

23. Kolesnikov A.A. Metod integral'noy adaptatsii nelineynykh sistem na invariantnykh mnogoobraznykh: naikhudshie vozmushcheniya [The method of integrated adaptation of non-linear systems on the invariant manifolds: the worst perturbation], *Materialy 6-y nauchnoy konferentsii «Upravlenie i informatsionnye tekhnologii» (UIT-2010) OAO «Kontsern «TsNII «Elektropribor»* [Proceedings of the 6th conference "Control and Information Technologies" JSC "Concern" Central Research Institute "Elektropribor"], 2010, pp. 22-28.
24. Katsuhiko Ogata. Modern Control Engineering. Fifth Edition.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Г.Е. Веселов.

**Межаков Олег Геннадьевич** – Южный федеральный университет; e-mail: Lecter2005@yandex.ru; 347900, г. Таганрог, ул. Чехова, 2, к. 403; тел.: +79287775399; аспирант.

**Mezhakov Oleg Genad'evich** – South Federal University; e-mail: Lecter2005@yandex.ru; 2, Chekhov street, k. 403, Taganrog, 347900, Russia; phone: +79287775399; graduate student.

УДК 621.396.93

DOI 10.18522/2311-3103-2016-8-4858

**Н.Н. Кисель**

### **КОМБИНИРОВАННАЯ МЕТОДИКА ДЛЯ РАСЧЕТА ВОЗБУЖДЕНИЯ КРУГОВОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С НЕОДНОРОДНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ**

*В ряде прикладных задач технической электродинамики, таких как дефектоскопия, радиочастотная томография, возникает необходимость строгого анализа электромагнитных полей рассеяния от неоднородных магнитодиэлектрических объектов. Результаты таких исследований используются для разработки средств неразрушающего контроля, создания новых конструкционных материалов с заданными электродинамическими свойствами, при решении вопросов электромагнитной совместимости и, особенно, при изучении взаимодействия электромагнитных волн с биологическими структурами. При этом во многих случаях требуется рассматривать объекты сравнительно простой формы (многошлойная сфера, цилиндр), но со сложной внутренней структурой. Например, при микроволновых исследованиях в медицинских целях для минимизации паразитного рассеяния облучаемая модель (например, фантом с параметрами реальной биологической ткани) обычно размещается в цилиндрической ювете с согласующим раствором. В работе получено решение модельной двумерной задачи возбуждения кругового цилиндра из однородного диэлектрика, во внутренней области которого имеется неоднородный диэлектрический объект для случая  $H$ -поляризации падающего поля. Решение 2-мерной задачи возбуждения кругового цилиндра из однородного диэлектрика, во внутренней области которого имеется неоднородное включение, сведено к СЛАУ относительно значений поля в поперечном сечении включения. Особенность алгоритма состоит в сочетании строгих методов интегральных уравнений и собственных функций. Такой подход позволяет исключить интегрирование по объему однородной части или внешней границе структуры, повысив тем самым экономичность алгоритма. Использование функции Грина неограниченного пространства с параметрами вмещающей среды позволяет повысить вычислительную эффективность метода, поскольку неоднородным включением оказывается лишь область с ненулевым электродинамическим контрастом. При наличии сильного затухания в объеме однородной части цилиндра, характерного для биологических объектов, многие элементы матрицы СЛАУ будут близки к нулю, что можно учесть при составлении экономичных вычислительных алгоритмов для матриц ленточного типа. Предложенная методика может быть обобщена для трехмерной модели, в случае, если ограничивающее однородное пространство представляет собой сферу.*

*Электродинамическое поле; вычислительный алгоритм; цилиндр; диэлектрик; интегральное уравнение; собственные функции.*

N.N. Kisel

**COMBINED METHOD FOR CALCULATION OF EXCITATION  
OF CIRCULAR DIELECTRIC CYLINDER WITH A HETEROGENEOUS  
OBJECT**

*In a number of applied problems of electrodynamics such as defectoscopy and RF imaging appears a necessity for rigorous analysis of electromagnetic fields scattering by inhomogeneous magnetodielectric objects. The results of these studies are used to develop non-destructive testing tools, create new structural materials with desired electrodynamic properties, solve the electromagnetic compatibility issues, and, particularly, study the interaction of electromagnetic waves with biological structures. Besides, in many cases it is necessary to consider the objects of relatively simple form (layered sphere, cylinder), but with a complex internal structure. For example, in microwave studies for medical purposes in order to minimize the parasitic scattering the irradiated model (such as a phantom with real biological tissue parameters) is usually placed in a cylindrical cell with a matching solution. In this paper we solve the model 2-dimensional problem of excitation of a circular cylinder made of a homogeneous dielectric in the inner area of which the inhomogeneous dielectric object exists for the case of H-polarization of the incident field. Solution of 2-dimensional problem of excitation of a circular cylinder made of a homogeneous dielectric with a heterogeneous object in its inner area is reduced to a system of linear algebraic equations for the values of the field in the cross-sectional inclusion. The peculiarity of the algorithm is a combination of rigorous methods of integral equations and their own functions. This approach allows eliminating the homogeneous part or the structure external border integration over the volume, thereby increasing the efficiency of the algorithm. Using Green's function of unlimited space with the parameters of the host medium can improve the computational efficiency of the method, since the heterogeneous object is an area with non-zero electrodynamic contrast. In the presence of a strong attenuation in the volume of the cylinder homogeneous part, which is typical for biological objects, many of the matrix elements of the linear equations system would be close to zero, which can be taken into account when designing the efficient computational algorithms for tape type matrices. The proposed method can be extended to a three-dimensional model in case when the limiting homogeneous space is a sphere.*

