18. *Skvortsov L.M.* Sintez lineynykh sistem metodom polinomial'nykh uravneniy [Synthesis of linear systems by polynomial equation], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and remote control], 1991, No. 6, pp. 54-59.
19. *Grimble M.J., Kucera V.* Polynomial Methods for Control Systems Design. Springer-Verlag, 1996, 255 p.
20. *Gayduk A.R.* Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyy podkhod) [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow: Fizmatlit, 2012, 360 p.
21. *Tyutikov V.V., Tararykin S.V.* Robastnoe modal'noe upravlenie tekhnologicheskimi ob"ektami [Robust modal control of technological objects]. Ivanovo: IGEU, 2006, 256 p.
22. *Besekerskiy V.A., Izrantsev V.V.* Sistemy avtomaticheskogo upravleniya s mikro-EVM [Automatic control systems with micro-computers]. Moscow: Nauka, 1987, 320 p.
23. *Phillips C., Harbor R.* Feedback Control systems. Prentice hall, Inc., 2000, 616 p.
24. *Meerov M.V.* Sintez struktur sistem avtomaticheskogo regulirovaniya vysokoy tochnosti [Synthesis of structures of automatic control systems of high accuracy]. Moscow: Nauka, 1967, 424 p.
25. *Gayduk A.R.* Osnovy teorii sistem avtomaticheskogo upravleniya [Fundamentals of the theory of automatic control systems]. Moscow: UmiITs «Uchebnaya literatura», 2005, 405 p.
26. *Besekerskiy V.A., Popov E.P.* Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [The theory of automatic control systems]. Moscow: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1966, 992 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.Р. Гайдук.

Тютиков Владимир Валентинович – ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»; e-mail: tvv@ispu.ru; г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34; тел.: 84932415024; д.т.н.; профессор; проректор по научной работе.

Шляцкая Елена Михайловна – e-mail: lenashlyatskaya@mail.ru; магистрант.

Tyutikov Vladimir Valentinovich – Ivanovo state power university; e-mail: tvv@ispu.ru; 34, Rabfakovskaya street, Ivanovo, Russia; phone: +74932415024; dr. of eng. sc.; professor; Prorector on scientific work.

Shlyatskaya Elena Mikhailovna – e-mail: lenashlyatskaya@mail.ru; undergraduate.

УДК 517.988 DOI 10.23683/2311-3103-2017-9-74-91

А.А. Кулешова, Е.А. Щелоков

ДИСКРЕТНАЯ ФАЗОВАЯ ПРОБЛЕМА В ВОССТАНОВЛЕНИИ СИГНАЛОВ В ИЗДЕЛИЯХ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Рассматривается задача передачи информации по беспроводному интерфейсу в составе изделий ракетно-космической техники. Целью работы является исследование основных характеристик приёмо-передатчиков в составе изделий ракетно-космической техники (а именно в условиях плотной компоновки аппаратуры и металлических конструкций). В качестве основы для определения доступности приёмо-передатчиков в составе плотной компоновке выбраны устройства типа Wi-fi с модуляцией OFDM и произведено моделирование в двухмерном режиме дополнительно в условиях металлических конструкций с помощью САПР tamograph, в результате доказана возможность передачи данных в условиях плотной компоновки приборов, а также сложной электромагнитной обстановки, вызванной металлическими конструкиями. Поиск быстрых алгоритмов для восстановления сигнала без фаз актуален в настоящее время. Главное свойство фреймов, которое делает их настолько полезными в прикладных задачах – их избыточность. Хорошо выбранный фрейм может обеспечить численную устойчивость для восстановления сигнала и получение важных характеристик сигнала. Семейство фреймов восстанавливает сигнал по абсолютному значению фреймовых коэффициентов в полиномиальное время. Показано, что в действительном случае фрейм общего положения, состоящий из (2m-1)-векторов может при оп-

ределенных условиях восстанавливать сигнал без фаз. Аналогичный результат в комплексном пространстве был получен для (4m-2) векторов. Наряду с вариантом "восстановление без фаз" рассматривается другой вариант постановки дискретной фазовой проблемы - "восстановление фаз". Поставлен и частично решен вопрос об эквивалентности этих вариантов. Восстановление информации, скрытой в фазах вектора-сигнала, не теряет актуальности. Наборы векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$, *называемые фреймами, в пространстве* $C^{m}(R^{m})$ *могут использоваться для теоретического исследования восстановления фаз. В статье показывается, что восстановление фаз эквивалентно восстановлению без фаз. Рассмотрены примеры в* R^{m} *и* C^{m}, *для которых построены наборы векторов* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$, *которые одновременно осуществляют восстановление фаз и восстановление без фаз. Построены примеры восстановления сигнала в пространствах малой размерности*

Фрейм; восстановление без фаз; восстановление фаз; альтернативная полнота; фреймы общего положения.

A.A. Kuleshova, E.A. Shchelokov

DISCRETE PHASE PROBLEM IN THE RECOVERY OF SIGNALS IN PRODUCTS OF ROCKET AND SPACE TECHNOLOGY

The problem of transmitting information via the wireless interface in the products of rocket and space technology is considered. The aim of the work is to study the main characteristics of receiving and transmitting devices in the products of rocket and space technology (namely, in the conditions of tight arrangement of equipment and metal structures). As a basis for determining the availability of receiving and transmitting devices in the dense configuration of selected devices such as Wi-fi with OFDM modulation, and modeling in 2D mode in metal structures using a CAD-based tamograph, as a result, it was proved that data can be transferred in dense configuration devices, as well as a complex electromagnetic environment, caused by metal crooks. The search for fast algorithms for signal reconstruction without phases is relevant at the present time. The main property of frames that makes them so useful in applied tasks is their redundancy. A well-chosen frame can provide numerical stability for signal recovery and important signal characteristics. The frame family restores the signal by the absolute value of the frame coefficients in polynomial time. It is shown that, in the actual case, a frame position consisting of (2m-1) -vectors can, under certain conditions, reconstruct a signal without phases. A similar result in complex space was obtained for (4m-2) vectors. With the change "reconstruction without phases," consideration of another version of the statement of the discrete phase problem is "phase reconstruction". The question of the equivalence of these variants has been put and partially solved. The restoration of information hidden in the phases of the vector-signal, does not lose relevance. A set of vectors $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$, *called frames, in space* $C^{m}(R^{m})$ *can be used to theoretically study the recovery of phases. Examples are considered in* R^{m} *and* C^{m} *for which sets of vectors* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ *are constructed that simultaneously perform phase restoration and recovery without phases. Examples of a signal in spaces of small dimension*

Frame; recovery without phases; restoration of phases, alternative completeness; frames of general position.

Введение. Поиск быстрых алгоритмов для восстановления сигнала без фаз актуален в настоящее время. Главное свойство фреймов, которое делает их настолько полезными в прикладных задачах – их избыточность. Хорошо выбранный фрейм может обеспечить численную устойчивость для восстановления сигнала и получение важных характеристик сигнала [1]. Семейство фреймов восстанавливает сигнал по абсолютному значению фреймовых коэффициентов в полиномиальное время.

