, то большую часть времени вычисления будут производиться над нулевыми элементами, что фактически означает простой оборудования. Этот случай проиллюстрирован временной диаграммой на рис. 6. Таким образом, возникает необходимость создания эффективных методов и средств для решения СЛАУ, содержащих матрицы подобного типа.

Если применить описанный выше подход для нерегулярной матрицы, имеющей структуру, показанную на рис. 1, то в предельном случае для начала вычислений в новой ступени необходимо будет вычисление всех значений x_j^{k+1} на предыдущей ступени. Этот случай показан на временной диаграмме (рис. 7)

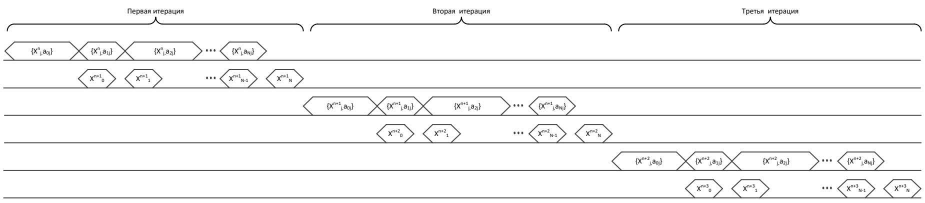

Рис. 7. Временная диаграмма работы трех итераций метода Якоби при обработке матрицы с нерегулярной структурой

Исходя из выше сказанного требуется модификация реализации метода Якоби с учетом специфики задачи. Современные ПЛИС обладают значительным вычислительным ресурсом, но очень сильно ограничены по числу входных каналов. В связи с этим целью модификации реализации метода Якоби становится достижение наиболее плотного потока данных при максимальном использовании вычислительного ресурса ПЛИС.

При решении СЛАУ, полученных в ходе дискретизации задачи супердиффузии на адаптивных сетках, возникают следующие проблемы: нерегулярное количество значимых элементов в строке и большой их разброс относительно главной диагонали. Первая приводит к неопределенному времени работы одной ступени, а вторая ведет к большим задержкам между окончанием вычисления x_j^k и началом вычисления x_j^{k+1}. Временная диаграмма на рисунке 8 показывает, как разница во времени появления приближенных значений неизвестных на каждом итерационном слое зависит от количества значимых элементов в этой строке. При полностью параллельных вычислениях в каждой строке начало вычислений на следующей итераций будет совпадать с окончанием обработки строки, содержащей наибольшее количество значимых элементов.

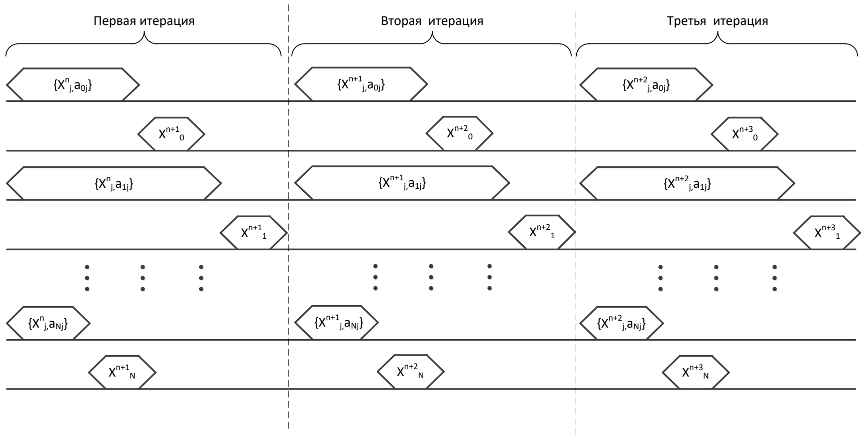

Рис. 8. Временная диаграмма трех итераций метода Якоби для параллельно обрабатываемых строк

При последовательной обработке строк СЛАУ граф вычислительной структуры будет иметь структуру аналогичную структуре метода Якоби для ленточных матриц (рис. 4), но временная диаграмма появления результатов работы ступеней будет иметь нерегулярную структуру.

