Раздел I. Методы и алгоритмы обработки информации

УДК 517.524 DOI 10.23683/2311-3103-2018-5-6-15

В.И. Шмойлов, Д.В. Тимошенко, В.В. Гривцов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ РЕШЕНИЙ БСЛАУ С ТРЁХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

Рассматриваются бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) и приводятся примеры решения таких систем. Использование r/φ-алгоритма позволяет найти комплексные решения БСЛАУ, если они имеются, что не обеспечивают известные алгоритмы решения систем. Кроме того, рассматривается способ суммирования расходящихся непрерывных дробей. Этот способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо позволяет по последовательности вещественных подходящих дробей установить комплексное число, которое, собственно, и "представлено" этой расходящейся непрерывной дробью. Признаком комплексности такой расходящейся непрерывной дроби с вещественными элементами служат перемены знаков ее подходящих дробей, причём, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Другими словами, комплексная единица e^i устанавливается из "поведения" подходящих дробей непрерывной дроби. Параметры же комплексного числа $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, то есть его модуль r_0 и аргумент φ_0, могут быть определены, так называемым, r/φ-алгоритмом. В отличие от классического определения сходимости непрерывных дробей, сходимость непрерывных дробей, устанавливаемая r/φ-алгоритмом, допускает для цепных дробей с вещественными элементами как вещественные, так и комплексные их значения. Решения СЛАУ с техдиагональными матрицами записываются по формулам Крамера отношениями определителей, которые приводятся к отношению трехдиагональных определителей (n + 1)-го и n-го порядков, представляющих, как известно, непрерывные дроби. Эти непрерывные дроби могут быть как сходящимися, так и расходящимися, в зависимости от коэффициентов вещественной матрицы СЛАУ. Суммирование r/φ-алгоритмом расходящихся непрерывных дробей показывало, что расходящиеся в классическом смысле непрерывные дроби имеют комплексные значения. Непрерывные дроби с вещественными элементами могут иметь как вещественные, так и комплексные значения. Подходящие дроби для сходящихся и расходящихся непрерывных дробей с вещественными элементами, естественно, вещественные, но r/φ-алгоритм по этим подходящим дробям, или «отсчетам», устанавливал значения непрерывных дробей, которые могли быть как вещественными, так и комплексными. Исследуется алгоритм, обеспечивающий быстрые вычисления серии подходящих дробей.

Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений; расходящиеся непрерывные дроби; r/φ-алгоритм.

V.I. Shmoylov, D.V. Timoshenko, V.V. Grivtsov

THE DETERMINATION OF COMPLEX SOLUTIONS OF ISLAE WITH A THREE-DIAGONAL MATRIX

The article deals with infinite systems of linear algebraic equations (ISLAE) and gives examples of solutions of such systems. The use of r/φ-algorithm allows to find complex solutions of ISLAE, if they exist, but does not provide known algorithms for solving systems. Discussed is the summation method of divergent continued fractions. This method is different from classic methods of summation, because it makes it possible to get complex number for the real sequence of *convergents fractions, which is represented this continued fraction. An indication of the complexity of such divergent continued fractions with real elements are signs changing in its appropriate fractions, and these signs changes occurs any number of times. Differently, complex unit e^i take from appropriate fractions of continued fractions "activity". Parameters of the complex number $= r_0 e^{i\varphi_0}$: module r_0 and argument φ_0, can be identified by r/φ-algorithm. Differently from a classical defenition of continued fraction convergence, the convergence of continued fractions, identified by r/φ-algorithm, assumes for continued fractions with real elements both real and complex values. The solutions of SLAE with tegialagonal matrices are written according to Cramer's formulas by the relations of determinants, which are reduced to the ratio of tridiagonal determinants (n + 1) and n-th orders, which are known to be continuous fractions. These continued fractions can be either convergent or divergent, depending on the coefficients of the real SLAE matrix. The summation by the r / φ-algorithm of divergent continued fractions showed that the divergent continuous fractions in the classical sense have complex values. We give a comparative analysis of the effectiveness of two algorithms for solving divergent ISLAE, an algorithm based on the reduction procedure, and an algorithm providing fast calculations of a series of suitable fractions necessary for the realization of the r/φ-algorithm. An algorithm is investigated that provides a quick calculation of a series of suitable fractions.*

Infinite systems of linear algebraic equations; divergent continuous fractions; r/φ-algorithm.