Показано, что в действительном случае фрейм общего положения, состоящий из (2m-1)-векторов может при определенных условиях восстанавливать сигнал без фаз. Аналогичный результат в комплексном пространстве был получен для (4m-2) векторов.

Наряду с вариантом "восстановление без фаз" рассматривается другой вариант постановки дискретной фазовой проблемы - "восстановление фаз". Поставлен и частично решен вопрос об эквивалентности этих вариантов.

В данной работе продолжены исследования в этом направлении и построены примеры восстановления сигнала в пространствах малой размерности.

Дискретная фазовая проблема в восстановлении сигналов в изделиях ракетно-космической техники. В настоящее время широко известна проблема уменьшения массы кабельных сетей в космических аппаратах, в связи с чем предлагается рассмотреть вариант замены кабельной сети на радиоканал [2].

Широкое внедрение беспроводных устройств стало возможным в результате совершенствования и удешевления электронной компонентной базы. Современные микросхемы, с использованием которых строятся беспроводные сети, требуют подключения буквально нескольких пассивных компонентов и программной настройки.

В связи с перечисленным целесообразно рассмотреть внедрение беспроводных технологий в ракетно-космическую технику (РКТ) в качестве одного из средств снижения массы и сложности кабельной сети.

Рассмотрим в качестве примера сигнал, передаваемый по радиоканалу с модуляцией типа OFDM. Основное достоинство выбранного метода заключается в том, что в сравнении с другими типами модуляции задержка распространения сигнала значительно меньше, чем длительность передачи символа во вспомогательных несущих. Что позволяет реализовать более устойчивую передачу информации в условиях воздействия одних символов, которые в ходе переотражений сигнала были наложены на другие.

На рис. 1 представлена модель распределения уровней сигналов от различного числа точек доступа для варианта расположения набора блоков внутри космического аппарата. Модель представлена в двухмерном виде, однако, как видно из распределения уровней сигналов – 4 точек доступа достаточно, чтобы обеспечить связь всех блоков между собой, в том числе путем ретрансляции.

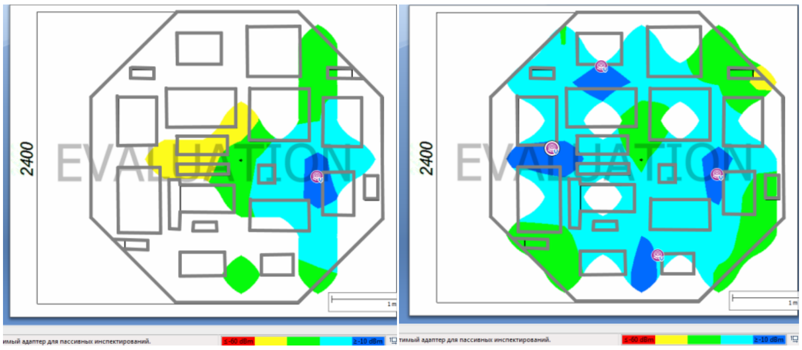

Рис. 1. Распределение сигнала от одной точки доступа (слева) и от четырех точек доступа (справа)

Как видно из рис. 1, уровни сигнала на границе внешней и внутренней части отсека не превышают минус 30 дБм (голубой цвет: -30…-40 дБм, зеленый цвет: -40…-50 дБм) относительно 0 дБм на выходе антенны. Если учесть, что алюминий имеет коэффициент экранирования 70 дБм (для металла толщиной 5 мм), получаем коэффициент затухания сигнала за пределами рабочей зоны 100 дБм. При необходимости дополнительной защиты достаточно не допускать блокирования прямой видимости передающей части и границы отсека, что увеличит затухание на 30-40 дБ [2].

При OFDM модуляции данные распределяются между множеством вспомогательных несущих, поэтому информацию, потерянную в нескольких субканалах, необходимо восстановить для дальнейшей работы с данными.

Поиск алгоритмов для восстановления сигнала актуален в настоящее время. Дискретизация и квантование аналогового сигнала приводят к рассмотрению сигнала как элемента конечномерного пространства V. По ортонормированному базису $\{u_i\}_{i=1}^m$ «сигнал» $v \in \mathrm{V}$ единственным образом представляется суммой: $v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle \, u_i$. Реальные измерения получаются вещественными, и зазор между $\langle v, u_i \rangle$ и амплитудами измерений $|\langle v, u_i \rangle|$ оказывается непреодолимым при восстановлении сигнала [1, С. 280], [4, С.281].

Последние годы значительное количество работ посвящено решению следующей задачи: построить такие системы «измерительных» векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$, которые позволяют восстановить произвольный сигнал $v \in \mathrm{V}$ по набору вещественных чисел $|\langle v, \varphi_i \rangle|$.

В классе ОНБ такая задача не имеет решения.

Основная проблема, поставленная в [3], до сих пор далека от окончательного решения:

Найти необходимые и достаточные условия на систему векторов представления $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ (т.н. «измерительных векторов»), которые обеспечивают инъективность и устойчивость отображения «измерения амплитуды» сигнала x

$$(A(x))(i) := |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 .$$

Доказана теоретическая возможность точного восстановления сигнала (с точностью до унимодулярного множителя), если в качестве системы представления используются полные избыточные системы [2, P. 354]. Такими избыточными системами являются фреймы.

В 2006 году Balan/Casazza/Edidin [4, 5] определили один из вариантов дискретной фазовой проблемы, который они назвали «Phaseless reconstruction» или "восстановление без фаз". Было показано, что в действительном случае фрейм общего положения, состоящий из (2m-1)-векторов может при определенных условиях восстанавливать сигнал без фаз. Аналогичный результат в комплексном пространстве был получен для (4m-2) векторов.

Фреймы

Пусть H^{m} – это пространство R^{m} или C^{m}.

Определение 1: Семейство векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ называется фреймом гильбертового пространства H^{m}, если существуют такие константы $0 < A \le B < \infty$, такие, что для всех $x \in H^m$ выполняются следующие неравенства:

$$A \| x \|^2 \le \sum_{i=1}^{n} |\langle x, f_i \rangle|^2 \le B \| x \|^2 .$$

A и B называются границами фрейма. Наибольшая из нижних границ называется оптимальной нижней границей, а наименьшая из верхних границ - оптимальной верхней границей. Если A=B, то фрейм называется A-жестким, а если A=B=1, то фреймом Парсеваля-Стеклова.

Числа $\{\langle x,\varphi_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ называются фреймовыми коэффициентами.

Если все элементы фрейма имеют одинаковую норму, то такие фреймы называются равномерными.

В конечномерном пространстве понятие фрейма эквивалентно понятию полноты системы, т. е. равенству $span\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}=H^m$ [5].

Определение 2: Пусть $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ – фрейм, линейное отображение:

$$T:H^m\to H^n,\ \ T(x)=\{\langle x,\varphi_i\rangle\}_{i=1}^{n}$$

называется оператором анализа.

