

Раздел V. Моделирование и управление рисками

УДК 004.8

DOI 10.18522/2311-3103-2025-3-224-233

А.Н. Целых, В.С. Васильев, Л.А. Целых, Е.С. Подоплелова

ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ НАБЛЮДАЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Построение оптимального управления при полном отсутствии данных о динамике системы является актуальной проблемой. В данной статье предлагается решение линейной квадратичной задачи (ЛК) с конечным горизонтом для инвариантной ко времени системы с матрицей динамики графа. В отличие от задачи регулирования, устойчивость и полная управляемость системы не предполагаются. Построение траектории управления контролируется направлением нарастания изменения состояния переменных за малое число шагов, которое определяется условным главным собственным вектором матрицы смежности графовой модели. Решение классического оптимального управления осуществляется в автономном режиме и требует полного знания динамики системы. В условиях отсутствия полного знания динамики системы решение задач оптимального управления системами с неопределенностью, в том числе дискретными линейными системами, вызывают значительный интерес в последние годы. Основным подходом, когда полная информация о системе недоступна, является дизайн оптимального управления, при котором первоначально определяются параметры системы, а затем решается алгебраическое уравнение в двойственном пространстве. Важным отличием от стандартной задачи дискретного управления является то, что модель управления была модифицирована для оценки изменений состояния переменных при управлениях, передаваемых через матрицу динамики. Предложенный алгоритм с использованием графовой матрицы реализует рекуррентные вычисления динамических и сопряженных уравнений, а также метод Пауэлла для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Авторами введена новая интерпретация математической конструкции матрицы динамики системы в стандартной задаче дискретного управления на конечном интервале времени, которая может быть использована для проектирования любой управляемой динамической системы с ненаблюдаемыми параметрами.

Стационарная дискретная система; квадратичная функция стоимости; линейная квадратичная задача; графовая матрица динамики.

A.N. Tselykh, V.S. Vasilev, L.A. Tselykh, E.S. Podoplelova

CONSTRUCTION OF AN OPTIMAL CONTROL TRAJECTORY IN AN INTELLIGENT SYSTEM IN THE ABSENCE OF OBSERVABLE VARIABLES

Constructing optimal control in the complete absence of data on the system dynamics is a pressing problem. In this paper, we propose a solution to a finite-horizon linear quadratic problem (LCP) for a time-invariant system with a graph dynamics matrix. Unlike the control problem, stability and complete controllability of the system are not assumed. The construction of the control trajectory is controlled by the direction of increase in the change in the state of variables over a small number of steps, which is determined by the conditional principal eigenvector of the adjacency matrix of the graph model. The solution of classical optimal control is carried out in an autonomous mode and requires complete knowledge of the system dynamics. In the absence of complete knowledge of the system dynamics, solving optimal control problems for systems with uncertainty, including discrete linear systems, has attracted considerable interest in recent years. The main approach when complete information about the system is unavailable is the design of optimal control, in which the system parameters are initially determined, and then an algebraic equation in the dual space is solved. An important difference from the standard discrete control problem is that the control model was modified to estimate changes in the state of variables under controls transmit-

ted through the dynamics matrix. The proposed algorithm using a graph matrix implements recurrent calculations of dynamic and adjoint equations, as well as the Powell method for solving a system of linear algebraic equations (SLAE). The authors introduced a new interpretation of the mathematical construction of the system dynamics matrix in a standard discrete control problem on a finite time interval, which can be used to design any controlled dynamic system with unobservable parameters.

Stationary discrete system; quadratic cost function; linear quadratic problem; graph matrix of dynamics.

Введение. Моделирование динамических систем, как для целей управления, так и для прогнозирования их поведения, широко распространено в науке и технике. Математические формализмы для построения моделей различаются в зависимости от области применения, и различия между ними обусловлены свойствами класса динамических систем, характерных для различных областей.

В этой статье нас интересует исключительно класс неизменяющихся во времени линейных детерминированных динамических систем с дискретным временем и нестохастическими параметрами. Этот класс включает в себя многие задачи, представляющие интерес для таких областей, как логические и графовые модели в искусственном интеллекте (ИИ), процессы последовательного принятия решений в задачах исследования операций (ИО). Рассматривается задача оптимального косвенного управления в моделях сложных систем с ненаблюдаемыми непосредственно параметрами состояний переменных. Такие системы учитывают социальные, экономические, экологические, культурные, политические и технологические факторы и причинно-следственные связи между ними.