Введение. Известно, что при использовании разностных схем встречаются принципиальные трудности. Разработанный способ суммирования расходящихся в традиционном смысле непрерывных дробей, так называемый, *r/φ*-алгоритм [1–11], помог понять природу парадоксов, ставящих в тупик даже специалистов. Удивительно, но за долгую историю СЛАУ вопросы о комплексных решениях систем с вещественными матрицами, насколько известно, не поднимались.

Возможность и неизбежность комплексных решений СЛАУ стала очевидной с появлением *r/φ*-алгоритма. В самом деле, решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами записываются по формулам Крамера отношениями определителей, которые несложными преобразованиями приводятся к отношению трёхдиагональных определителей (n + 1)-го и n-го порядков, представляющих, как известно, непрерывные дроби. Эти непрерывные дроби могут быть как сходящимися, так и расходящимися, в зависимости от коэффициентов вещественной матрицы СЛАУ.

Возвращаясь к формулам Крамера, можно сказать, что эти формулы следует рассматривать как аналог подходящих дробей, если речь идёт о решении БСЛАУ с использованием процедуры редукции, то есть о решении последовательности СЛАУ увеличивающихся размерностей. Как уже отмечалось, непрерывная дробь может иметь комплексное значение, которое устанавливается именно по последовательности вещественных подходящих дробей.

Здесь надо уточнить, что комплексные решения для конечных СЛАУ, если они имеют такие решения, будут приближёнными, стремясь к точным в пределе, то есть при решении БСЛАУ. Ситуация аналогичная той, которая случается при определении квадратного корня из числа N, – за конечное число операций точное значение корня, в общем случае, установить нельзя.

Решения БСЛАУ с трёхдиагональной вещественной матрицей могут представляться как сходящимися цепными дробями, так и расходящимися, имеющими комплексные значения. Суммирование расходящихся непрерывных дробей оказалось вне поля зрения даже специалистов, занимающихся сходимостью непрерывных дробей [12, 13]. Естественно, что без учёта комплексных решений общая теория БСЛАУ создана не была, да и не могла быть создана. Статьи, касающиеся тех или иных аспектов решения БСЛАУ, появляются регулярно уже более столетия [14, 15]. Недавно была опубликована монография по бесконечным системам линейных алгебраических уравнений [16].

Решение расходящихся БСЛАУ. Процесс нахождения решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) при помощи *r/φ*-алгоритма состоит из двух этапов.

Рассмотрим БСЛАУ

$$AX=B, \tag{1}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \end{pmatrix},$$

$$X=\left[x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots\right]^{\mathrm{T}},\ B=\left[b_1,b_2,b_3,\dots,b_n,\dots\right]^{T},$$

где A – матрица коэффициентов, X – вектор искомых решений, B – правая часть системы линейных алгебраических уравнений.

Чтобы узнать, «расходится» данная система или нет, решаем одним из классических методов системы смежных порядков, то есть реализуем известную процедуру редукции, и строим последовательности, состоящие из этих решений $\{\overline{x}_i\}$, то есть последовательности вида

$$\left\{\overline{x}_1^{(1)},\overline{x}_1^{(2)},\overline{x}_1^{(3)},\dots,\overline{x}_1^{(m)}\right\},\left\{\overline{x}_2^{(2)},\overline{x}_2^{(3)},\overline{x}_2^{(4)},\dots,\overline{x}_2^{(m)}\right\},\ \dots$$

$$\left\{\overline{x}_n^{(n)},\overline{x}_n^{(n+1)},\overline{x}_n^{(n+2)},\dots,\overline{x}_n^{(m)}\right\}. \tag{2}$$

При решении расходящихся БСЛАУ модуль r_i комплексного корня x_i находится по формуле

$$r_i=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\prod_{m=i}^{m}\left|\overline{x}_i^{(m)}\right|},\qquad i=1,2,\dots,n, \tag{3}$$

где $\overline{x}_i^{(m)}$ – значение вещественного корня $\overline{x}_i$, полученное «стандартным» алгоритмом решения СЛАУ размерности m.