*Electromagnetic field; computation algorithm; cylinder; dielectric; integral equation; eigenfunctions.*

**Введение.** Для решения задач возбуждения сложных неоднородных структур используются численные методы [1–15]. Структура разбивается на элементарные объемы, внутри которых электрофизические параметры не меняются. Для каждого элементарного объема записывается интегральное уравнение, которое решается численно методом моментов. Такой подход позволяет получить решение для сложных неоднородных тел, однако, основной недостаток такого метода большие вычислительные затраты [1].

Для некоторых прикладных задач требуется рассчитать распределение электромагнитного поля внутри или вблизи протяженного объекта простой формы, который содержит неоднородное включение относительно небольших размеров [16–18]. Ниже рассмотрен способ решения подобных задач на примере расчета электромагнитного поля в объеме кругового цилиндра из однородного диэлектрика, который содержит неоднородный диэлектрический объект для случая Н-поляризации падающего поля. В работах [16–22] аналогичный подход использован для случая Е-поляризации падающего поля. Особенностью методики является комбинирование строгих методов объемных интегральных уравнений (ИУ) и собственных функций (МСФ), которое позволяет одновременно использовать достоинства метода интегральных уравнений, и высокую вычислительную экономичность алгоритмов МСФ. Разработанную модель можно применить при решении задач электромагнитной совместимости, при проектировании конструкционных материалов с заданными электрофизическими свойствами и, особенно, при изучении воздействия электромагнитных волн на биологические структуры. В последнем случае исследуемый биологический объект или его контрастная часть моде-

лируется неоднородным включением, а вмещающий круговой цилиндр служит моделью кюветы с согласующим раствором, по периметру которой обычно размещаются антенны-аппликаторы. При этом востребованными оказываются главные достоинства алгоритма – строгость метода решения и повышенная экономичность, что приобретает особую важность, если учесть реальные электрические размеры конструкции и ограничения на время обработки информации.

**Постановка задачи.** В свободном пространстве расположен круговой цилиндр радиуса  $R$  из однородного диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ , рис. 1. Прямоугольная декартова система координат  $(x, y, z)$  и связанная с ней цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$  введены так, что ось  $Oz$  совпадает с осью цилиндра. Внутренняя область цилиндра содержит неоднородное диэлектрическое включение  $V_j$ , которое характеризуется диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(x, y)$ , нормированной к  $\varepsilon_2$ . Геометрические и электродинамические параметры структуры от  $z$  не зависят. На цилиндр перпендикулярно образующей под углом  $\varphi_0$  падает плоская электромагнитная волна. Требуется определить поле внутри цилиндра, в объеме включения и во внешнем пространстве.

**Решение задачи.** Рассматривается случай Н-поляризации падающего поля  $\mathbf{H}^i = \mathbf{i}_z H_z^i$ . Для плоской волны, падающей перпендикулярно оси  $Oz$  под углом  $\varphi_0$  к оси  $Ox$ , можно записать:

$$\begin{aligned} H_z^i &= H_0 \exp[ik_1(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)] = H_0 \exp[ik_1 r \cos(\varphi - \varphi_0)] = \\ &= H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_1 r) \exp[-in(\varphi - \varphi_0)] \end{aligned}$$

где  $k_1$  – коэффициент распространения в окружающем (свободном) пространстве,  $J_n(\cdot)$  – функция Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка,  $H_0$  – амплитуда падающей волны.

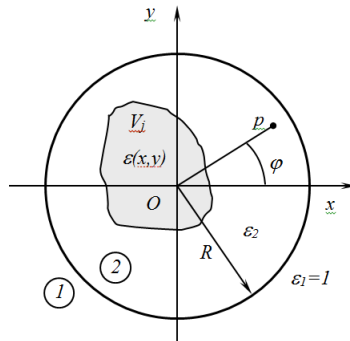


Рис. 1. Постановка задачи

Дифракционное поле внутри кругового цилиндра, при  $r \leq R$  определяется наличием скачка диэлектрических параметров среды на границе  $r = R$  и неоднородного включения во внутренней области цилиндра. Полное поле  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{i}_z H_{2z}$  представляется для этой области в виде суммы двух компонентов, один из которых записывается как разложение в ряд по функциям Бесселя с неизвестными коэффициентами  $b_n$ , а другой представляет собой поле токов поляризации  $\mathbf{j}^{pol}$ , заданных в объеме неоднородного включения  $V_j$ :

$$H_{2z} = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n b_n J_n(k_2 r) \exp[-in(\varphi - \varphi_0)] + H_z^{pol},$$

где  $k_2$  – коэффициент распространения в среде 2 с параметрами внутренней области однородного цилиндра  $(\varepsilon_0\varepsilon_2, \mu_0)$ ,  $k_2^2 = k_1^2 \cdot \varepsilon_2$ ,  $H_z^{pol}$  – поле токов поляризации  $\mathbf{j}^{pol} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2(\varepsilon - 1)\mathbf{E}_2$ .