Предполагается, что закон поведения управляемого объекта задается матрицей смежности направленного взвешенного знакового графа, который представляет когнитивную причинную модель (КМ) управляемой системы. Системная эффективность узлов, связанная с динамикой модели, в наибольшей степени выражается спектральными свойствами матрицы графа. Здесь мы опираемся на работы [1–9], которые доказывают, что спектральные свойства графовых матриц содержат всю информацию о динамике системы. Как отмечалось в [2], спектральный анализ дает представление о структурных и семантических свойствах, в то время как ориентированные графы обеспечивают естественный формализм моделирования. Тогда, в отсутствие наблюдаемых и измеряемых параметров управляемого объекта в качестве входных и выходных параметров (конечных наблюдений) для косвенного управления могут выступать компоненты главного собственного вектора в спектральном разложении матрицы смежности направленного графа.

В данной статье мы решаем ЛК задачу оптимального управления с конечным горизонтом для дискретной линейной системы, не зависящей от времени, с графовой матрицей динамики, квадратичным критерием стоимости и векторным входом.

Построение оптимальных управляющих воздействий для динамических систем является широко изученной областью теории управления. Существуют два общих метода решения задач оптимального управления – метод Понтрягина и метод динамического программирования, которые соответственно определяют необходимые и достаточные условия оптимальности [10]. Решение классического оптимального управления осуществляется в автономном режиме и требует полного знания динамики системы. В условиях отсутствия полного знания динамики системы решение задач оптимального управления системами с неопределенностью, в том числе дискретными линейными системами, вызывают значительный интерес в последние годы [11]. Однако используемые подходы требуют наличия хотя бы неполного набора данных. Методы оптимального управления в условиях полного отсутствия данных о состоянии переменных ранее предложены не были.

В этом исследовании мы пытаемся восполнить этот пробел для построения оптимального управления в условиях полного отсутствия данных о динамике системы. Основным подходом, когда полная информация о системе недоступна, является дизайн оптимального управления, при котором первоначально определяются параметры системы, а затем решается алгебраическое уравнение в двойственном пространстве. При этом матрица динамики выражает закон поведения управляемого объекта с помощью матрицы смежности, а параметры системы определяются направлением главного собственного вектора матрицы динамики.

Здесь мы представляем новую интерпретацию математической конструкции матрицы системной динамики (A) в стандартной проблеме дискретного управления на конечном горизонте [12], которая может быть использована для описания любой управляемой динамической системы с ненаблюдаемыми параметрами. Учитывая дискретность задачи оптимизации, компоненты главного собственного вектора матрицы A интерпретируются, как приращение значения состояния переменных.

Входные значения принимаются, как неизвестные входные данные и определяются направлением главного собственного вектора матрицы динамики. Выходные значения определяются вектором оптимального изменения состояния, как воспроизводимого тренда для изменения состояний узлов модели управляемой системы с использованием метода МАЕС, представленного в [13]. Поскольку могут быть измерены только выходные значения управляемой системы, оптимальное управление с обратной связью невозможно, и функции затрат выражаются квадратичными функциями управления.

Целью управления является перевод объекта в предписанное интегральное изменение состояния с максимальным значением критерия качества. Решение задачи является квадратичной по управлению с интегральным ограничением на переменные состояния. Оптимальным решением является распределение квадратичной энергии управляющих воздействий по шагам управления.

В отличие от задачи регулирования устойчивость и полная управляемость системы не предполагаются. При этом интерес представляет направление прироста изменения состояния переменных на коротком горизонте и оптимальное управление, обеспечивающее это направление. Направление определяется условным главным собственным вектором модели, собственное число которого не предполагается находящимся в границах единичного спектрального радиуса.

Наконец, мы приводим необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных управлений. Теоремы доказывают стационарность функции Гамильтона в пространстве состояний и экстремальность функции Гамильтона в пространстве допустимых управлений для проблемы оптимального управления, то есть доказываются достаточность принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

Для задачи оптимального управления доказаны стационарность функции Гамильтона в пространстве состояний и ее экстремальность в пространстве допустимых управлений, т. е. достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (ПМП).

1. Описание метода. 1.1. Постановка задачи. В этом разделе мы представляем модель управления, которая касается дискретных нестационарных детерминированных задач динамической оптимизации на конечном горизонте. Задачи динамической оптимизации также известны как задачи оптимального управления.

В настоящем исследовании рассматривается модель управления для системы с ненаблюдаемыми переменными. Специфическим свойством рассматриваемой системы является то, что переменные состояния системы ненаблюдаемы и не могут быть непосредственно измерены. Поэтому для описания поведения системы мы будем использовать относительное изменение этого состояния. С учетом специфического свойства рассматриваемой системы, указанного выше, введем следующие обозначения.

Пусть исследуемая система описывается моделью, представленной конечным графом $G = \langle V, E \rangle$, где V – множество n вершин $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, $E \subset V \times V$ – множество дуг. Граф определяется матрицей смежности F^T , транспонированной к матрице $F = (f_{i,j})_{n \times n}$, где $f_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ есть веса на дугах матрицы.