Модуль аргумента φ_i комплексного корня x_i БСЛАУ определяется следующим образом:

$$\left|\varphi_i\right|=\pi\lim_{m\to\infty}\frac{k_i^{(m)}}{m}, \tag{4}$$

где $k_i^{(m)}$ – количество отрицательных значений $\overline{x}_i$, полученных «стандартным» алгоритмом решения СЛАУ, из общего количества m значений $\overline{x}_i$, найденных из «расширяющейся» системы.

Таким образом, значения r_i и $\left|\varphi_i\right|$ комплексных решений $x_i=r_ie^{i\varphi_i}$ определяются формулами:

$$r_1^{(1)} = \left|\bar{x}_1^{(1)}\right|, \qquad \left|\varphi_1^{(1)}\right| = \pi k_1^{(1)},$$
$$r_1^{(2)} = \sqrt{\left|\bar{x}_1^{(1)} \cdot \bar{x}_1^{(2)}\right|}, \qquad \left|\varphi_1^{(2)}\right| = \pi k_1^{(2)}/2,$$
$$r_1^{(3)} = \sqrt[3]{\left|\bar{x}_1^{(1)} \cdot \bar{x}_1^{(2)} \cdot \bar{x}_1^{(3)}\right|}, \qquad \left|\varphi_1^{(3)}\right| = \pi k_1^{(3)}/3,$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$r_2^{(1)} = \left|\bar{x}_2^{(2)}\right|, \qquad \left|\varphi_2^{(1)}\right| = \pi k_2^{(1)},$$
$$r_2^{(2)} = \sqrt{\left|\bar{x}_2^{(2)} \cdot \bar{x}_2^{(3)}\right|}, \qquad \left|\varphi_2^{(2)}\right| = \pi k_2^{(2)}/2,$$
$$r_2^{(3)} = \sqrt[3]{\left|\bar{x}_2^{(2)} \cdot \bar{x}_2^{(3)} \cdot \bar{x}_2^{(4)}\right|}, \qquad \left|\varphi_2^{(3)}\right| = \pi k_2^{(3)}/3,$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

Рассматриваемый способ суммирования, то есть *r/φ*-алгоритм, выходит за рамки традиционных методов, ибо позволяет по последовательности вещественных подходящих дробей установить некое комплексное число, которое, собственно, и представлено последовательностью подходящих дробей. Признаком комплексности служат перемены знаков элементов последовательности, причем, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Модуль r_i и аргумент φ_i комплексного числа $r_i e^{i\varphi_i}$, могут быть определены *r/φ*-алгоритмом, в данном случае определяемом формулами (3) и (4).

Алгоритм решения БСЛАУ с трехдиагональной матрицей. Рассмотрим алгоритм решения БСЛАУ, который назовём *Δ-методом*. Название метода решения БСЛАУ связано с названием алгоритма вычисления значений цепных дробей.

Представим решение конечной трехдиагональной системы алгебраических уравнений

$$AX = B, \tag{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$X = [x_1, x_1, \dots, x_n]^T, \quad B = [b_1, b_1, \dots, b_n]^T$$

в виде цепных дробей, частными числителями и знаменателями которых есть некоторые выражения из элементов исходной матрицы A.

Как показано в [19], решение системы алгебраических уравнений (5) с трёхдиагональной матрицей может быть представлено цепными дробями:

$$x_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{s_2}{t_2} + \dots + \frac{s_n}{t_n}, \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{\beta_2}{\gamma_2} + \frac{s_3}{t_3} + \dots + \frac{s_n}{t_n}, \tag{7}$$

$$x_3 = \frac{\beta_3}{\gamma_3 +} \frac{s_4}{t_4 + \ldots +} \frac{s_n}{t_n}, \tag{8}$$