Поле, рассеянное цилиндром с включением, представляется в виде

$$\mathbf{H}^s = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n c_n H_n^{(2)}(k_1 r) \exp[-in(\varphi - \varphi_0)],$$

где  $H_n^{(2)}(\cdot)$  – функция Ханкеля 2-го рода. Составляющие напряженности электрического поля можно записать через уравнения Максвелла:

падающее поле

$$\mathbf{E}^i = \frac{H_0}{i\omega\varepsilon_{a1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp[-in(\varphi - \varphi_0)] \left( \mathbf{i}_r \left(-\frac{in}{r}\right) J_n(k_1 r) - \mathbf{i}_\varphi k_1 J_n'(k_1 r) \right),$$

рассеянное поле при  $r \geq R$

$$\mathbf{E}^s = \frac{H_0}{i\omega\varepsilon_{a1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n c_n \exp[-in(\varphi - \varphi_0)] \left( \mathbf{i}_r \left(-\frac{in}{r}\right) H_n^{(2)}(k_1 r) - \mathbf{i}_\varphi k_1 H_n^{(2)'}(k_1 r) \right),$$

поле внутри цилиндра при  $r \leq R$

$$H_{2z} = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n b_n J_n(k_2 r) f(\varphi) + H_z^{pol},$$

поле токов поляризации (в декартовой системе координат):

$$E_x^{pol} = k_2^2 \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2x} G dV + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2x} G dV + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2y} G dV,$$

$$E_y^{pol} = k_2^2 \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2y} G dV + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2y} G dV + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2x} G dV,$$

$$H_z^{pol} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2y} G dV - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2x} G dV. \quad (3)$$

Неизвестные коэффициенты  $b_n$ ,  $c_n$  определяются из представлений полного поля в среде 1 (при  $r \geq R$ )

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s, \quad r \geq R.$$

Благодаря применению граничных условий (ГУ)

$$E_\varphi(r = R^{+0}) = E_{2\varphi}(r = R^{-0}) \text{ и } H_z(r = R^{+0}) = H_{2z}(r = R^{-0}).$$

В результате получаем уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{H_0 k_2}{i\omega\varepsilon_{a2}} \sum_n i^n e^{-in(\varphi - \varphi_0)} b_n J_n'(k_2 R) + E_\varphi^{nol} \Big|_{r=R} = \\ = -\frac{H_0 k_1}{i\omega\varepsilon_{a1}} \sum_n i^n e^{-in(\varphi - \varphi_0)} J_n'(k_1 R) - \frac{H_0 k_1}{i\omega\varepsilon_{a1}} \sum_n i^n e^{-in(\varphi - \varphi_0)} c_n H_n^{(2)'}(k_1 R). \\ \quad \quad \quad H_0 \sum_n i^n e^{-in(\varphi - \varphi_0)} b_n J_n(k_2 R) + H_z^{nol} \Big|_{r=R} = \\ = H_0 \sum_n i^n e^{-in(\varphi - \varphi_0)} J_n(k_1 R) + H_0 \sum_n i^n e^{-in(\varphi - \varphi_0)} c_n H_n^{(2)}(k_1 R) \end{array} \right. \quad (4)$$

Для представления составляющей  $H_z^{pol}$  при  $r = R$  используется представление функции Грина  $G$  в цилиндрической системе координат [2], при  $r > r'$

$$G = \frac{1}{8\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-in(\varphi - \varphi')] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ih(z - z')] J_n(vr') H_n^{(2)}(vr) dh, \quad (5)$$

$$v = -i\sqrt{h^2 - k_2^2}$$

Поскольку рассматривается двумерная модельная задача в (5) можно выполнить аналитическое интегрирование по переменным  $z'$  и  $h$ . Далее используем представление экспоненты в виде двух множителей

$$\exp[-in(\varphi - \varphi')] = \exp[-in(\varphi_0 - \varphi')] \exp[-in(\varphi - \varphi_0)]$$

и выполняем дифференцирование в (3) в цилиндрической системе координат. Представив площадь поперечного сечения объема  $V_j$   $S'$  в виде  $M$  элементарных

площадок  $\{S_j\}_{j=1}^M$  можно вычислить интеграл по  $S'$ , например, по составной квадратурной формуле (прямоугольников или Симпсона), в результате получим выражение при использовании формулы прямоугольников

$$H_z^{pol} = \frac{iH_0}{W_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n f(\varphi) (e_n^{(2)} (H_n^{(2)'}(k_2 r) c + \frac{in}{k_2 r} \times \\ \times H_n^{(2)}(k_2 r) s - e_n^{(1)} (H_n^{(2)'}(k_2 r) s - \frac{in}{k_2 r} H_n^{(2)}(k_2 r) c));$$