Определение 3: Линейное отображение:

$$T^*:H^n\to H^m, T^*(\{c_i\}_{i=1}^{n})=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i$$

называется оператором синтеза.

Композиция T и T^* определяет фреймовый оператор – положительный, самосопряженный обратимый оператор:

$$S=T^*T:H^m\to H^m:Sx=T^*Tx=\sum_{i=1}^{n}\langle x,\varphi_i\rangle\varphi_i\ .$$

Он обеспечивает точную формулу для восстановления:

$$x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,\varphi_i\rangle\ S^{-1}\varphi_i.$$

Определение 4: Семейство векторов $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ является равномерным равноугольным жёстким фреймом, если

1) $\exists\beta>0:\ \|f_i\|=\beta\ \ \forall i=\overline{1,n}$;

2) $\exists c>0$: для любой пары векторов фрейма f_j и f_k, j≠k, мы имеем:

$$\langle|f_j,f_k|\rangle=c.$$

Известно, что есть верхняя граница для числа векторов в равномерном равноугольном жёстком фрейме $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ на m-мерном Гильбертовом пространстве H. В вещественном случае это $n\le\frac{m(m+1)}{2}$, в комплексном случае – $n\le m^2$ ([6], [7]). Построение максимального числа векторов для равномерного равноугольного жесткого фрейма очень сложная и нерешенная задача в теории фреймов.

Рассмотрим P - нелинейное отображение, переводящее вектор в набор модулей фреймовых коэффициентов:

$$P:H\to l^2(I), P(x)=\{|\langle x,\varphi_i\rangle|\}_{i=1}^{n}$$

Определение 5: Фрейм $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ называется фреймом общего положения, если $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}\subset L\in U$, где U – открытое по Зарисскому множество и $U\subset Gr(m,n)$.

Теорема 1 [8, 9]: Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n \subseteq C^m$ и отображение $A: C_r^m = C^m / T^1 \to R^m$ определено соотношениями $(A(x))(i) := \left|\langle x, \varphi_i \rangle\right|^2$, $i = 1,.., n$.

Векторы $\{\varphi_i \varphi_i^* u\}_{i=1}^n$ будем рассматривать как векторы пространства R^{2m}. Пусть $S(u) := span_R \{\varphi_i \varphi_i^* u\}_{i=1}^n$. Эквивалентны следующие утверждения:

(а) A – инъективно.

(б) $\dim S(u) \geq 2n - 1$ для каждого $u \in C^m \setminus \{0\}$.

(в) $S(u) = span_R \{iu\}^{\perp}$ для каждого $u \in C^m \setminus \{0\}$

Определение 6: Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в H^m назовем альтернативно полным, если для любого $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, либо $\{\varphi_i\}_{i \in I}$, либо $\{\varphi_i\}_{i \in I^C}$ полно в H^m [10].

Определение 7: Множество $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subseteq R^m$ называется набором с полным спарком, если каждое его подмножество из m векторов полно в R^m.

Лемма 1: Всякий набор с полным спарком $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в R^m с $n \geq 2m - 1$ удовлетворяет свойству альтернативной полноты.

Доказательство: Предположим противное: существует $S \subseteq \{1,.., n\}$ такое, что ни $\{\varphi_i\}_{i \in S}$, ни $\{\varphi_i\}_{i \in S^C}$ не полны в R^m. По определению полного спарка, отсюда следует, что $|S| < m - 1$ и $|S^C| < m - 1$, то есть $n < 2m - 2$, что противоречит условию.

Теорема 2: В вещественном случае, если $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в R^m и $n \leq 2m - 2$, то отображение A не является инъективным. Если $n = 2m - 1$, то отображение A инъективно тогда и только тогда, когда $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ - полный спарк.

Доказательство: Если $n \leq 2m - 2$, то множество $\{1,.., n\}$ можно разбить на множества S и S^C так, чтобы мощность каждого не превосходила $m - 1$. Ни одно из множеств $\{\varphi_i\}_{i \in S}$, $\{\varphi_i\}_{i \in S^C}$ не может быть полным.

Если $n = 2m - 1$ и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – полный спарк, то инъективность A следует из леммы 1 и теоремы 1.

Обратно, если A – инъективно, то $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ является альтернативно полным семейством. Возьмем произвольное подмножество $S \subseteq \{1,.., n\}$ с $|S| = m$. Тогда $|S^C| = m - 1$ и $\{\varphi_i\}_{i \in S^C}$ не может быть полным. Следовательно, $\{\varphi_i\}_{i \in S}$ полно, и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ - полный спарк.

Неизвестна точная минимальная граница для комплексного случая. Также, в вещественном случае существует простой прямой метод для проверки инъективности отображения A для соответствующего фрейма [7].

Теорема 3 [4, 11]:

(а) Если $H \in R^m$, $n \geq \dfrac{m(m+1)}{2}$ и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – фрейм общего положения, нелинейное отображение P – инъективно. Тогда вектор $\mathrm{x} \in \mathrm{H}$ может быть восстановлен (с точностью до знака) из множества $\{|\langle x, \varphi_i \rangle|\}_{i=1}^n$ модулей фреймовых коэффициентов за полиномиальное число шагов $(\mathrm{O}(\mathrm{m}^6))$

(б) Если $H \in C^m$, $n \geq m^2$ и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – фрейм общего положения, нелинейное отображение P – инъективно. Тогда вектор $x \in H$ может быть восстановлен (с точностью умножения на корень из единицы) из множества $\{|\langle x, \varphi_i \rangle|\}_{i=1}^n$ модулей фреймовых коэффициентов за полиномиальное число шагов $(O(m^6))$.

Об эквивалентности восстановления фаз и восстановления без фаз

Пусть $x = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $y = (b_1, b_2, ..., b_m)$ – векторы в пространстве H^m.

Определение 1: Фазой числа $z \in C^m$ будем называть значение угла $\varphi = ph\ z_i + 2\pi k,\ k \in Z$, определяющее отклонение радиус-вектора точки на плоскости, соответствующей числу $z \in C^m$ от вещественной оси в C^m. В вещественном случае фаза в R^m равна 0 или π.

Будем говорить, что x, y имеют одинаковые фазы, если:

$$ph\ a_i = ph\ b_i,\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Определение 2: Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов в H^m (соответственно $\{P_i\}_{i=1}^n$- набор ортопроекторов в H^m), удовлетворяющих следующему свойству: для каждого x, y выполняется:

$$|\langle x, \varphi_i \rangle| = |\langle y, \varphi_i \rangle|,\ i = 1, 2, ..., n$$

соответственно

$$\| P_i x \| = \| P_i y \|,\ i = 1, 2, ..., n).$$

Тогда,

1. Если существует $|\theta| = 1$ такое, что x и θy имеют одинаковые фазы, то говорят что $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ осуществляет восстановление фаз (соответственно $\{P_i\}_{i=1}^n$ осуществляет восстановление фаз).
2. Если существует $|\theta| = 1$ такое, что $x = \theta\ y$, то говорят что $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ осуществляет восстановление без фаз (соответственно $\{P_i\}_{i=1}^n$ осуществляет восстановление без фаз).