……………………

где

$$\gamma_1 = a_{11}, \qquad \gamma_n = a_{nn} - \frac{a_{n,n-1} \cdot a_{n-1,n}}{\gamma_{n-1}}, \tag{9}$$

$$\beta_1 = b_1, \qquad \beta_n = b_n - \beta_{n-1} \cdot \frac{a_{n,n-1}}{\gamma_{n-1}}, \tag{10}$$

$$s_n = \frac{a_{n-1,n} \cdot \gamma_{n-1} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}}, \tag{11}$$

$$t_n = \gamma_n - \frac{a_{n-1,n} \cdot \beta_n}{\beta_{n-1}}. \tag{12}$$

Уже отмечалось, что для достижения высокой точности при определении модуля и аргумента комплексного числа по «подходящим» необходимо брать значительное число вещественных «отсчётов».

Обратный рекуррентный алгоритм (Backward Recurence Algorithm), или BR-алгоритм, – самый естественный способ вычисления конечной цепной дроби, где операции последовательно выполняются «снизу вверх».

Запишем цепную дробь, имеющую n звеньев:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 + \ldots +} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} +} \frac{a_n}{b_n}. \tag{13}$$

Чтобы определить значение цепной дроби (14), надо выполнить всего $2n + 1$ операций. BR-алгоритм – эффективный алгоритм, если речь идет о «разовом» вычислении конечной цепной дроби. Но если будет поставлена задача,– определить все n подходящих цепной дроби (14), то станут очевидны недостатки этого алгоритма.

Запишем подходящие цепной дроби (6):

$$\frac{P_0}{Q_0} = b_0, \ \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \ \frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2}, \ \ldots, \ \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_2 +} \frac{a_2}{b_2 + \ldots +} \frac{a_n}{b_n}. \tag{14}$$

Следовательно, в BR-методе при определении очередной подходящей вычисления приходится производить заново. Серия из n подходящих дробей вычисляется при выполнении $n(n + 1)$ арифметических операций.

Рекуррентный алгоритм Валлиса, или FR-алгоритм, неэффективен при вычислении большого числа подходящих по иной причине. FR-алгоритм, который используется при вычислении значений непрерывных дробей (13), описывается рекуррентными формулами второго порядка:

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2},$$
$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \tag{15}$$

при начальных условиях

$$P_{-1} = 1, \ P_0 = b_0, \ Q_{-1} = 0, \ Q_0 = 1.$$

При вычислении длинных серий подходящих дробей использование FR-алгоритма, как видно из рекуррентной формулы (15), достаточно быстро приводит или к переполнению разрядной сетки, или к появлению «машинного нуля».

В [20] были рассмотрены алгоритмы, эффективные при вычислении значений длинных последовательностей подходящих цепных дробей. Опишем, так называемый, Δ-алгоритм и определим число операций, необходимых при нахождении значений подходящей дроби Δ-алгоритмом.

Используя формулу

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n}{Q_{n-1} Q_n},$$

можно записать:

$$\frac{\Delta f_n}{\Delta f_{n-1}} = -\frac{a_n Q_{n-2}}{Q_n} = \frac{b_n}{\varphi_n} - 1, \quad \varphi_n = Q_n / Q_{n-1},$$

$$\varphi_n = b_n + \frac{a_n}{\varphi_{n-1}}, \quad \varphi_1 = b_1, \quad n = 1,2,... \tag{16}$$

Следовательно,

$$\Delta f_n = \left(\frac{b_n}{\varphi_n} - 1 \right) \Delta f_{n-1}, \quad \Delta f_1 = \frac{a_1}{b_1}. \tag{17}$$

Так как $f_n = f_{n-1} + \Delta f_n$, то применяя формулы (16) и (17), найдём значение очередной подходящей дроби, выполняя всего 6 операций: 3 операции сложения, 1 операцию умножения и 2 операции деления.

В табл. 1 приведены характеристики алгоритмов вычисления значений цепных дробей.