Для решения СЛАУ, полученных при дискретизации на адаптивных сетках, предлагается преобразовать базовый подграф метода Якоби следующим образом: векторизовать входные данные и разделить кадр, вычисляющий одно значение неизвестного, на несколько микрокадров, распараллеливая вычисления в первом микрокадре, где производится сумма произведений коэффициентов матрицы и значений неизвестных с предыдущей итерации. Операция подсуммирования произведений вынесена «за скобки» кадра и выполняется параллельно для нескольких строк СЛАУ (рис. 9). Каждый из пришедших результатов сопровождается номером строки, который впоследствии управляет выдачей значений b_i и $1/a_{ii}$ из блоков RAM, для корректного вычисления значений вектора неизвестных.

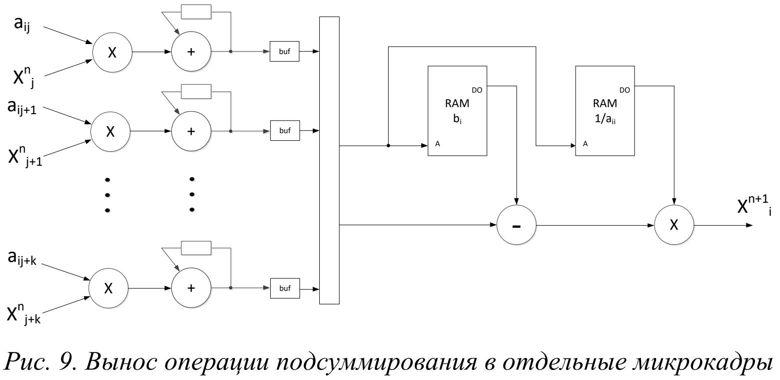

Рис. 9. Вынос операции подсуммирования в отдельные микрокадры

Такой поход позволит сократить затраты оборудования при решении СЛАУ с разряженной матрицей.

Теоретическую оценку эффективности предлагаемого подхода в сравнении с применением методов решения СЛАУ для ленточных матриц можно выполнить по следующей формуле:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{N\left(N_0 l_s+l\right)}{N\left(N_{cp} l_s+l\right)}\approx\frac{N_0}{N_{cp}}.$$

Здесь T_1 – время обработки СЛАУ, дополненной до ленточной; T_2 – время обработки СЛАУ с матрицей специального вида; N – количество строк в матрице; N_0 – максимальная ширина строки; $N_{ср}$ – средняя ширина строки; l_s – латентность сумматора с накоплением; l – латентность прочих вычислительных элементов в кадре.

В зависимости от средней ширины строки достигается выигрыш по скорости в 5–15 раз по сравнению с применением методов решения для ленточных матриц.

Заключение. Описанный подход позволяет получать параллельно-конвейерные программы для РВС различных конфигураций, обеспечивающие снижение простоя оборудования и повышение удельной производительности вычислительной системы, увеличение скорости вычислений для разреженных матриц с нерегулярной структурой, возникающих при решении задачи супердиффузии по сравнению с существующими реализациями [6–8].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Паровик Р.И.* Модель нестационарной диффузии-адвекции радона системе грунт-атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2010. – Вып. 1 (1). – С. 39-45.
2. *Паровик Р.И., Шевцов Б.М.* Процессы переноса радона в средах с фрактальной структурой // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 8. – С. 30-36.
3. *Terekhov K.M., Vassilevski Yu.V.* Two-phase water flooding simulations on dynamic adaptive octree grids with two-point nonlinear fluxes // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 28, No. 3. – P. 267-288.
4. *Афендиков А.Л., Меньшов И.С., Меркулов К.Д., Павлухин П.В.* Метод адаптивных декартовых сеток для решения задач газовой динамики. – М.: Российская академия наук, 2017. – 63 с.
5. *Сухинов А.А.* Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 1. – С. 86-98.
6. *Левин И.И., Дордопуло А.И., Пелипец А.В.* Реализация итерационных методов решения систем линейных уравнений в задачах математической физики на реконфигурируемых вычислительных системах // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2016. – Т. 5, № 4. – С. 5-18. – DOI: 10.14529/cmse160401.
7. *Пелипец А.В.* Распараллеливание итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений на реконфигурируемых вычислительных системах // Суперкомпьютерные технологии (СКТ-2016): Матер. 4-й Всероссийской научно-технической конференции. – 2016. – С. 194-198.
8. *Левин И.И., Пелипец А.В.* Эффективная реализация распараллеливания на реконфигурируемых системах // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2018. – № 8. – С. 11-16.
9. *Левин И.И., Дордопуло А.И., Сорокин Д.А., Каляев З.В., Доронченко Ю.И.* Реконфигурируемые компьютеры на основе плис Xilinx Virtex Ultrascale // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2019): Короткие статьи и описания плакатов XIII Международной научной конференции. – 2019. – С. 288-298.
10. *Дордопуло А.И., Левин И.И.* Методы редукции вычислений для программирования гибридных реконфигурируемых вычислительных систем // XII мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2019): Матер. XII мультиконференции: в 4 т. – 2019. – С. 78-82.