Определение 3: Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в H^m назовем альтернативно полным (АП), если для любого $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, либо $\{\varphi_i\}_{i \in I}$, либо $\{\varphi_i\}_{i \in I^C}$ полно в H^m.

Если $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ восстанавливает фазы в H^m, то $span\{\varphi_i\}_{i=1}^n = H^m$. Это означает, что $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ является фреймом в пространстве H^m. В противном случае найдется $0 \neq x \in H^m$, такой что $\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, в то время как фазы векторов x и 0 не совпадают.

Если $x = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $y = (b_1, b_2, ..., b_m)$ имеют одинаковые фазы, то $a_i = 0$ тогда и только тогда, когда $b_i = 0$, так как фаза числа 0 не определена.

Теорема 1: Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов в R^{m}. Отображение $A: R^m / \{\pm 1\} \to R^n$ $(n > m)$ определено равенствами: $(A(x))(i) := \left|\langle x, \varphi_i \rangle\right|^2$, $i = 1,.., n$. Если $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ восстанавливает без фазы, то он обладает свойством АП. В вещественном случае эти понятия эквивалентны.

Доказательство: ($\Rightarrow$) Предположим, что Φ - не АП. Следовательно, найдется $I \subseteq \{1,.., n\}$ такое, что ни $\{\varphi_i\}_{i \in I}$, ни $\{\varphi_i\}_{i \in I^C}$ не полно в R^m.

Выбираем ненулевые векторы $u, v \in R^m$ так, что $\langle u, \varphi_i \rangle = 0$ для всех $i \in I$ и $\langle v, \varphi_i \rangle = 0$ для всех $i \in I^C$. Для каждого i имеем:

$$\left|\langle u \pm v, \varphi_i \rangle\right|^2 = \left|\langle u, \varphi_i \rangle\right|^2 \pm 2 \langle u, \varphi_i \rangle \overline{\langle v, \varphi_i \rangle} + \left|\langle v, \varphi_i \rangle\right|^2 = \left|\langle u, \varphi_i \rangle\right|^2 + \left|\langle v, \varphi_i \rangle\right|^2 .$$

Отсюда следует, что $\left|\langle u + v, \varphi_i \rangle\right|^2 = \left|\langle u - v, \varphi_i \rangle\right|^2$ для каждого i, и $A(u + v) = A(u - v)$. Более того, так как u и v ненулевые, по предположению, то и $u + v \neq \pm(u - v)$. Таким образом, восстановления без фаз нет.

($\Leftarrow$) Предположим, что $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ не восстанавливает без фаз. Это означает, что существуют векторы $x, y \in R^m$ такие, что $x \neq \pm y$ и $A(x) = A(y)$. Обозначим $I := \{i : \langle x, \varphi_i \rangle = - \langle y, \varphi_i \rangle\}$.

Имеем: $\langle x + y, \varphi_i \rangle = 0$ для каждого $i \in I$. Иначе, если $i \in I^C$, тогда $\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle$ и тогда $\langle x - y, \varphi_i \rangle = 0$. По предположению, $x \neq \pm y$, поэтому $x + y \neq 0$ и $x - y \neq 0$. Таким образом, и $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ и $\{\varphi_i\}_{i \in I^C}$ не полны в R^m.

В R^{m} фаза вектора может быть равна 0 или π. Координаты векторов имеют одинаковые фазы, если знаки координат вектора x совпадают со знаками соответствующих координат y. При этом фаза 0 не определена. То есть, если $x = (a_1, a_2,..., a_m)$ и $y = (b_1, b_2,..., b_m)$, то x, y имеют одинаковую фазу, если:

1) Если $a_i \neq 0 \neq b_i$, то $a_i b_i > 0$.
2) Если $a_i = 0$, то соответствующее ему $b_i = 0$ (симметрично: Если $b_i = 0$, то соответствующее ему $a_i = 0$).

В противном случае векторы имеют разные фазы.

Тогда, если даны два вектора, для того чтобы определить одинаковые у них фазы или нет необходимо:

1) Проверить равенство всех индексов у нулевых координат векторов. Если все индексы нулевых координат первого вектора соответствуют индексам второго вектора (и наоборот), то проверка условия 2), иначе векторы имеют разные фазы.
2) Для ненулевых координат проверить выполнение: если $a_i b_i > 0 \Rightarrow$ векторы имеют одинаковые фазы, если $a_i b_i < 0$, то векторы имеют разные фазы.

Определение 1 в вещественном случае будет означать:

Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов в R^{m}, удовлетворяющих следующему свойству: для каждого x, y выполняется:

$$\left|\langle x, \varphi_i \rangle\right| = \left|\langle y, \varphi_i \rangle\right|,\ i = 1,2,\ldots,\ n$$

Тогда,

1) $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ осуществляет восстановление фаз, если существует $\theta = \pm 1$ такое, что
   a) Для $\theta = 1$ векторы x и y имеют одинаковые фазы.
   b) Для $\theta = -1$ векторы x и $-y$ имеют одинаковые фазы.
2) $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ осуществляет восстановление без фаз, если существует $\theta = \pm 1$ такое, что
   c) Для $\theta = 1 \Rightarrow x = y$.
   d) Для $\theta = -1 \Rightarrow x = -y$.

Теорема 2: Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов в R^{m}. Отображение $A : R^m / \{\pm 1\} \to R^n$ $(n > m)$ определено равенствами: $(A(x))(i) := \left|\langle x, \varphi_i \rangle\right|^2$, $i = 1,.., n$. Если $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ восстанавливает фазы, то он обладает свойством АП. В вещественном случае понятия эквивалентны.

Доказательство: Предположим, что Φ восстанавливает фазы, но не восстанавливает без фаз. Предположим что набор $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ не обладает свойством АП, то есть найдется $I \subseteq \{1,.., n\}$ такое, что ни $\{\varphi_i\}_{i \in I}$, ни $\{\varphi_i\}_{i \in I^C}$ не полно в R^m.

Выбираем ненулевые векторы $x = (a_1, a_2, ..., a_m),\ y = (b_1, b_2, ..., b_m) \in R^m$ такие, что $\langle x, \varphi_i \rangle = 0$ для всех $i \in I$ и $\langle y, \varphi_i \rangle = 0$ для всех $i \in I^C$. Тогда для некоторого i либо $\langle x, \varphi_i \rangle = 0$, либо $\langle y, \varphi_i \rangle = 0$. Зафиксируем $c \neq 0$, такую что для каждого $1 \le i \le n$

$$\left|\langle x + cy, \varphi_i \rangle\right| = \left|\langle x - cy, \varphi_i \rangle\right|.$$

Тогда

$$\left|\langle x + cy, \varphi_i \rangle\right|^2 = \left|\langle x - cy, \varphi_i \rangle\right|^2.$$

По предположению, Φ – восстанавливает фазы, а это значит что существует $|\theta| = 1$ такое, что $(x + cy)$ и $\theta(x - cy)$ имеют одинаковые фазы. Предположим, что существует $1 \le i_0 \le m$, такое что $a_{i0} \neq 0 \neq b_{i0}$ и пусть $c = \frac{-a_{i0}}{b_{i0}}$.