Таблица 1

Характеристики алгоритмов вычисления цепных дробей

№	Алгоритм	Число операций при вычислении n-звенной дроби				Число операций при вычислении серии $\{P_i/Q_i\}$
		Сложение	Умножение	Деление	Кол-во	
1	BR-алгоритм	n		n	2n	n(n+1)
2	FR-алгоритм	2n	4n	1	6n+1	7n
3	Δ-алгоритм	3n	n	2n	6n	7n

Количество операций при вычислении серии подходящих дробей, т.е. цепных дробей, отличающихся по длине на одно звено, для Δ-алгоритма определяется формулой $N = 7n$, где n – число звеньев, в то время как для классического BR-алгоритма определения значений цепных дробей, то есть последовательного вычисления цепной дроби «снизу-вверх», число необходимых операции при вычислении серии подходящих значительно больше: $N = n(n + 1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\ 3 & 1 & 3 & & \dots & \\ 0 & 3 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \tag{18}$$

В табл. 2–4 показаны результаты решения уже рассмотренной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (5) Δ-методом, дополненным r/φ-алгоритмом.

Таблица 2

Определение комплексных корней системы (18) с матрицей размерностью 4096x4096

Номер x_i	Значение x_i по методу прогонки	Модуль комплексного числа r_i	Аргумент комплексного числа φ_i	Абсолютная погрешность
1	-0.52252240	0.21854620	0.70333019	-0.00129946+i0.00176267
2	0.50750746	0.28206924	-0.16571038	-0.00161538+i0.00182315
3	0.68668658	0.14569091	-1.03440813	-0.00122044+i0.00184069
4	-0.40306966	0.09404301	1.23806228	-0.00142058+i0.00178626
8	-0.57024502	0.17765337	0.90275650	-0.00096688+i0.00122485
16	-0.04111062	0.27835232	0.23248247	-0.00109487+i0.00107863
32	0.61500702	0.12764513	-1.10670619	-0.00121709+i0.00137875
64	0.85414209	0.22852366	-0.64498852	-0.00093987+i0.00093211
128	-0.10591301	0.27500201	0.27941098	-0.00132159+i0.00039725
256	0.70783973	0.15139271	-1.01093687	-0.00079286+i0.00170747
512	0.78250195	0.25690936	-0.45393165	-0.00103040+i0.00125096
1024	-0.49902515	0.22582384	0.66246405	-0.00058763+i0.00219998
2048	0.60336439	0.27693303	-0.24531714	-0.00084945+i0.00477695

Комплексные $x_1 \div x_{2048}$, приведённые в табл. 2, находились при решении СЛАУ (18) с размерностью матрицы 4096x4096. Следовательно, при определении комплексного значения x_1, использовались 4096 подходящих цепной дроби (6), а при нахождении комплексной величины x_{2048} – всего 2048 подходящих.

С ещё большей точностью установлены комплексные корни бесконечной системы (18), когда они находились из СЛАУ, матрица элементов которой имела размерность 16777216×16777216. «Невязки», которые были зафиксированы после подстановки в строки системы (18) комплексных x_i, оказались чрезвычайно малы и составляли по вещественной и мнимой части величины порядка $10^{-7} - 10^{-10}$.

Таблица 3

Определение комплексных корней системы (18) с матрицей размерностью 131072x131072

Номер x_i	Значение x_i по методу прогонки	Модуль комплексного числа r_i	Аргумент комплексного числа φ_i	Абсолютная погрешность
1	-0.1596570660	0.2182241350	0.7017003366	-2.523282e-005+ i2.761448e-005
2	0.3865523553	0.2817249568	-0.1674208992	-3.207682e-005+ i2.976090e-005
3	0.3641396143	0.1454826517	-1.0365314282	-2.371975e-005+ i2.937320e-005
4	-0.1745988934	0.0939086127	1.2359374344	-2.835903e-005+ i2.481125e-005
8	-0.2120254255	0.1773852976	0.9010461178	-2.492728e-005+ i2.439858e-005
16	0.1230665364	0.2781171662	0.2312261286	-2.916267e-005+ i2.612304e-005
32	0.3211384425	0.1274669642	-1.1083475398	-3.229473e-005+ i1.687929e-005
64	0.5003496227	0.2281577226	-0.6459246289	-2.549413e-005+ i8.826276e-006
128	0.0888820396	0.2746841691	0.2788794761	-4.613959e-005-i6.703580e-006
256	0.3773018981	0.1512353540	-1.0129599220	-9.903217e-006+ i3.212419e-005
512	0.4918609282	0.2566303662	-0.4551857616	-1.780837e-005+ i1.394101e-005
1024	-0.1424562066	0.2256499825	0.6604280044	-1.953590e-005+ i4.724385e-005
2048	0.4269081121	0.2768342350	-0.2499638843	-1.939896e-005+ i6.999124e-005
4096	-0.2128238193	0.1369974583	1.0707596404	-1.119005e-005+ i1.425280e-005
8192	-0.0985559870	0.2404402976	0.5707640399	5.8435531e-007+ i0.0001008274
16384	0.4867585609	0.2597751404	-0.4294286987	-1.510346-005+ i3.8076941e-005
32768	-0.1635845788	0.2163390111	0.7119196332	-3.942164-005+ i6.8758476e-005
65536	0.3755388215	0.2826232908	-0.1469243554	2.88791491e-006+ i0.0001726