где

$$e_n^{(1)} = -\frac{ik_2^2}{4H_0} \int_{S_j} i^{-n} (\varepsilon - 1) E_{2x} \exp[-in(\varphi_0 - \varphi')] J_n(k_2 r') dS' = \sum_{m=1}^M E_{2xm} d_{nm},$$

$$e_n^{(2)} = -\frac{ik_2^2}{4H_0} \int_{S_j} i^{-n} (\varepsilon - 1) E_{2y} \exp[-in(\varphi_0 - \varphi')] J_n(k_2 r') dS' = \sum_{m=1}^M E_{2ym} d_{nm},$$

$$d_{nm} = -\frac{ik_2^2}{4H_0} i^{-n} \int_{S_m} (\varepsilon_m - 1) \exp[-in(\varphi_0 - \varphi')] J_n(k_2 r') dS',$$

$E_{2xm}$  и  $E_{2ym}$  – составляющие поля в центре  $m$ -й ячейки  $(r_m, \varphi_m)$ , нормированные к  $H_0$ ,  $\varepsilon_m$  – диэлектрическая проницаемость включения в пределах  $S_m$ , отнесенная к диэлектрической проницаемости среды 2.

Чтобы из системы уравнений (4) выразить  $b_n$ , представим электрическое и магнитное поля токов поляризации в виде рядов  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \psi_n(r) \exp[-in(\varphi - \varphi_0)]$ , выде-

лив таким образом зависимость от азимутальной координаты  $\varphi$ . Определяя коэффициенты комплексного ряда Фурье с использованием свойств ортогональности тригонометрических функций, получим окончательное выражение для  $H_z^{pol}$ :

$$\begin{aligned}
 H_z^{pol} = & \frac{iH_0}{2W_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp[-in(\varphi - \varphi_0)] \left( e_{n+1}^{(2)} i \exp(i\varphi_0) (H_{n+1}^{(2)}(k_2r) + \frac{n+1}{k_2r} \times \right. \\
 & \times H_{n+1}^{(2)}(k_2r)) - e_{n+1}^{(1)} \exp(i\varphi_0) (H_{n+1}^{(2)}(k_2r) + \frac{n+1}{k_2r} H_{n+1}^{(2)}(k_2r)) + e_{n-1}^{(2)} \times \\
 & \times \frac{\exp(-i\varphi_0)}{i} (H_{n-1}^{(2)}(k_2r) - \frac{n-1}{k_2r} H_{n-1}^{(2)}(k_2r)) - \\
 & \left. - e_{n-1}^{(1)} \exp(-i\varphi_0) (H_{n-1}^{(2)}(k_2r) - \frac{n-1}{k_2r} H_{n-1}^{(2)}(k_2r)) \right).
 \end{aligned}$$

Далее определяется  $E_\varphi^{pol} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_{a2}} \left( -\frac{\partial H_z^{pol}}{\partial r} \right)$  и ГУ (4) удовлетворяются по-

членно, что приводит к системе из двух уравнений с двумя неизвестными коэффициентами. Решая ее относительно  $b_n$ , получим

$$\begin{aligned}
 b_n = & b_n^{(1)} + b_n^{(2)} e_{n-1}^{(1)} + b_n^{(3)} e_{n+1}^{(1)} + b_n^{(4)} e_{n-1}^{(2)} + b_n^{(5)} e_{n+1}^{(2)}, \quad (6) \\
 b_n^{(1)} = & A1_n / C_n, \quad b_n^{(2)} = A2_n / C_n, \quad b_n^{(3)} = A3_n / C_n, \\
 b_n^{(4)} = & -A2_n / (iC_n), \quad b_n^{(5)} = -A3_n i / C_n, \\
 A1_n = & J_n(k_1R) H_n^{\prime(2)}(k_1R) - H_n^{(2)}(k_1R) J_n'(k_1R), \\
 C_n = & J_n(k_2R) H_n^{\prime(2)}(k_1R) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_n^{(2)}(k_1R) J_n'(k_2R), \\
 A2_n = & \left( \frac{H_n^{(2)}(k_1R)}{2iW_0} (H_{n-1}^{(2)}(k_2R) - \frac{n-1}{k_2R} H_{n-1}^{(2)}(k_2R) + \frac{n-1}{(k_2R)^2} \times \right. \\
 & \times H_{n-1}^{(2)}(k_2R)) - \frac{H_n^{\prime(2)}(k_1R)}{2iW_2} (H_{n-1}^{(2)}(k_2R) - \frac{n-1}{k_2R} H_{n-1}^{(2)}(k_2R)) \exp[-i\varphi_0] \\
 A3_n = & \left( \frac{H_n^{(2)}(k_1R)}{2iW_0} (H_{n+1}^{(2)}(k_2R) + \frac{n+1}{k_2R} H_{n+1}^{(2)}(k_2R) - \frac{n+1}{(k_2R)^2} \times \right. \\
 & \times H_{n+1}^{(2)}(k_2R)) - \frac{H_n^{\prime(2)}(k_1R)}{2iW_2} (H_{n+1}^{(2)}(k_2R) + \frac{n+1}{k_2R} H_{n+1}^{(2)}(k_2R)) \exp[i\varphi_0]
 \end{aligned}$$