Тогда

$$(x + cy)_{i0} = a_{i0} + cb_{i0} = a_{i0} + \frac{-a_{i0}}{b_{i0}} b_{i0} = 0$$

и

$$(x - cy)_{i0} = a_{i0} - cb_{i0} = a_{i0} - \frac{-a_{i0}}{b_{i0}} b_{i0} = 2a_{i0} \neq 0\,.$$

Но этого не может быть, т.к. если x и y имеют одинаковые фазы, то $a_i = 0$ тогда и только тогда, когда $b_i = 0$.

Т.к. векторы x и y ненулевые, то последние два равенства возможны только и только тогда, когда либо $a_i = 0$, либо $b_i = 0$, $1 \le i \le m$. Пусть $I = \{1 \le i \le m : b_i = 0\}$ и $\{e_i\}_{i=1}^m$ - ортонормированный базис в R^m. Тогда

$$x + y = \sum_{i \in I} a_i e_i + \sum_{i \in I^C} b_i e_i \quad \text{и} \quad x - y = \sum_{i \in I} a_i e_i + \sum_{i \in I^C} (-b_i) e_i .$$

Тогда, существует $|\theta| = 1$ такое, что $(x + y)$ и $\theta(x - y)$ имеют одинаковые фазы и они равны. Пришли к противоречию.

Рассмотрим пример в R^2. Пусть $x = (a_1, a_2) \ne (0,0)$ и $y = (b_1, b_2) \ne (0,0)$.

В качестве $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^3$ возьмем фрейм Мерседес-Бенц в R^2, состоящий из 3-х векторов единичной длины, расположенных под углом 120º (рис. 1).

$$\varphi_1 = (0,1), \quad \varphi_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), \quad \varphi_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$$

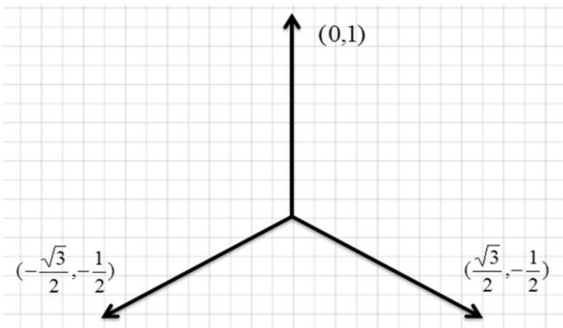

Рис. 1. Фрейм Мерседес-Бенц в R^2, состоящий из 3-х векторов единичной длины, расположенных под углом 120º

Тогда выполнение условия $|\langle x, \varphi_i \rangle| = |\langle y, \varphi_i \rangle|_{i=1}^3$ значит, что

$$\begin{cases} |\langle (a_1, a_2), (0,1) \rangle| = |\langle (b_1, b_2), (0,1) \rangle| \\ \left|\left\langle (a_1, a_2), (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \right\rangle\right| = \left|\left\langle (b_1, b_2), (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (a_1, a_2), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \right\rangle\right| = \left|\left\langle (b_1, b_2), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \right\rangle\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_2| = |b_2| \\ \left|\frac{\sqrt{3}}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2\right| \\ \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2\right| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a_2| = |b_2| \\ |\sqrt{3} a_1 - a_2| = |\sqrt{3} b_1 - b_2| \\ |\sqrt{3} a_1 + a_2| = |\sqrt{3} b_1 + b_2| \end{cases}.$$

Возводя в квадрат уравнения последней системы получим, что

$$a_1a_2 = b_1b_2 \text{ и } a_1^2 = b_1^2.$$

Отсюда следует, что первое равенство дает совпадение знаков (с точностью до сомножителя θ), а второе – совпадение модулей координат. Более того, из этих равенств получается и совпадение нулевых координат, если они есть.

Получаем, что либо вектор $x = y$, либо $x = -y$. Тогда, действительно, существует такое $\theta = \pm 1$ такое, что если $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^3$ – Фрейм Мерседес-Бенц , то он осуществляет восстановление фаз (т.к. имеют одинаковые знаки, а значит и фазы) и восстановление без фаз (так как $x = \theta y$) одновременно.

Если мы знаем модули координат векторов $x = (a_1, a_2)$ и $y = (b_1, b_2)$, то x и y могут быть одним из 4 векторов (рис. 2):

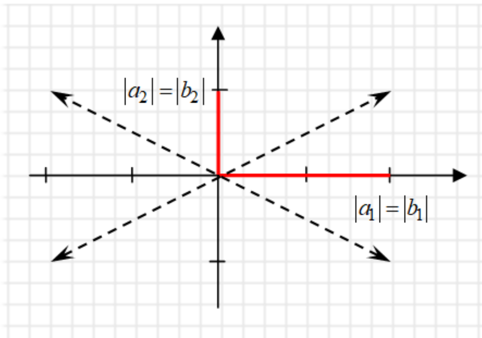

Рис. 2. Варианты векторов при известных модулях координат векторов x, y

После скалярного умножения на координаты фрейма, условие $a_1a_2 = b_1b_2$ дает ограничения на знаки координат (рис. 3):

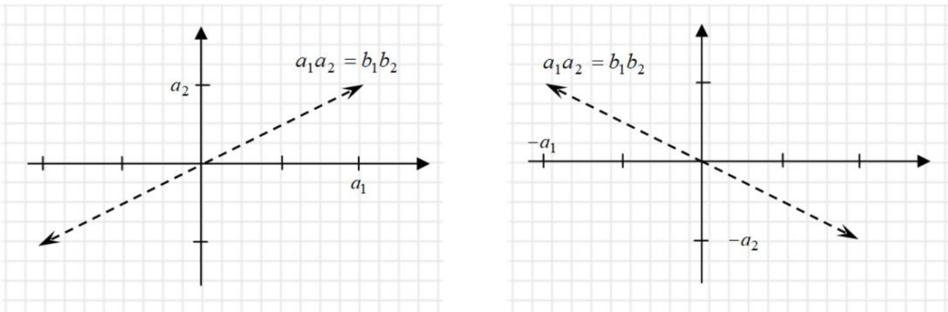

Рис. 3 Варианты векторов при известных $|\langle x, \varphi_i \rangle|, |\langle y, \varphi_i \rangle|$

Рассмотрим пример в C^2. В комплексном случае

$$x = (x_1, x_2) = (a + ib, c + id) \text{ и } y = (y_1, y_2) = (e + if, g + ih).$$