Пусть изменение состояния переменных системы есть вектор \mathbf{z} и пусть это изменение состояния достигается последовательностью векторов изменений \mathbf{x}_k , $1 \leq k \leq m$ и записывается уравнением (1):

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_m, \quad (1)$$

где $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ есть n -мерный и ограниченный вектор изменения состояния переменных системы на конечном горизонте m ; \mathbb{R}^n есть n -мерное вещественное Евклидово пространство векторов $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n$ с нормой $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$; m есть натуральное число; далее m будет играть роль горизонта планирования или управления и будет фиксированным на всем протяжении. Число шагов предполагается малым $m \sim n$; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ есть последовательные изменения состояния переменных системы.

Эволюция системы определяется предыдущим вектором изменения состояния вершин (факторов) \mathbf{x}_k , $1 \leq k \leq m - 1$, передающим эти изменения в систему через матрицу динамики \mathbf{F} , и прошлым вектором управляющего воздействия \mathbf{u}_k , $0 \leq k \leq m - 1$. Будущий выход зависит от прошлого управления только через предыдущее состояние. Общее выходное изменение состояния суммирует эффект текущих управляющих воздействий на будущие результаты – подобно памяти системы.

Рассмотрим нашу задачу управления как стандартную проблему дискретного управления [12] с учетом введенных обозначений:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k, \quad 0 \leq k \leq m - 1, \quad (2)$$

где $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ есть вектор изменений в состояниях переменных системы на шаге k , $1 \leq k \leq m - 1$ and $k + 1$, $0 \leq k \leq m$, соответственно; $\mathbf{A}_k = \mathbf{A} = \delta \mathbf{F}$ есть матрица динамики, независимая от k ; $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq k \leq m - 1$ есть n -мерный и ограниченный вектор управляющего воздействия на переменные на шаге k на горизонте m , который необходимо спроектировать; $\mathbf{B}_k = \mathbf{I}$ есть константа, определенная как матрица управления; \mathbf{I} – единичная матрица.

Пусть начальное изменение состояния системы определяется только вектором \mathbf{u}_0 и пусть эволюция системы контролируется на горизонте m со значениями k , $1 \leq k \leq m - 1$. Запишем траекторию оптимального управления, обеспечивающую условие (1) ценой минимизации суммы квадратов Евклидовых норм управляющих воздействий, в виде:

$$\|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\mathbf{u}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{u}_{m-1}\|^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Тогда задача дискретного оптимального управления с учетом введенных обозначений определяется следующим образом (4):

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\mathbf{u}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{u}_{m-1}\|^2 \rightarrow \min, \quad (4)$$

при условии

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_{k+1} = \delta \mathbf{F} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k, \quad 0 \leq k \leq m - 1, \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5)$$

где $J(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ есть квадратичный целевой функционал стоимости оптимального управления на конечном горизонте; $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ есть начальный вектор изменения состояния переменных системы; \mathbf{u}_0 – начальный вектор управляющего воздействия; δ , $0 < \delta \leq 1$ – демпинг фактор для обозначения того факта, что мы ожидаем отклонения от номинала, ввиду субъективности оценки элементов матрицы смежности \mathbf{F}^T .

Целью оптимального управления является нахождение такой траектории изменения состояния \mathbf{z} и управления \mathbf{u} , при которых $J(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ минимизируется на конечном горизонте m . Полная управляемость и устойчивость не предполагается.

Траектория $\{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_k | 0 \leq k \leq m - 1\}$ называется *допустимой*, если \mathbf{x}_{k+1} и \mathbf{u}_k ограничены и измеримы на конечном горизонте m и выполнены все ограничения (5) задачи (4). Допустимая траектория называется оптимальной, если среди всех допустимых траекторий она доставляет наименьшее значение функционалу $J(\mathbf{u}, \mathbf{x})$.

Далее докажем теорему, дающую достаточные условия оптимальности ПМП в задаче (4)-(5). Необходимые условия оптимальности ПМП для общего случая доказаны в [14, 15].

1.2. Теорема

Теорема 1. Пусть имеется система управления

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \delta \mathbf{F} \mathbf{x}_k, \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

тогда существует единственное решение $\{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_k | 0 \leq k \leq m-1\}$ задачи

$$\|\mathbf{u}_0\|^2 + \|\mathbf{u}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{u}_{m-1}\|^2 \rightarrow \min,$$

при условии

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_m.$$

Доказательство. Запишем стандартную функцию Лагранжа [16] для задачи условной оптимизации (4)–(5):

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \|\mathbf{u}_k\|^2 + \mathbf{v}_1^T (\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_1) + \sum_{k=2}^m \mathbf{v}_k^T (\mathbf{u}_{k-1} + \delta \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k) - \mathbf{w}^T (\mathbf{z} - \sum_{k=1}^m \mathbf{x}_k) \rightarrow \max, \quad (6)$$

где вектор \mathbf{v}_k , $1 \leq k \leq m$ и вектор \mathbf{w} есть векторы множителей Лагранжа.