Расположив теперь точку наблюдения поля  $p$  в объеме включения  $V_j$ , получим систему ИУ

$$\begin{aligned}
 E_{2x} = & \frac{H_0 k_2}{i\omega\varepsilon_{a2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n b_n \left( J_n'(k_2r) \sin \varphi - \frac{in}{k_2r} J_n(k_2r) \cos \varphi \right) e^{-in(\varphi - \varphi_0)} + \\
 & + \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2x} G dV + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2y} G dV \\
 E_{2y} = & -\frac{H_0 k_2}{i\omega\varepsilon_{a2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n b_n \left( J_n'(k_2r) \cos \varphi + \frac{in}{k_2r} J_n(k_2r) \sin \varphi \right) e^{-in(\varphi - \varphi_0)} + \\
 & + \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2y} G dV + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2x} G dV
 \end{aligned} \quad (7)$$

Интеграл в правой части (7) удобно представить в виде суммы, применив то же разбиение площади сечения неоднородного включения  $S'$  на элементы  $\{S_m\}_{m=1}^M$  и, соответственно,  $V_j$  - на элементы  $\{V_m\}_{m=1}^M$ . Тогда получим:

$$k_2^2 \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2x} G dV = \sum_{m=1}^M E_{2xm} g_{lm}^{(1)}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2x} G dV = \sum_{m=1}^M E_{2xm} g_{lm}^{(2)},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2y} G dV = \sum_{m=1}^M E_{2ym} g_{lm}^{(3)}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{V_j} (\varepsilon - 1) E_{2y} G dV = \sum_{m=1}^M E_{2ym} g_{lm}^{(4)}.$$

При расчете  $g_{lm}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1,4}$  используется представление функции Грина  $G$  в цилиндрической системкоординат и аналитически выполняется интегрирование по  $z', h$ . Далее в рамках использования метода прямоугольников предполагается, что в пределах  $S_m$  диэлектрическая проницаемость включения, нормированная к диэлектрической проницаемости среды 2,  $\varepsilon_m = const$ . Переход к полярной системе координат позволяет вычислить интеграл по квадратной площадке  $S_m$  аналитически за счет замены ее кругом с той же площадью сечения и радиусом  $a_m = \sqrt{S_m / \pi}$  аналогично [3, 4].

Записывая теперь систему ИУ (7) для каждой из точек наблюдения  $p_l, l = 1, 2, \dots, M$ , получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений поля в этих точках и в пределах элементов разбиения  $S_l$ :

$$\begin{cases} E_{2xl} - \sum_{m=1}^M E_{2xm} a_{lm}^{(1)} - \sum_{m=1}^M E_{2ym} a_{lm}^{(2)} = f_l^{(1)} \\ E_{2yl} - \sum_{m=1}^M E_{2ym} a_{lm}^{(3)} - \sum_{m=1}^M E_{2xm} a_{lm}^{(4)} = f_l^{(2)} \end{cases},$$

Расчетные соотношения для коэффициентов этой СЛАУ можно записать в следующем виде:

$$f_l^{(1)} = \frac{H_0 k_2}{i \omega \varepsilon_{a2}} (b_0^{(1)} J_0'(k_2 r_l) \sin \varphi_l + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n b_n^{(1)} \times$$

$$\times \left( J_n'(k_2 r_l) \sin \varphi_l \cos(n(\varphi_l - \varphi_0)) - \frac{n}{k_2 r_l} J_n(k_2 r_l) \cos \varphi_l \sin(n(\varphi_l - \varphi_0)) \right),$$

$$f_l^{(2)} = -\frac{H_0 k_2}{i \omega \varepsilon_{a2}} (b_0^{(1)} J_0'(k_2 r_l) \cos \varphi_l + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n b_n^{(1)} \times$$

$$\times \left( J_n'(k_2 r_l) \cos \varphi_l \cos(n(\varphi_l - \varphi_0)) + \frac{n}{k_2 r_l} J_n(k_2 r_l) \sin \varphi_l \sin(n(\varphi_l - \varphi_0)) \right),$$

$$a_{lm}^{(1)} = g_{lm}^{(1)} + g_{lm}^{(2)} + \frac{k_2^3}{4i \omega \varepsilon_{a2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi_l - \varphi_m)} (J_n'(k_2 r_l) \sin \varphi_l - \frac{in}{k_2 r_l} J_n(k_2 r_l) \times$$