В качестве $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^5$ возьмем фрейм следующего вида:

$$\varphi_1 = (1,0),\ \varphi_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ \varphi_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ \varphi_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}i),\ \varphi_5 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}i)$$

Тогда выполнение условие $\left|\langle x,\varphi_i\rangle\right|=\left|\langle y,\varphi_i\rangle\right|_{i=1}^{5}$ значит, что

$$\begin{cases} \left|\langle (x_1,x_2),(1,0)\rangle\right| = \left|\langle (y_1,y_2),(1,0)\rangle\right| \\ \left|\left\langle (x_1,x_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| = \left|\left\langle (y_1,y_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (x_1,x_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| = \left|\left\langle (y_1,y_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (x_1,x_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| = \left|\left\langle (y_1,y_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (x_1,x_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| = \left|\left\langle (y_1,y_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| \end{cases}$$

Умножим скалярно векторы $(x,\varphi_i)=\langle (x_1,x_2),(\varphi_{i1},\varphi_{i2})\rangle=\sum\limits_{\substack{j=\overline{1,2}\\ i=\overline{1,5}}} x_j\overline{\varphi_{ij}}$ и запишем условие $\left|\langle x,\varphi_i\rangle\right|=\left|\langle y,\varphi_i\rangle\right|_{i=1}^{5}$ системой:

$$\begin{cases} |x_1|=|y_1| \\ |x_1-x_2|=|x_1-x_2| \\ |x_1+x_2|=|x_1+x_2| \\ |x_1+x_2\overline{i}\,|=|x_1+x_2\overline{i}\,| \\ |x_1-x_2\overline{i}\,|=|x_1-x_2\overline{i}\,| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_1|=|x_1| \\ |x_1-x_2|=|y_1-y_2| \\ |x_1+x_2|=|y_1+y_2| \\ |x_1-x_2 i\;|=|y_1-y_2 i\;| \\ |y_1+y_2 i\;|=|y_1+y_2 i\;| \end{cases}$$

Скомпонуем вещественные и комплексные части:

$$\begin{cases} a^2+b^2=e^2+f^2 \\ \|a-c+i(b-d)\|=|e-g+i(f-h)| \\ |a+c+i(b+d)|=|e+g+i(f+h)| \\ |a+d+i(b-c)|=|e+h+i(f-g)| \\ |a-d+i(b+c)|=|e-h+i(f+g)| \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} a^2+b^2=e^2+f^2 \\ (a-c)^2+(b-d)^2=(e-g)^2+(f-h)^2 \\ (a+c)^2+(b+d)^2=(e+g)^2+(f+h)^2 \\ (a+d)^2+(b-c)^2=(e+h)^2+(f-g)^2 \\ (a-d)^2+(b+c)^2=(e-h)^2+(f+g)^2 \end{cases}$$

Из последней системы получим:

$$c^2+d^2=g^2+h^2$$

А это значит, что модули вторых комплексных координат векторов x и y равны, т.к.

$$c^2+d^2=|x_2|=g^2+h^2=|y_2|$$

Итак, если брать фрейм вида $\varphi_1 = (1{,}0)$, $\varphi_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\varphi_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\varphi_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} i)$, $\varphi_5 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} i)$, то модули комплексных соответствующих координат векторов x и y равны, т.е.:

$$|x_1| = |y_1| = r_1 \text{ и } |x_2| = |y_2| = r_2$$

Теперь, запишем координаты векторов в полярной форме, с учетов равенства модулей координат:

$$x = (x_1, x_2) = (r_1 e^{i\cdot\varphi_1}, r_2 e^{i\cdot\varphi_2}) \text{ and } y = (y_1, y_2) = (r_1 e^{i\cdot\psi_1}, r_2 e^{i\cdot\psi_2})).$$

Тогда $\left|\langle x, \varphi_i \rangle\right| = \left|\langle y, \varphi_i \rangle\right|_{i=1}^{5}$ будет выглядеть так:

$$\begin{cases}
\left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph1}, r_2 e^{i\cdot ph2}), (1{,}0)\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph3}, r_2 e^{i\cdot ph4}), (1{,}0)\right\rangle\right| \\
\left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph1}, r_2 e^{i\cdot ph2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph3}, r_2 e^{i\cdot ph4}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| \\
\left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph1}, r_2 e^{i\cdot ph2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph3}, r_2 e^{i\cdot ph4}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| \\
\left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph1}, r_2 e^{i\cdot ph2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} i)\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph3}, r_2 e^{i\cdot ph4}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} i)\right\rangle\right| \\
\left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph1}, r_2 e^{i\cdot ph2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} i)\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1 e^{i\cdot ph3}, r_2 e^{i\cdot ph4}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} i)\right\rangle\right|
\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_1 = \psi_1 \text{ и } \varphi_2 = \psi_2$$

Получаем, что фазы векторов x и y равны с точностью до $2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Слабое восстановление фаз

Определение 1: Говорят, что два вектора $x = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $y = (b_1, b_2, ..., b_m)$ слабо восстанавливают фазы, если существует $|\theta| = 1$ такое, что

$$phase\ a_i = \theta\ phase\ b_i,\ \text{для всех } i = 1,2,\dots,m,\ \text{таких что } a_i \neq 0 \neq b_i.$$

В вещественном случае, если $\theta = 1$, мы говорим, что $x,\ y$ имеет слабо одинаковые знаки, и если $\theta = -1$ – слабо противоположные знаки.

Определение 2: Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ в H^{m} слабо восстанавливает фазы, если из равенств

$$\left|\langle x, \varphi_i \rangle\right| = \left|\langle y, \varphi_i \rangle\right|,\ i = 1,2,\dots,n$$

следует существование $|\theta| = 1$, такого, что

$$phase\ x_i = \theta\ phase\ y_i,\ \text{для всех } i = 1,2,\dots,m,\ \text{таких что } a_i \neq 0 \neq b_i.$$

Отличие слабого восстановления фаз от восстановления, данного в Определении 2 в том, что здесь может быть одновременно: $a_i = 0$ и $b_i \neq 0$.

Приведем пример, который слабо восстанавливает фазы и не восстанавливает фазы в смысле Определения 2. В пространстве R^{m} рассмотрим набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{m+1}$, координаты которого записаны в столбцы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{m\times(m+1)}$$

Тогда для каждого $x = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $y = (b_1, b_2, ..., b_m)$, если $\left|\langle x, \varphi_i \rangle\right|^2 = \left|\langle y, \varphi_i \rangle\right|^2$, следует, что $a_i a_j = b_i b_j$ для всех $i \neq j$.

Этот набор $(m+1)$-векторов в R^{m} будет слабо восстанавливать фазы.

Теорема 1: Пусть $x = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $y = (b_1, b_2, ..., b_m)$ – два вектора в R^{m}.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\operatorname{sgn}(a_i a_j) = \operatorname{sgn}(b_i b_j)$, для всех $1 \le i \neq j \le m$.

2) x, y имеют либо слабо одинаковые, либо слабо противоположные знаки.