11. *Левин И.И., Пелипец А.В., Сорокин Д.А.* Решение задачи LU-декомпозиции на реконфигурируемых вычислительных системах: оценка и перспективы // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 7 (168). – С. 62-70.
12. *Гузик В.Ф., Каляев И.А., Левин И.И.* Реконфигурируемые вычислительные системы / под общ. ред. И.А. Каляева. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – 472 с.
13. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
14. *Kalyaev I.A., Levin I.I., Semernikov E.A., Shmoilov V.I.* Reconfigurable multipipeline computing structures. – New York: Nova Science Publishers, 2012. – 330 p.
15. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. - 656 с.
16. *Касаркин А.В.* Метод решения графовых NP-полных задач на реконфигурируемых вычислительных системах на основе принципа распараллеливания по итерациям // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2020. – № 7 (217). – С. 121-129.
17. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
18. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – М.: Наука, 2006. – 173 с.
19. *Zaslavsky G.M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. – 2002. – Vol. 371. – P. 461-580.
20. *Крылов С.С., Бобров Н.Ю.* Фракталы в геофизике. – СПб.: Изд-во С-Пб. университета, 2004. – 138 с.

REFERENCES

1. *Parovik R.I.* Model' nestatsionarnoy diffuzii-advektsii radona sisteme grunt-atmosfera [Model of unsteady diffusion-advection of radon in the soil-atmosphere system], *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki* [Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences], 2010, Issue 1 (1), pp. 39-45.
2. *Parovik R.I., Shevtsov B.M.* Protsessy perenosa radona v sredakh s fraktal'noy strukturoy [Radon transfer processes in media with fractal structure], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2009, Vol. 21, No. 8, pp. 30-36.
3. *Terekhov K.M., Vassilevski Yu.V.* Two-phase water flooding simulations on dynamic adaptive octree grids with two-point nonlinear fluxes, *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2013, Vol. 28, No. 3, pp. 267-288.
4. *Afendikov A.L., Men'shov I.S., Merkulov K.D., Pavlukhin P.V.* Metod adaptivnykh dekartovykh setok dlya resheniya zadach gazovoy dinamiki [The method of adaptive cartesian grids for solving problems of gas dynamics]. Moscow: Rossiyskaya akademiya nauk, 2017, 63 p.
5. *Sukhinov A.A.* Postroenie dekartovykh setok s dinamicheskoy adaptatsiey k resheniyu [Construction of Cartesian grids with dynamic adaptation to the solution], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2010, Vol. 22, No. 1, pp. 86-98.
6. *Levin I.I., Dordopulo A.I., Pelipets A.V.* Realizatsiya iteratsionnykh metodov resheniya sistem lineynykh uravneniy v zadachakh matematicheskoy fiziki na rekonfiguriruemykh vychislitel'nykh sistemakh [Implementation of iterative methods for solving systems of linear equations in problems of mathematical physics on reconfigurable computing systems], *Vestnik YuUrGU. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika* [Bulletin of SUSU. Series: Computational Mathematics and Computer Science], 2016, Vol. 5, No. 4, pp. 5-18. DOI: 10.14529/cmse160401.
7. *Pelipets A.V.* Rasparallelivanie iteratsionnykh metodov resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy na rekonfiguriruemykh vychislitel'nykh sistemakh [Parallelization of iterative methods for solving systems of linear algebraic equations on reconfigurable computing systems], *Super-komp'yuternye tekhnologii (SKT-2016): Mater. 4-y Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Super-computer Technologies (SKT-2016): Materials of the 4th All-Russian Scientific and Technical Conference], 2016, pp. 194-198.
8. *Levin I.I., Pelipets A.V.* Effektivnaya realizatsiya rasparallelivaniya na rekonfiguriruemykh sistemakh [Effective implementation of parallelization on reconfigurable systems], *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Bulletin of Computer and Information Technologies], 2018, No. 8, pp. 11-16.