Необходимые условия максимума имеют следующий вид. Производные функции (6) по компонентам векторов \mathbf{x}_k , $1 \leq k \leq m$; \mathbf{u}_k , $0 \leq k \leq m-1$; и \mathbf{v}_k , $1 \leq k \leq m$ представляют рекуррентные последовательности:

$$\mathbf{w} - \mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{w} - \mathbf{v}_{m-1} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{v}_m = \mathbf{0}, \mathbf{w} - \mathbf{v}_m = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{v}_{m-1} - \mathbf{u}_{m-2} = \mathbf{0}, \mathbf{v}_m - \mathbf{u}_{m-1} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{F} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{u}_{m-1} + \delta \mathbf{F} \mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_m = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Уравнения (7) и (8) express выражает стационарность по состоянию и экстремальность по управлению ПМП, соответственно. Подставив (9) \mathbf{x} в (1), мы получим:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_m = \mathbf{u}_{m-1} + (\mathbf{I} + \delta \mathbf{F}) \mathbf{u}_{m-2} + (\mathbf{I} + \delta \mathbf{F} + (\delta \mathbf{F})^2) \mathbf{u}_{m-3} + \dots + (\mathbf{I} + \delta \mathbf{F} + (\delta \mathbf{F})^2 + \dots + (\delta \mathbf{F})^{m-1}) \mathbf{u}_0. \quad (10)$$

Подставляя (8) \mathbf{u} в (11), мы получим:

$$\mathbf{P}_m \mathbf{w} = \mathbf{z}, \quad (11)$$

где $\mathbf{P}_m = \mathbf{I} + (\mathbf{I} + \delta \mathbf{F})(\mathbf{I} + \delta \mathbf{F})^T + \dots + (\mathbf{I} + \delta \mathbf{F} + \dots + (\delta \mathbf{F})^{m-1})(\mathbf{I} + \delta \mathbf{F} + \dots + (\delta \mathbf{F})^{m-1})^T$.

Матрица \mathbf{P}_m является положительно определённой, поскольку $\mathbf{w}^T \mathbf{P}_m \mathbf{w} \geq \mathbf{w}^T \mathbf{w} > \mathbf{0}$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, уравнение (12) однозначно разрешимо относительно \mathbf{w} при любом \mathbf{z} . Далее, вектор \mathbf{u}_k , $m-1 \geq k \geq 0$ и вектор \mathbf{x}_k , $1 \leq k \leq m$ вычисляются, используя уравнения (7), (8), и (9), соответственно.

Таким образом, теорема 1 доказана.

1.3. Вычислительный алгоритм. Вычислительный алгоритм решения задачи (4)–(5) использует метод сопряженных направлений [17, 18] для решения СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей \mathbf{P} и сводится к трем-шаговым последовательным вычислениям матриц \mathbf{Q} и \mathbf{P} , векторов \mathbf{u}_k и векторов \mathbf{x}_k .

Запишем рекуррентную последовательность для вычисления матрицы \mathbf{P}_m :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}_k = \mathbf{I} + \delta \mathbf{F} \mathbf{Q}_{k-1}, \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^T, \quad 2 \leq k \leq m,$$

где n есть число вершин модели, \mathbf{Q}_k , $1 \leq k \leq m$ есть вспомогательные матрицы.

Вычислительная сложность матрицы \mathbf{P}_m is $O(mn^3)$ операций, поскольку вычисление матрицы \mathbf{P}_m требует n^3 операций для умножения двух матриц размерности $n \times n$ по этому полю и m дополнения для вычисления суммы произведений. Выход контролируется вектором изменения состояния с фиксированным концом \mathbf{z} на конечном горизонте m . Вектор \mathbf{z} вычисляется с использованием алгоритма МАЕС, представленного в [13]. Алгоритм МАЕС доступен для расчетов по адресу <https://github.com/Simon1093/cognition>. Выходные данные алгоритма представляют собой последовательность оптимальных управлений \mathbf{u}_k , $0 \leq k \leq m-1$ и последовательность изменений состояний \mathbf{x}_k , $1 \leq k \leq m$.

Алгоритм, использующий графовую матрицу динамики для решения линейной квадратичной задачи, обобщен в табл. 1. Алгоритм реализует рекуррентные вычисления уравнений динамики и сопряженных уравнений, а также метод сопряженных направлений для решения СЛАУ (12).