$$\times \cos \varphi_l) (\beta_n^{(2)} e^{i(\varphi_0 - \varphi_m)} J_{n-1}(k_2 r_m) - \beta_n^{(3)} e^{-i(\varphi_0 - \varphi_m)} J_{n+1}(k_2 r_m)) \frac{(\varepsilon_m - 1) \Delta S_m}{J_{n+1}^2(k_2 R)},$$

$$\begin{aligned}
 a_{lm}^{(2)} &= g_{lm}^{(4)} + \frac{k_2^3}{4i\omega\varepsilon_{a2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi_l - \varphi_m)} (J'_n(k_2 r_l) \sin \varphi_l - \frac{in}{k_2 r_l} J_n(k_2 r_l) \cos \varphi_l) \\
 &\quad (\beta_n^{(4)} e^{i(\varphi_0 - \varphi_m)} J_{n-1}(k_2 r_m) - \beta_n^{(5)} e^{-i(\varphi_0 - \varphi_m)} J_{n+1}(k_2 r_m)) \frac{(\varepsilon_m - 1)\Delta S_m}{J_{n+1}^2(k_2 R)}, \\
 a_{lm}^{(3)} &= g_{lm}^{(1)} + g_{lm}^{(3)} - \frac{k_2^3}{4i\omega\varepsilon_{a2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi_l - \varphi_m)} (J'_n(k_2 r_l) \cos \varphi_l + \frac{in}{k_2 r_l} J_n(k_2 r_l) \times \\
 &\quad \times \sin \varphi_l (\beta_n^{(4)} e^{i(\varphi_0 - \varphi_m)} J_{n-1}(k_2 r_m) - \beta_n^{(5)} e^{-i(\varphi_0 - \varphi_m)} J_{n+1}(k_2 r_m))) \frac{(\varepsilon_m - 1)\Delta S_m}{J_{n+1}^2(k_2 R)}, \\
 a_{lm}^{(4)} &= g_{lm}^{(4)} - \frac{k_2^3}{4i\omega\varepsilon_{a2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi_l - \varphi_m)} (J'_n(k_2 r_l) \cos \varphi_l + \frac{in}{k_2 r_l} J_n(k_2 r_l) \sin \varphi_l) \\
 &\quad (\beta_n^{(2)} e^{i(\varphi_0 - \varphi_m)} J_{n-1}(k_2 r_m) - \beta_n^{(3)} e^{-i(\varphi_0 - \varphi_m)} J_{n+1}(k_2 r_m)) \frac{(\varepsilon_m - 1)\Delta S_m}{J_{n+1}^2(k_2 R)}, \\
 \beta_n^{(2)} &= A2_n \cdot J_{n+1}^2(k_2 R) / C_n, \quad \beta_n^{(3)} = A3_n \cdot J_{n+1}^2(k_2 R) / C_n, \\
 \beta_n^{(4)} &= -A2_n \cdot J_{n+1}^2(k_2 R) / (iC_n), \quad \beta_n^{(5)} = -A3_n i \cdot J_{n+1}^2(k_2 R) / C_n.
 \end{aligned}$$

После решения СЛАУ и определения  $\{E_m\}_{m=1}^M$  (т.е. поля в объеме  $V_j$ ) можно с помощью (6) вычислить коэффициенты  $b_n$  и  $c_n$ , что позволяет легко рассчитать поле как внутри цилиндра, так и вне его.

Для тестирования разработанного алгоритма и вычислительных программ использовалось решение задачи о падении плоской волны на двухслойный круговой диэлектрический цилиндр, полученное стандартным методом собственных функций. Результаты расчетов с высокой точностью совпали.

**Заключение.** Решение 2-мерной задачи возбуждения кругового цилиндра из однородного диэлектрика, во внутренней области которого имеется неоднородное включение, сведено к СЛАУ относительно значений поля в поперечном сечении включения.

Совместное использование метода объемных ИУ и разложения полей по собственным функциям кругового цилиндра позволило исключить интегрирование по объему однородной части (в рамках метода объемных ИУ) или границе раздела со свободным пространством (при использовании поверхностного ИУ) и за счет этого повысить экономичность алгоритма. Использование функции Грина неограниченного пространства с параметрами вмещающей среды позволяет повысить вычислительную эффективность метода, поскольку неоднородным включением оказывается лишь область с ненулевым электродинамическим контрастом. При наличии сильного затухания в объеме однородной части цилиндра многие элементы матрицы СЛАУ будут близки к нулю, что можно учесть при составлении экономичных вычислительных алгоритмов для матриц ленточного типа.