На рис. 1 показано расположение на комплексной плоскости корней $x_1 \div x_{4096}$ системы (18), полученных Δ-методом с использованием r/φ-алгорит-ма.

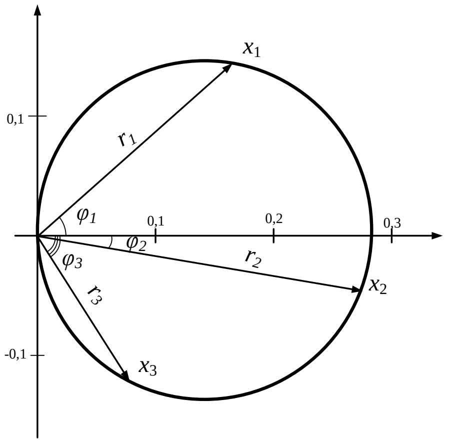

Рис. 1. Расположение на комплексной плоскости корней x_1-x_{4096} системы (5)

Заключение. Метод решения расходящихся БСЛАУ, основанный на процедуре редукции, то есть на многократном пересчёте алгоритмом «прогонки» расширяющихся СЛАУ, оказался неэффективным, так как требует недопустимо больших временных затрат на получение серии отсчётов для определения комплексных решений БСЛАУ. Получение значения очередного «отсчёта», т.е. вещественного значения $\overline{x}_1^{(m)}$ из решения СЛАУ размерности $m \times m$, влечет необходимость решать «расширяющуюся» СЛАУ заново. Второй метод, то есть Δ-метод, который использует рассмотренный выше Δ-алгоритм, реализует вычисление очередной подходящей дроби всего за 6 операций и поэтому обеспечивает решение с высокой точностью БСЛАУ с трёхдиагональной матрицей.

Рассмотренный Δ-алгоритм решения БСЛАУ может использоваться при решении как сходящихся БСЛАУ, так и расходящихся. Как установлено, расходящиеся в классическом смысле БСЛАУ могут иметь комплексные решения. Без учёта комплексных решений сколь-нибудь завершённая теория БСЛАУ состояться не может в принципе, как не была бы создана теория алгебраических уравнений, если бы ограничились только вещественными корнями. Эти замечания вполне справедливы и для конечных СЛАУ, которые могут иметь комплексные решения, определяемые приближённо с всё большей точностью с ростом размерности СЛАУ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
2. *Шмойлов В.И.* Непрерывные дроби. В 3-х т. Т. 2. Расходящиеся непрерывные дроби. – Львов: Меркатор, 2004. – 558 с.
3. *Кириченко Г.А. Шмойлов В.И.* Алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей и некоторые его применения // Вычислительная математика и математическая физика. – 2015. – Т. 55, № 4. – С. 559-572.
4. *Шмойлов В.И., Кириченко Г.А.* Определение значений расходящихся непрерывных дробей и рядов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 4 (141). – С. 211-223.
5. *Гузик В.Ф., Шмойлов В.И., Кириченко Г.А.* Непрерывные дроби и их применение в вычислительной математике // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 1 (150). – С. 158-174.
6. *Селянкин В.В., Шмойлов В.И.* Решение систем линейных алгебраических уравнений методом суммирования расходящихся рядов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 6 (167). – С. 82-94.