Таблица 1

Алгоритм, использующий графовую матрицу динамики

<p>Input: F, δ, z, m;</p> <p>$P \leftarrow I; Q \leftarrow I$;</p> <p>for $k = 2$ to m do</p> <p>$Q \leftarrow I + \delta F Q; P \leftarrow P + Q Q^T$;</p> <p>endfor;</p> <p>$w \leftarrow P^{-1} z$;</p> <p>$u_{m-1} \leftarrow w$;</p> <p>for $k = m - 2$ downto 0 do</p> <p>$u_k \leftarrow w + \delta F^T u_{k+1}$;</p> <p>endfor;</p> <p>$x_1 \leftarrow u_0$;</p> <p>for $k = 2$ to m do</p> <p>$x_k \leftarrow u_{k-1} + \delta F x_{k-1}$;</p> <p>endfor;</p> <p>Output: $u_k, 0 \leq k \leq m-1; x_k, 1 \leq k \leq m$.</p>

2. Результаты моделирования. В этом разделе для моделирования предлагаемого метода, в уравнении (2) используется графовая матрица смежности $A_k = A + \delta F$ (12), выражающая поведенческую модель системы «Преступление и наказание»:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Для моделирования оптимального управления предполагаются следующие исходные данные:

1. Матрица динамики $A_k = A + \delta F$ (12) of dimension $n = 7$.
2. Значение демпинг фактора определяется с учетом теоремы из [17, 18]. Резонансная граница есть $\frac{\delta_{resonance}=1}{\lambda_{max} \frac{1}{0.6024492}}$; тогда, $\delta=1.0$.
3. $m = 10$ есть горизонт управления.

Выходные значения управляются вектором изменения состояния z на конечном горизонте $m = 10$. был рассчитан с использованием алгоритма МАЕС, представленного в [13]. Алгоритм МАЕС доступен для расчета по адресу <https://github.com/Simon1093/cognition>. Вычисленные компоненты вектора z даны ниже:

$$z = (0.610844 \quad 0.317196 \quad 0.283766 \quad 0.250364 \quad 0.367809 \quad 0.137910 \quad 0.478274)^T.$$

Результаты моделирования с использованием предложенного алгоритма следующие.

Оптимальным решением является распределение квадратичной энергии (стоимости) управлений по шагам. Рис. 1,а показывает, что квадратичная энергия управления в последовательностях норм векторов управлений u_1 для разных горизонтов m резко уменьшается на последних шагах. Как показано на рис. 1,б, распределение значений норм векторов переменных отклика по шагам управления описывается полиномом второй степени, что характеризует динамику с равномерными приростами, положительными для одной ветви параболы и отрицательными для другой.

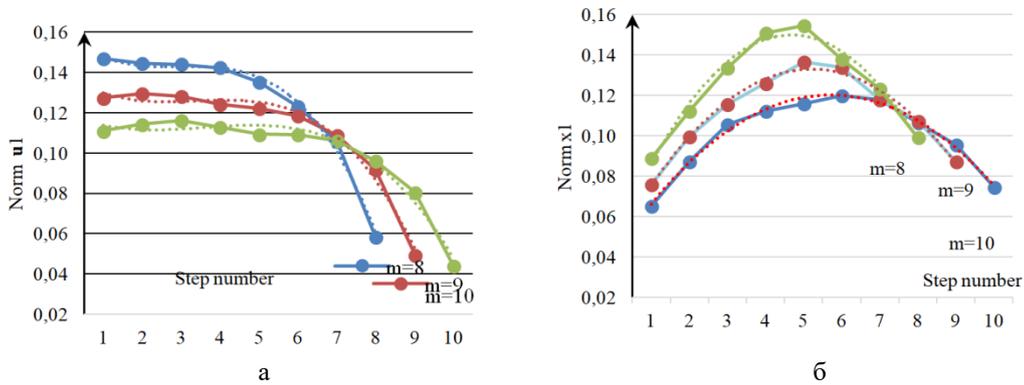


Рис. 1. Распределение нормы переменной управления u_1 (а) и нормы переменной отклика x_1 (б) на шагах управления m . Пояснение: линия тренда обозначена пунктиром; оптимальная траектория управления обозначена сплошной линией

Полученные последовательности управления оцениваются с использованием эффективности управления по базовому вектору управления (уравнение (15)) и эффективности управления по вектору отклика (уравнение (16)). Соответствующие определения приведены ниже.

Определение 1. Эффективность управления по базовому вектору управления (CE_b) – есть соотношение многоступенчатого и одноступенчатого управлений:

$$CE_b = \frac{\|u_0 + u_1 + \dots + u_{m-1}\|}{\|u_k\|}, 0 \leq k \leq m - 1, \tag{15}$$

где вектор $\|u_k\|$ есть базовый вектор одноступенчатого управления, а вектор $\|u_0 + u_1 + \dots + u_{m-1}\|$ есть оцениваемый вектор многоступенчатого управления.