9. *Levin I.I., Dordopulo A.I., Sorokin D.A., Kalyaev Z.V., Doronchenko Yu.I.* Rekonfiguriruemye komp'yutery na osnove plis Xilinx Virtex Ultrascale [Reconfigurable computers based on FPGA Xilinx Virtex Ultrascale], *Parallel'nye vychisli-tel'nye tekhnologii (PaVT'2019): Korotkie stat'i i opisaniya plakatov XIII Mezhduna-rodnoy nauchnoy konferentsii* [Parallel Computing Technologies (PaVT'2019): Short articles and poster descriptions of the XIII International Scientific Conference], 2019, pp. 288-298.
10. *Dordopulo A.I., Levin I.I.* Metody reduktsii vychisleniy dlya programmirovaniya gibridnykh rekonfiguriruemykh vychislitel'nykh sistem [Methods of reduction of calculations for programming hybrid reconfigurable computing systems], *XII mul'tikonferentsiya po problemam upravleniya (MKPU-2019): Mater. XII mul'tikonferentsii* [XII Multi-conference on management problems (MCPU-2019): Materials of the multi-conference]: in 4 vol., 2019, pp. 78-82.
11. *Levin I.I., Pelipets A.V., Sorokin D.A.* Reshenie zadachi LU-dekompozitsii na rekonfiguriruemykh vychislitel'nykh sistemakh: otsenka i perspektivy [Solving the LU-decomposition problem on reconfigurable computing systems: assessment and prospects], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 7 (168), pp. 62-70.
12. *Guzik V.F., Kalyaev I.A., Levin I.I.* Rekonfiguriruemye vychislitel'nye sistemy [Reconfigurable computing systems], under the general ed. of. I.A. Kalyaeva. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2016, 472 p.
13. *Samarskiy A.A., Nikolaev E.S.* Metody resheniya setochnykh uravneniy [Methods for solving grid equations]. Moscow: Nauka, 1978, 592 p.
14. *Kalyaev I.A., Levin I.I., Semernikov E.A., Shmoilov V.I.* Reconfigurable multipipeline computing structures. New York: Nova Science Publishers, 2012, 330 p.
15. *Mandel'brot B.* Fraktal'naya geometriya prirody [Fractal geometry of nature]. Moscow: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2002, 656 p.
16. *Kasarkin A.V.* Metod resheniya grafovykh NP-polnykh zadach na rekonfiguriruemykh vychislitel'nykh sistemakh na osnove printsipa rasparallelivaniya po iteratsiyam [A method for solving graph NP-complete problems on reconfigurable numerical systems based on the principle of parallelization by iterations], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2020, No. 7 (217), pp. 121-129.
17. *Nakhushev A.M.* Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p.
18. *Nakhusheva V.A.* Differentsial'nye uravneniya matematicheskikh modeley nelokal'nykh protsessov [Differential equations of mathematical models of nonlocal processes]. Moscow: Nauka, 2006, 173 p.
19. *Zaslavsky G.M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport, *Physics Reports,* 2002, Vol. 371, pp. 461-580.
20. *Krylov S.S., Bobrov N.Yu.* Fraktaly v geofizike [Fractals in geophysics]. Saint Petersburg: Izd-vo S-Pb. universiteta, 2004, 138 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. Э.В. Мельник.

Чекина Мария Дмитриевна – Южный федеральный университет; e-mail: chekina@superevm.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79281541526; кафедра ИМС; аспирант.

Chekina Marija Dmitrievna – Southern Federal University; e-mail: chekina @superevm.ru; Taganrog, Russia; phone: +79281541526; graduate student.