7. *Гузик В.Ф., Кириченко Г.А, Шмойлов В.И.* Решение алгебраических уравнений методом Никипорца-Рутисхаузера // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 6 (167). – С. 71-82.
8. *Гузик В.Ф., Ляпунцова Е.В., Шмойлов В.И.* Непрерывные дроби и их применение. – М.: Физматлит, 2015. – 298 с.
9. *Шмойлов В.И. Коровин Я.С.* Решение систем линейных алгебраических уравнений непрерывными дробями. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2017. – 383 с.
10. *Левин И.И., Селянкин В.В., Шмойлов В.И.* Представление функции Вейерштрасса и ее производной цепными дробями // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2016. – № 4 (177). – С. 60-72.
11. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
12. *Шмойлов В.И., Коровин Я.С.* Непрерывные дроби. Библиографический указатель. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2017. – 382 с.
13. *Коялович Б.М.* Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Известия Физико-математического института им. В.А. Стеклова. – 1930. – Т. III. – С. 41-167.
14. *Иванов О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М.* О главных и строго частных решениях бесконечных систем // Вычислительная математика и математическая физика. – 2016. – Т. 56, № 3. – С. 351-362.
15. *Фёдоров В.М.* Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. – Новосибирск: Наука, 2011. – 311 с.
16. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
17. *Горох О.В.* О решении последовательности расширяющихся систем линейных алгебраических уравнений // Теория и методы автоматиз. научных исследований. – Минск, 1985. – С. 3-5.
18. *Шмойлов В.И.* Непрерывные дроби и r/φ-алгоритм. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2012. – 608 с.
19. *Шмойлов В.И.* Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 205 с.
20. *Качмар В.С., Русын Б.П., Шмойлов, В.И.* Алгоритмы вычисления значений цепных дробей // Вычислительная математика и математическая физика. – 1998. – Т 38, № 9. – С. 1936-1451.

REFERENCES

1. *Godunov S.K., Ryaben'kiy V.S.* Raznostnye skhemy [Difference schemes]. Moscow: Nauka, 1977, 440 p.
2. *Shmoylov V.I.* Nepreryvnye drobi. V 3-kh t. T. 2. Raskhodyashchiesya nepreryvnye drobi [Continuous fractions in 3 vol. Vol. 2. Divergent continuous fractions]. L'vov: Merkator, 2004, 558 p.
3. *Kirichenko G.A. Shmoylov V.I.* Algoritm summirovaniya raskhodyashchikhsya nepreryvnykh drobey i nekotorye ego primeneniya [The algorithm of summation of divergent continuous fractions and some of its applications], *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2015, Vol. 55, No. 4, pp. 559-572.
4. *Shmoylov V.I., Kirichenko G.A.* Opredelenie znacheniy raskhodyashchikhsya nepreryvnykh dro-bey i ryadov [Determination of the values of divergent continued fractions and series], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 4 (141), pp. 211-223.
5. *Guzik V.F., Shmoylov V.I., Kirichenko G.A.* Nepreryvnye drobi i ikh primenenie v vychislitel'noy matematike [Continuous fractions and their application in computational mathematics], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 1 (150), pp. 158-174.
6. *Selyankin V.V., Shmoylov V.I.* Reshenie sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy metodom summirovaniya raskhodyashchikhsya ryadov [Solution of systems of linear algebraic equations by summation of divergent series], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 6 (167), pp. 82-94.
7. *Guzik V.F., Kirichenko G.A, Shmoylov V.I.* Reshenie algebraicheskikh uravneniy metodom Nikiportsa-Rutiskhauzera [Solution of algebraic equations by the Nikiportsev-Rutischauser method], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 6 (167), pp. 71-82.