Предложенный алгоритм позволяет исключить интегрирование по объему однородной части или внешней границе структуры, повысив тем самым экономичность алгоритма. Предложенная методика может быть обобщена для трехмерной модели, в случае, если ограничивающее однородное пространство представляет собой сферу.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рудаков М.Л. Модели биологических сред при исследовании взаимодействий с электромагнитными полями в диапазоне радиочастот // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. – 1998. – № 2. – С. 68-75.
2. Ильинский А.С., Некрасов Л.М. Дифракция плоской электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом цилиндре // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40, № 5. – С. 695-703.
3. Мукомолов А.И. Численный метод решения задач электромагнитного рассеяния на трехмерном магнитодиэлектрическом теле произвольной формы // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40, № 6. – С. 875-880.
4. Jensen M.A., Freeze J.D. A recursive Green's function method for boundary integral analysis of inhomogeneous domains // IEEE Trans. – 1998. – Vol. AP-46, No. 12. – P. 1810-1818.
5. Lazzi G., Gandhi O.P. Realistically tilted and truncated anatomically based models of the human head for dosimetry of mobile telephones // IEEE Trans. – 1997. – Vol. EMC-39, No. 1. – P. 55-60.
6. Кисель В.Н., Обуховец В.А. Вычислительная модель СВЧ интроскопии // Рассеяние электромагнитных волн / под ред. Б.М. Петрова. – Таганрог: Радиотехнический ин-т, 1999. – Вып. 11. – С. 42-47.
7. Candy V.J., Pichot Ch. Active microwave imaging: A model-based approach // IEEE Trans. – 1991. – Vol. AP-39, No. 3. – P. 285-290.
8. Colburn J.S., Rahmat-Samii Ya. Human Proximity Effects on Circular Polarized Handset Antennas in Personal Satellite Communications // IEEE Trans. on AP. – 1998. – Vol. 46, No. 6. – P. 813-820.
9. Richmond J.H. Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape // IEEE Trans on AP. – 1965. – Vol. 13, No. 3. – P. 334-341.
10. Lin James C. Specific absorption rates (SARs) Induced in head tissues by microwave radiation from cell phones // IEEE AP Magazine. – 2000. – Vol. 42, No. 5. – P. 138-140.
11. Кисель В.Н., Обуховец В.А., Кисель Н.Н. Реконструкция строения пронцаемых тел в диапазоне СВЧ // Антенны. – 2002. – Вып. 4 (59). – С. 42-45.
12. Кисель Н.Н., Клименко П.П. Математическое моделирование взаимодействия электромагнитного поля с биологическими средами: монография. Депонирование ВИНТИ № 1380-В 2006 от 14.11.06г. г. Москва. – 89 с.
13. Кисель Н.Н., Грищенко С.Г. Моделирование биологической структурированной ткани в виде решетки резистивных нитей // 24th Int. Crimean Conference "Microwave & Telecommunication Technology" (CriMiCo'2014). 2014, 7-13 September, Sevastopol, Crimea, Russia. – P. 1065-1066.
14. Кисель Н.Н., Грищенко С.Г. Использование эффекта деполяризации электромагнитной волны для задач медицинской диагностики // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 11 (160). – С. 99-109.
15. Кисель Н.Н. Исследование распределения электромагнитных полей внутри биологических объектов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2016. – № 3 (176). – С. 65-75.
16. Kisel' V.N., Alpatova A.V., Kisel' N.N. Combined utilization of eigenfunctions and integral equations to calculate fields inside inhomogeneous dielectric bodies // Conf. Proc. 2000 Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET2000), Kharkov, Ukraine, Sept. 11 15. – 2000. – Vol. 2. – P. 459-461.
17. Кисель Н.Н., Алпатова А.В., Кисель В.Н. Сочетание методов интегральных уравнений и собственных функций для расчета возбуждения кругового диэлектрического цилиндра с неоднородным включением // Антенны. – 2001. – Вып. 4 (50). – С. 54-60.
18. Alpatova A.V., Kisel' N.N. Electromagnetic field calculation inside the dielectric sphere with inhomogeneous insertion // 2001 IEEE Antennas and Propagation Intern. Symp. Dig., Boston, July 2001. – Vol. 1. – P. 220-223.
19. Кисель В.Н., Алпатова А.В., Кисель Н.Н. Эффективный алгоритм расчета электромагнитного поля в неоднородном цилиндре // Известия ТРТУ. – 2001. – № 1 (19). – С. 28-34.
20. Kisel N.N., Alpatova A.V., Kisel' V.N. A New Effective Algorithm For Heterogeneous Dielectric // EMC 2002, International Wrocław Symposium And Exhibition On Electromagnetic. – Vol. 1. – P. 234-240.

21. Кисель Н.Н., Аллатова А.В., Кисель В.Н. Возбуждение неоднородного кругового диэлектрического цилиндра // Рассеяние электромагнитных волн / под ред. Б.М. Петрова. – Таганрог: Радиотехнический ун-т, 2002. – Вып. 12. – С. 5-8.
22. Кисель Н.Н., Аллатова А.В., Кисель В.Н. Сочетание методов интегральных уравнений и собственных функций для расчета возбуждения кругового диэлектрического цилиндра с неоднородным включением // Антенны. – 2001. – Вып. 4 (50). – С. 54-60.