Определение 2. Эффективность управления по вектору отклика (CE_r) – есть соотношение управление-отклик многоступенчатого управления:

$$CE_r = \frac{\|u_0 + u_1 + \dots + u_{m-1}\|}{\|x_0 + x_1 + \dots + x_m\|}, 0 \leq k \leq m, \tag{16}$$

где вектор $\|u_0 + u_1 + \dots + u_{m-1}\|$ есть – соответствующий вектор отклика, а вектор $\|x_0 + x_1 + \dots + x_m\|$ есть оцениваемый вектор управления.

Как показано на рис. 2, CE_b стремится к единице, что означает приближение последовательности векторов многоступенчатого управления к оптимальному вектору многоступенчатого управления с увеличения количества шагов управления. В то же время, соотношение управление – отклик стремится к значению CE_r для одноступенчатого управления рассматриваемой модели, $CE_r = 1/\sqrt{\|u_{k-1}\|/\|x_k\|} \rightarrow 1/\sqrt{5.003556} = 0,447055$.

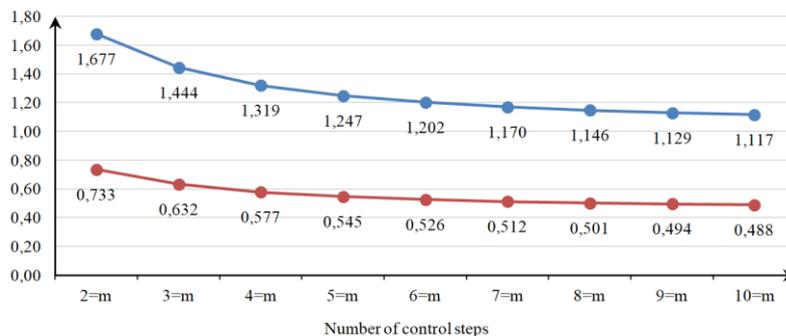


Рис. 2. Эффективность управления по базовому вектору управления и вектору отклика на шагах управления m

Траектории изменения состояний управляемой системы для разных горизонтов по предложенному алгоритму показаны на рис. 3.

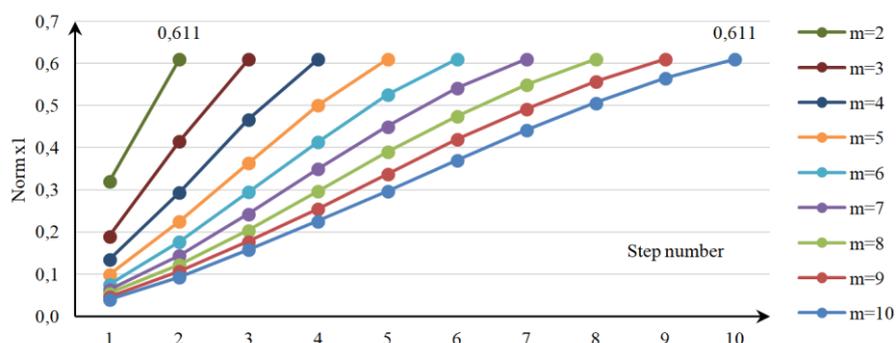


Рис. 3. Траектории изменения состояний x_1 в зависимости от горизонта управления m

3. Анализ полученных результатов. Алгоритм, использующий графовую матрицу динамики, оценивался по нескольким параметрам и критериям оценки.

3.1. Время выполнения. На одном ядре процессора Intel Pentium время выполнения 4417U с частотой 2,3 ГГц обычно находится в диапазоне от нескольких микросекунд до нескольких миллисекунд для матриц размером до $n = 10^2$.

3.2. Устойчивость. Вычислительный процесс сводится к решению СЛАУ с положительно определенной матрицей, имеющей единственное решение. После решения СЛАУ двойственные и исходные переменные определяются в результате одной последовательности вычислений. Вычисление положительно определенной матрицы требует $O(mn^3)$ вычислительных затрат. Решение СЛАУ методом Пауэлла имеет сложность $O(n^3)$.

3.3. Надежность результатов. Надежность результатов основана на корректности математической постановки задачи, симметричной положительно определенной матрице СЛАУ, однократной последовательности вычислений, и малым горизонтом управления m .

3.4. Ограничения. Поскольку не требуются устойчивость и полная управляемость системы управления, то число шагов не может быть большим. Число шагов сравнимо с числом узлов и может составлять один или несколько десятков. Число узлов также составляет $n \sim 10^2$.

3.5. Качество результатов. Симметричная положительно определенная матрица СЛАУ определяется рекуррентной последовательностью вычислений, поддерживающей ее симметрию. Это обеспечивает минимальное накопление ошибок округления вычислений с плавающей точкой. Коэффициент совпадения траектории многоступенчатого управления с траекторией одноступенчатого управления находится в пределах 0,982863 – 0,999861.