Доказательство: $1) \Rightarrow 2)$ Пусть $I = \{1 \le i \le m : a_i = 0\}$ и $J = \{1 \le i \le m : b_i = 0\}$. Определим множество индексов K, в котором $a_i \neq 0 \neq b_i$: $K = [m] \setminus (I \cup J)$. То есть $i \in K$ тогда и только тогда, когда $a_i \neq 0 \neq b_i$. Пусть $i_0 = \min K$. Рассмотрим два случая:

Случай 1: $\operatorname{sgn} a_{i0} = \operatorname{sgn} b_{i0}$.

Для каждого $i_0 \neq k \in K$, $a_{i0} a_k = b_{i0} b_k$, здесь $\operatorname{sgn} a_k = \operatorname{sgn} b_k$. Так как остальные координаты x или y равны 0, то отсюда следует, что x, y имеют слабо одинаковые знаки.

Случай 2: $\operatorname{sgn} a_{i0} = -\operatorname{sgn} b_{i0}$.

Для каждого $i_0 \neq k \in K$, $a_{i0} a_k = b_{i0} b_k$, здесь $\operatorname{sgn} a_k = -\operatorname{sgn} b_k$. Снова, так как остальные координаты x или y равны 0, то отсюда следует, что x, y имеют слабо противоположные знаки.

$2) \Rightarrow 1)$ Очевидно.

Теорема 2: Пусть $x = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $y = (b_1, b_2, ..., b_m)$ – два вектора в R^{m} и пусть $a_i a_j = b_i b_j$ для всех $1 \le i \neq j \le m$. Тогда:

1) x, y имеют либо слабо одинаковые, либо слабо противоположные знаки.

2) Выполняется одно из условий:

a) Для $1 \le i \le m$ имеем, что $a_i = 0$ и $b_j = 0$ для всех $i \neq j$.

b) Для $1 \le i \le m$ имеем, что $b_i = 0$ и $a_j = 0$ для всех $j \neq i$.

c) Если a) и b) не выполняются, и если

$$I = \{1 \le i \le m : a_i \neq 0 \neq b_i\},$$

то выполняется следующее:

d) Если $i \in I^C$, тогда $a_i = b_i = 0$.

f) Если $i \in I$, то $|a_i| = |b_i|$.

Доказательство: 1) следует из Теоремы 7.

2a) Пусть $a_i = 0$, но $b_j \neq 0$. Тогда для каждого $j \neq i$ мы имеем, что $a_i a_j = 0 = b_i b_j$, и тогда $b_j = 0$.

2b) Симметрия по i.

c) Если a) и b) не выполняются, то по определению для каждого i либо a_i и b_i равны нулю, либо – не равны, что доказывает d).

Зафиксируем $i \in I$. Выберем $j \neq k \in I \setminus \{i\}$. Тогда

$$a_i a_j = b_i b_j \text{ и } a_i a_k = b_i b_k .$$

Умножим правую и левую часть первого из последних двух выражений на соответствующие у второго, тогда получим:

$$a_i^2 a_j a_k = b_i^2 b_j b_k .$$

Если a_j, a_k, b_j, b_k – не равны нулю, и $a_j a_k = b_j b_k$, то $a_i^2 = b_i^2$.

Заключение. В случае отсутствия фазовой информации восстановление сигнала теоретически возможно, если в качестве системы представления использовать избыточные системы, называемые фреймами. Хорошо выбранный фрейм может обеспечить численную устойчивость для восстановления сигнала и получение важных характеристик сигнала.

В действительном случае фрейм общего положения, состоящий из (2m-1)-векторов может при определенных условиях восстанавливать сигнал без фаз. В комплексном пространстве – для (4m-2)-векторов.

Семейство фреймов восстанавливает сигнал по абсолютному значению фреймовых коэффициентов в полиномиальное время.

Поставлен и частично решен вопрос об эквивалентности вариантов "восстановление без фаз" и "восстановление фаз", построены примеры восстановления сигнала в пространствах малой размерности.

Ведется поиск и теоретическое обоснование новых методов восстановления информации, скрытой в фазах передаваемых сигналов и недоступной для измерений общедоступными физическими приборами. В основе методики лежат последние достижения в исследовании полных линейно-зависимых систем, называемых фреймами пространств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Botelho-Andrade S., Casazza P., Van Nguyen H., Tremain J.* Phase retrieval verses phaseless reconstruction [Electronic resource] arXiv:1507.05815 [math. FA] – 21 Jul 2015.
2. *Shchelokov E.A.* Application of technologies of wireless data transmission on aerospace hardware // The Bulletin of the Ryazan state radio engineering university. – 2016. – No. 56. – P. 131-135.
3. *Bandeira A., Cahill J., Mixon D., Nelson A.* Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval // Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). – 2014. – Vol. 37, Issue 1. – P. 106-125.
4. *Balan R., Bodmann B.G., Casazza P.G., Edidin D.* Fast algorithems for signal reconstruction without phase // Proceedings of SPIE-Wavelets XII, San Diego 6701. – 2007. – 670111920-670111932.
5. *Balan R.. Casazza P., Edidin D.* On signal reconstruction without phase // Appl. Comput. Harmon. Anal. – 2006. – Vol. 20. – P. 345-356.
6. *Holmes R., Paulsen V.I.* Optimal frames for erasures // Lin. Alg. Appl. – 2004. – Vol. 377. – P. 31-51.
7. *Balan R., Bodman B.G., Casazza P.G. and Edidin D.* Painless reconstruction from magnitudes of frame coefficients, preprint.

8. *Novikov S.Ya., Fedina M.E.* Complete systems in problems of signal reconstruction // Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Vol. 1 "Perspective Information Technologies". – 2015. – P. 280-283 – (in Russian).
9. *Cameron P.J., Seidel J.J.* Quadratic forms over GF(2) // Indag. Math. – 1973. – Vol. 35. – P. 1-8.
10. *Cahill J., Mixon D.G.* Full Spark Frames. – Available online: arXiv:1110.3548.
11. *Kuleshova A.* Generic frame in problems for signal reconstruction without phase // ITNT 2016 Information Technology and Nanotechnology. – 2016. – P. 364-372. – URL: http://ceur-ws.org/Vol-1638/.
12. *Новиков С.Я., Федина М.Е.* Полные системы в задачах восстановления сигнала // Труды Международной научно-технической конференции. Т. 1 «Перспективные информационные технологии». – 2015. – С. 280-283.
13. *Balan R., Bodmann B.G., Casazza P.G., Edidin D.* Fast algorithems for signal reconstruction without phase // Proceedings of SPIE-Wavelets XII, San Diego 6701 (2007) 670111920-670111932.
14. *Новиков С.Я.* Восстановление сигнала по модулям коэффициентов // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2014): Труды Международной научно-технической конференции / под ред. С.А. Прохорова. – Самара: Изд-во Самарского научного центра РАН, 2014. – С. 223.
15. Планирование и обслуживание Wi-Fi сетей. – URL: http://www.tamos.ru/products/wifi-site-survey/.
16. *Novikov S.Ya., Lihobabenko M.A.* Frejmy konechnomernyh prostranstv. – Samara: Samara University, 2013. – 52 p.
17. *Novikov S.Ya.* Vosstanovlenie normy signala po normam proekcij // Perspective information technologies (PIT 2015): Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Vol. 1: Ed. S.A. Prokhorov. – Samara: Publishing house of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2015. – P. 279.
18. *Щелоков Е.А., Овсянников А.Н.* Применение технологий беспроводной передачи данных на изделиях ракетно-космической технике // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2016. – № 56. – С. 144-148.
19. *Семкин Н.Д., Куникин С.А., Щелоков Е.А.* Метод организации и принципы построения абонентской аппаратуры ретрансляции при помощи унифицированной аналитико-имитационной модели системы функционального контроля и диагностирования систем космических аппаратов // Конференция «Системный анализ, навигация и управление», 2015: Сб. тезисов докладов.
20. *Куникин С.А.* Анализ датчиковой аппаратуры и систем сбора информации, применяемых на борту космического аппарата // Материалы Всероссийской научно-технической конференции 18-20 мая, 2016 г. – С. 146-148.