8. *Guzik V.F., Lyapuntsova E.V., Shmoylov V.I.* Nepreryvnye drobi i ikh primenenie [Continuous fractions and their application]. Moscow: Fizmatlit, 2015, 298 p.
9. *Shmoylov V.I. Korovin Ya.S.* Reshenie sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy nepreryvnymi drobyami [Solution of systems of linear algebraic equations by continuous fractions]. Rostov-on-Don: Izd-vo YUFU, 2017, 383 p.
10. *Levin I.I., Selyankin V.V., Shmoylov V.I.* Predstavlenie funktsii Veyershtrassa i ee proizvodnoy tsepnymi drobyami [Representation of the Weierstrass function and its derivative by continued fractions], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2016, No. 4 (177), pp. 60-72.
11. *Dzhouns U., Tron V.* Nepreryvnye drobi. Analiticheskaya teoriya i prilozheniya [Continuous fractions. Analytical theory and applications]. Moscow: Mir, 1985, 414 p.
12. *Shmoylov V.I., Korovin Ya.S.* Nepreryvnye drobi. Bibliograficheskiy ukazatel' [Continuous fractions. Bibliographic index]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2017, 382 p.
13. *Koyalovich B.M.* Issledovanie o beskonechnykh sistemakh lineynykh uravneniy [Investigation of infinite systems of linear equations], *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova* [Proceedings of the Physics and Mathematics Institute named after. V.A. Steklova], 1930, Vol. III, pp. 41-167.
14. *Ivanov O.F., Pavlov N.N., Fedorov F.M.* O glavnykh i strogo chastnykh resheniyakh beskonechnykh sistem [On principal and strictly particular solutions of infinite systems], *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2016, Vol. 56, No. 3, pp. 351-362.
15. *Fedorov V.M.* Beskonechnye sistemy lineynykh algebraicheskikh uravneniy i ikh prilozheniya [Infinite systems of linear algebraic equations and their applications]. Novosibirsk: Nauka, 2011, 311 p.
16. *Samarskiy A.A., Nikolaev E.S.* Metody resheniya setochnykh uravneniy [Methods for solving grid equations]. Moscow: Nauka, 1978, 592 p.
17. *Gorokh O.V.* O reshenii posledovatel'nosti rasshiryayushchikhsya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [On the solution of a sequence of expanding systems of linear algebraic equations], *Teoriya i metody avtomatiz. nauchnykh issledovaniy* [Theory and methods of automation. scientific. issled.]. Minsk, 1985, pp. 3-5.
18. *Shmoylov V.I.* Nepreryvnye drobi i r/φ-algoritm [Continuous fractions and r/φ-algorithm]. Rostov-on-Don: Izd-vo YUFU, 2012, 608 p.
19. *Shmoylov V.I.* Raskhodyashchiesya sistemy lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Divergent systems of linear algebraic equations]. Taganrog: Izd-vo TTI YuFU, 2010, 205 p.
20. *Kachmar V.S., Rusyn B.P., Shmoylov, V.I.* Algoritmy vychisleniya znacheniy tsepnykh drobey [Algorithms for calculating the values of continued fractions], *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1998, Vol. 38, No. 9. pp. 1936-1451.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.И. Жорник.

Шмойлов Владимир Ильич – Южный федеральный университет; e-mail: vt_gak@mail.ru; 347928, г. Таганрог, ул. Чехова, 2; тел.: 89185987073; НИИ многопроцессорных вычислительных систем; научный сотрудник.

Тимошенко Дмитрий Владимирович – e-mail: dmitriytim@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634271636; кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

Гривцов Владимир Владиславович – e-mail: gvv@sfedu.ru; тел.: 89285949373; кафедра инженерной графики и компьютерного дизайна; к.т.н.; доцент.

Shmoilov Vladimir Ilyich – Southern Federal University; e-mail: vt_gak@mail.ru; 2, Chekhov street, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79185987073; Research Institute of Multiprocessor Computer Systems; research associate.

Timoshenko Dmitry Vladimirovich – e-mail: dmitrytim@sfedu.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634271636; the department of higher mathematics; cand. of phys.-math. sc.; associate professor.

Grivtsov Vladimir Vladislavovich – e-mail: gvv@sfedu.ru; phone: +79285949373; the department of engineering graphics and computer design; cand. of eng. sc.; associate professor.