Заключение. Мы представили оригинальный подход для решения линейной квадратичной задачи с конечным горизонтом для инвариантной во времени системы с дискретным временем и графовой матрицей динамики. Этот подход обеспечивает последовательность управления, которая минимизирует квадратичную функцию стоимости на векторном входе и векторном выходе.

Входной вектор генерируется алгоритмом из [13] в виде компонент главного собственного вектора матрицы динамики, являющейся матрицей смежности направленного графа. Этот граф представляет когнитивную причинную модель системы. Валидность генерируемых данных установлена в работах [13, 17].

Численный эксперимент показал, что алгоритм можно использовать для проектирования траектории управлений по изменению состояния управляемой системы для перевода ее в заданное направление развития. Это направление выражается условным главным собственным вектором графовой модели.

Важным отличием от стандартной проблемы дискретного управления [19, 20] является то, что модель управления интерпретирована таким образом, что оценивается изменение состояния переменных под действием управляющих воздействий, передающихся через матрицу динамики.

Важным преимуществом предложенного подхода является то, что траектория дискретного управления эффективно следует направлению условного главного собственного вектора матрицы динамики с фиксированной конечной точкой с точностью до 10^{-6} и суммарным отклонением вдоль траектории не более 1,714%. Для рассматриваемых систем получены достаточные условия в виде принципа максимума (Теорема 1).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00029, <https://rscf.ru/project/25-21-00029/> в Южном федеральном университете.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *de Aguiar M.A.M., Bar-Yam Y.* Spectral analysis and the dynamic response of complex networks, *Phys. Rev. E*, 2005, 71, 016106. Available at: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.016106>.
2. *Butterworth J., Dunne P.E.* Spectral Techniques in Argumentation Framework Analysis, *Computational Models of Argument*, 2016, pp. 167-178. Available at: <https://doi.org/10.3233/978-1-61499-686-6-167>.
3. *Gadiyaram V., Ghosh S., Vishveshwara S.* A graph spectral-based scoring scheme for network comparison, *J. Complex Networks*, cnw016, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1093/comnet/cnw016>.
4. *Pei S., Wang J., Morone F., Makse H.A.* Influencer identification in dynamical complex systems, *J. Complex Networks*, 2019. Available at: <https://doi.org/10.1093/comnet/cnz029>.
5. *Ritter F.E., Shadbolt N.R., Elliman D., Young R.M., Gobet F., Baxter G.D.* Techniques for Modeling Human Performance in Synthetic Environments: A Supplementary Review, 2003. Available at: <https://doi.org/10.21236/ADA487721>.
6. *Gray W.D. ed.* Integrated Models of Cognitive Systems. Oxford University Press, 2007. Available at: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195189193.001.0001>.
7. *Langley P., Laird J.E., Rogers S.* Cognitive architectures: Research issues and challenges, *Cogn. Syst. Res.*, 2009, 10, pp. 141-160. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.cogsys.2006.07.004>.
8. *Kotseruba I., Tsotsos J.K.* 40 years of cognitive architectures: core cognitive abilities and practical applications, *Artif. Intell. Rev.*, 2020, 53, pp. 17-94. Available at: <https://doi.org/10.1007/s10462-018-9646-y>.
9. *Sgaier S.K., Huang V., Charles G.* The Case for Causal AI, *Stanford Soc. Innov. Rev.*, 2020, 18 (3), pp. 50-55. Available at: <https://doi.org/10.48558/KT81-SN73>.
10. *Razavi S.E., Moradi M.A., Shamaghdari S., Menhaj M.B.* Adaptive optimal control of unknown discrete-time linear systems with guaranteed prescribed degree of stability using reinforcement learning, *Int. J. Dyn. Control*, 2022, 10, pp. 870-878. Available at: <https://doi.org/10.1007/s40435-021-00836-x>.
11. *Moulton R.H., Rudie K.* Online control of discrete-event systems: A survey, *Annu. Rev. Control*, 2022, 54, pp. 24-48. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2022.08.002>.
12. *Katsuhiko O.* Discrete-time control systems. Prentice-Hall, Inc., USA, 1995.
13. *Tselykh A., Vasilev V., Tselykh L.* A Method for Modeling the Control Impact Strategy Based on the Mental Frame of References of the Decision-Maker. Presented at the 2023. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-031-43789-2_29.
14. *Pontryagin L.S.* Mathematical Theory of Optimal Processes. Routledge, 2018. Available at: <https://doi.org/10.1201/9780203749319>.
15. *Macki J., Strauss A.* Necessary Conditions for Optimal Controls — The Pontryagin Maximum Principle. Presented at the 1982. Available at: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5671-7_5.
16. *Bertsekas D.P.* Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Athena Scientific, Belmont, MA, 1996.
17. *Tselykh A., Vasilev V., Tselykh L., Ferreira F.A.F.* Influence control method on directed weighted signed graphs with deterministic causality, *Ann. Oper. Res.*, 2022, 311, pp. 1281-1305. Available at: <https://doi.org/10.1007/s10479-020-03587-8>.
18. *Tselykh A., Vasilev V., Tselykh L.* Effect of Resonance in the Effective Control Model Based on the Spread of Influence on Directed Weighted Signed Graphs, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2020, pp. 270-280. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-030-50097-9_28.
19. *Powell M.J.D.* An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *Comput. J.*, 1964, 7, pp. 155-162. Available at: <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.155>.
20. *Carvalho J.P.* On the semantics and the use of fuzzy cognitive maps and dynamic cognitive maps in social sciences, *Fuzzy Sets Syst.*, 2013, 214, pp. 6-19. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2011.12.009>.