REFERENCES

1. *Botelho-Andrade S., Casazza P., Van Nguyen H., Tremain J.* Phase retrieval verses phaseless reconstruction [Electronic resource] arXiv:1507.05815 [math. FA] – 21 Jul 2015.
2. *Shchelokov E.A.* Application of technologies of wireless data transmission on aerospace hardware, *The Bulletin of the Ryazan state radio engineering university*, 2016, No. 56, pp. 131-135.
3. *Bandeira A., Cahill J., Mixon D., Nelson A.* Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval, *Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA)*, 2014, Vol. 37, Issue 1, pp. 106-125.
4. *Balan R., Bodmann B.G., Casazza P.G., Edidin D.* Fast algorithems for signal reconstruction without phase, *Proceedings of SPIE-Wavelets XII, San Diego 6701*, 2007, 670111920-670111932.
5. *Balan R.. Casazza P., Edidin D.* On signal reconstruction without phase, *Appl. Comput. Harmon. Anal*., 2006, Vol. 20, pp. 345-356.
6. *Holmes R., Paulsen V.I.* Optimal frames for erasures, *Lin. Alg. Appl.*, 2004, Vol. 377, pp. 31-51.
7. *Balan R., Bodman B.G., Casazza P.G. and Edidin D.* Painless reconstruction from magnitudes of frame coefficients, preprint.
8. *Novikov S.Ya., Fedina M.E.* Complete systems in problems of signal reconstruction, *Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Vol. 1 "Perspective Information Technologies"*, 2015, pp. 280-283 (in Russian).

9. *Cameron P.J., Seidel J.J.* Quadratic forms over GF(2), *Indag. Math.*, 1973, Vol. 35, pp. 1-8.
10. *Cahill J., Mixon D.G.* Full Spark Frames. Available online: arXiv:1110.3548.
11. *Kuleshova A.* Generic frame in problems for signal reconstruction without phase, *ITNT 2016 Information Technology and Nanotechnology*, 2016, pp. 364-372. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1638/.
12. *Novikov S.Ya., Fedina M.E.* Polnye sistemy v zadachakh vosstanovleniya signala [A complete system for the task of signal restoration,] *Trudy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii. T. 1 «Perspektivnye informatsionnye tekhnologii»* [Proceedings of International scientific-technical conference. Vol. 1 "Promising information technologies"], 2015, pp. 280-283.
13. *Balan R., Bodmann B.G., Casazza P.G., Edidin D.* Fast algorithems for signal reconstruction without phase, *Proceedings of SPIE-Wavelets XII, San Diego 6701 (2007) 670111920-670111932*.
14. *Novikov S.Ya.* Vosstanovlenie signala po modulyam koeffitsientov [Signal recovery module of coefficients], *Perspektivnye informatsionnye tekhnologii (PIT 2014): Trudy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Advanced information technologies (AFT 2014): proceedings of the International scientific and technical conference], ed. by S.A. Prokhorova. Samara: Izd-vo Samarskogo nauchnogo tsentra RAN, 2014, pp. 223.
15. Planirovanie i obsluzhivanie Wi-Fi setey [Planning and maintenance of Wi-Fi networks]. Available at: http://www.tamos.ru/products/wifi-site-survey/.
16. *Novikov S.Ya., Lihobabenko M.A.* Frejmy konechnomernyh prostranstv. Samara: Samara University, 2013, 52 p.
17. *Novikov S.Ya.* Vosstanovlenie normy signala po normam proekcij, *Perspective information technologies (PIT 2015): Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Vol. 1: Ed. S.A. Prokhorov.* Samara: Publishing house of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2015, pp. 279.
18. *Shchelokov E.A., Ovsyannikov A.N.* Primenenie tekhnologiy besprovodnoy peredachi dannykh na izdeliyakh raketno-kosmicheskoy tekhnike [Use of technology for wireless transmission of data on rocket and space technology], *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Ryazan state Radiotechnical University], 2016, No. 56, pp. 144-148.
19. *Semkin N.D., Kunikin S.A., Shchelokov E.A.* Metod organizatsii i printsipy postroeniya abonentskoy apparatury retranslyatsii pri pomoshchi unifitsirovannoy analitiko-imitatsionnoy modeli sistemy funktsional'nogo kontrolya i diagnostirovaniya sistem kosmicheskikh apparatov [The method of organization and the principles of subscriber equipment relay with a unified analytical and simulation model of the system functional control and diagnosis of spacecraft systems], *Konferentsiya «Sistemnyy analiz, navigatsiya i upravlenie», 2015: Cb. tezisov dokladov* [Conference "System analysis, management and navigation", 2015: book of abstract].
20. *Kunikin S.A.* Analiz datchikovoy apparatury i sistem sbora informatsii, primenyaemykh na bortu kosmicheskogo apparata [Analysis of sensor equipment and data acquisition systems used on Board spacecraft], *Materialy Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii 18-20 maya, 2016 g.* [Materials of all-Russian scientific-technical conference may 18-20, 2016], pp. 146-148.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. Р.Н. Ахметов.

Щелоков Евгений Алексеевич – Самарский университет; e-mail: Riddick41666@mail.ru; 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34; тел.: 89272163049; кафедра радиотехники; аспирант.

Кулешова Антонина Александровна – e-mail: arletty@list.ru; тел.: 89179551038; кафедра теории вероятностей и математической статистики; аспирант.

Schelokov Evgeniy Alekseevich – Samara University; e-mail: riddick41666@mail.ru; 34, Moskovskoye Highway, Samara, 443086, Russia; phone: +79272163049; the department of radio engineering; graduate student.

Kuleshova Antonina Aleksandrovna – e-mail: arletty@list.ru; phone: +79179551038l; the department of probability theory and mathematical statistics; graduate student.