Целых Александр Николаевич – Южный федеральный университет; e-mail: ant@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185562047; кафедра ИАСБ; д.т.н.; зав. кафедрой.

Васильев Владислав Сергеевич – Южный федеральный университет; e-mail: vsvasilev@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185983647; кафедра ИАСБ; к.ф.-м.н.; доцент.

Целых Лариса Анатольевна – Южный федеральный университет; e-mail: l.tselykh58@gmail.com; г. Таганрог, Россия; тел.: +79185562047; кафедра ИАСБ; к.э.н.; доцент.

Подоплелова Елизавета Сергеевна – Южный федеральный университет; e-mail: chuzhinova@sfedu.ru; г. Таганрог, Россия; тел.: +79525844188; кафедра ИАСБ; старший преподаватель.

Tselykh Alexander Nikolayevich – Southern Federal University; e-mail: ant@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79185562047; the department IASB; dr. of eng. sc.; head of department.

Vasilev Vladislav Sergeevich – Southern Federal University; e-mail: vsvasilev@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79185983647; the department IASB; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.

Tselykh Larisa Anatolievna – Southern Federal University; e-mail: l.tselykh58@gmail.com; Taganrog, Russia; phone: +79185562047; the department IASB; cand. of ec. sc.; associate professor.

Podoplelova Elizaveta Sergeevna – Southern Federal University; e-mail: chuzhinova@sfedu.ru; Taganrog, Russia; phone: +79525844188; the department IASB; senior lecturer.

УДК 004.056

DOI 10.18522/2311-3103-2025-3-233-245

А.В. Иванов, А.В. Царегородцев, М.В. Валеев

ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПО ФОРМИРОВАНИЮ ИНФРАСТРУКТУРЫ ДОВЕРИЯ В СИСТЕМЕ ЗАЩИЩЕННОСТИ ЦИФРОВОГО РУБЛЯ

Актуальность статьи обусловлена цифровой трансформацией российской экономики, важнейшим направлением которой является разработка и внедрение инструментов цифрового рубля в кредитно-финансовой сфере. В этой связи национальная система должна базироваться на инфраструктурно-технологической инфраструктуре доверия в системе защищенности цифрового рубля. Основными функциональными свойствами подобной инфраструктуры доверия относятся механизмы идентификация и аутентификация, безопасных финансовых транзакций на основе защиты целостности и конфиденциальности данных участников и пользователей платформы цифрового рубля. Кроме технологической готовности инфраструктуры доверия необходимо формирование доверия населения к цифровому рублю. Вышеназванные обстоятельства обусловили важность и необходимость разработки технологического решения по формированию инфраструктуры доверия в системе защищенности цифрового рубля. В процессе исследования решены следующие задачи: проведена теоретическая интерпретация и эмпирическая операционализация базовых понятий инфраструктуры доверия цифрового рубля; исследованы ее организационно-технологические предпосылки; уточнены структурные элементы базовой и ролевой модели инфраструктуры цифрового рубля; проведён анализ методов шифрования и токенизации API, а также сформулировано технологическое решение по обеспечению защищенности инфраструктуры доверия цифрового рубля. По результатам исследования предложен комплекс мер направленных на безопасность допуска к платформе цифрового рубля участников и пользователей по защищённым каналам; безопасность допуска кредитных организаций на основе двухфакторной аутентификации, а также безопасность конфиденциальности физических и юридических лиц на инфраструктуре доверия в системе защищенности цифрового рубля. Практическое значение имеет перечень работ, связанных с развёртыванием Удостоверяющих центров, средств защиты информации и СКЗИ, интеграцией с единой системой идентификации и аутентификации информационного и системой быстрых платежей и их внедрением в общей системе цифрового рубля.

Цифровой рубль; инфраструктура доверия; защищенность системы цифрового рубля; инфраструктура доверия в системе цифрового рубля; удостоверяющие центры; шифрование; кредитные организации; сертификаты; платформа цифрового рубля.