#### REFERENCES

1. Rudakov M.L. Modeli biologicheskikh sred pri issledovanii vzaimodeystviy s elektromagnitnymi polyami v diapazone radiochastot [Models of biological environments in the study of the interactions of electromagnetic fields in the radio frequency range], *Zarubezhnaya radioelektronika. Uspexi sovremennoy radioelektroniki* [Foreign Radioelectronics. Successes of modern radio electronics], 1998, No. 2, pp. 68-75.
2. Il'inskiy A.S., Nekrasov L.M. Difraktsiya ploskoy elektromagnitnoy volny na neodnorodnom dielektricheskom tsilindre [Diffraction of a plane electromagnetic wave at times, but then-homogeneous dielectric cylinder], *Radiotekhnika i elektronika* [Journal of Communications Technology and Electronics], 1995, Vol. 40, No. 5, pp. 695-703.
3. Mukomolov A.I. Chislennyy metod resheniya zadach elektromagnitnogo rasseyaniya na trekhmernom magnitodielektricheskom tele proizvol'noy formy [Numerical method of solving problems of electromagnetic scattering by three-dimensional magneto body of arbitrary shape], *Radiotekhnika i elektronika* [Journal of Communications Technology and Electronics], 1995, Vol. 40, No. 6, pp. 875-880.
4. Jensen M.A., Freeze J.D. A recursive Green's function method for boundary integral analysis of inhomogeneous domains, *IEEE Trans.*, 1998, Vol. AP-46, No. 12, pp. 1810-1818.
5. Lazzi G., Gandhi O.P. Realistically tilted and truncated anatomically based models of the human head for dosimetry of mobile telephones, *IEEE Trans.*, 1997, Vol. EMC-39, No. 1, pp. 55-60.
6. Kisel' V.N., Obukhovets V.A. Vychislitel'naya model' SVCh introskopii [A computational model for the microwave imaging], *Rasseyanie elektromagnitnykh voln* [Scattering of electromagnetic waves], ed. by B.M. Petrova. Taganrog: Radiotekhnicheskiy in-t, 1999, Issue 1, pp. 42-47.
7. Candy V.J., Pichot Ch. Active microwave imaging: A model-based approach, *IEEE Trans.*, 1991, Vol. AP-39, No. 3, pp. 285-290.
8. Colburn J.S., Rahmat-Samii Ya. Human Proximity Effects on Circular Polarized Handset Antennas in Personal Satellite Communications, *IEEE Trans. on AP*, 1998, Vol. 46, No. 6, pp. 813-820.
9. Richmond J.H. Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape, *IEEE Trans on AP*, 1965, Vol. 13, No. 3, pp. 334-341.
10. Lin James C. Specific absorption rates (SARs) Induced in head tissues by microwave radiation from cell phones, *IEEE AP Magazine*, 2000, Vol. 42, No. 5, pp. 138-140.
11. Kisel' V.N., Obukhovets V.A., Kisel' N.N. Rekonstruktsiya stroeniya pronitsaemykh tel v diapazone SVCh [Reconstruction of the structure of permeable solids in the range of microwave], *Antenny* [Antennas], 2002, Issue 4 (59), pp. 42-45.
12. Kisel' N.N., Klimenko P.P. Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya elektromagnitnogo polya s biologicheskimi sredami: monografiya. Deponirovanie VINITI № 1380-V 2006 ot 14.11.06g. g. Moskva [Mathematical modeling of the interaction of electromagnetic fields with biological environments: monograph. Deposit VINITI No. 1380 In 2006 14.11.06 from Moscow], 89 p.
13. Kisel' N.N., Grishchenko S.G. Modelirovanie biologicheskoy strukturirovannoy tkani v vide reshetki rezistivnykh nitay [The structured modeling of biological tissue in the form of a grid of resistive threads], 24th Int. Crimean Conference "Microwave & Telecom-munication Technology" (CriMiCo'2014). 2014, 7-13 September, Sevastopol, Crimea, Russia, pp. 1065-1066.
14. Kisel' N.N., Grishchenko S.G. Ispol'zovanie effekta depolyarizatsii elektromagnitnoy volny dlya zadach meditsinskoj diagnostiki [Using the depolarization effect of electromagnetic wave problems for medical diagnosis], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskije nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 11 (160), pp. 99-109.
15. Kisel' N.N. Issledovanie raspredeleniya elektromagnitnykh poley vnutri biologicheskikh ob"ektov [Investigation of distribution of electromagnetic fields in biological objects], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskije nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2016, No. 3 (176), pp. 65-75.

16. Kisel' V.N., Alpatova A.V., Kisel' N.N. Combined utilization of eigenfunctions and integral equations to calculate fields inside inhomogeneous dielectric bodies, *Conf. Proc. 2000 Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET2000), Kharkov, Ukraine, Sept. 11-15, 2000*, Vol. 2, pp. 459-461.
17. Kisel' N.N., Alpatova A.V., Kisel' V.N. Sochetanie metodov integral'nykh uravneniy i sobstvennykh funktsiy dlya rascheta vzbuzhdeniya krugovogo dielektricheskogo tsilindra s neodnorodnym vklucheniem [A combination of methods of integral equations and eigenfunctions to calculate the excitation of a circular dielectric cylinder with inhomogeneous inclusion], *Antenny [Antennas]*, 2001, Issue 4 (50), pp. 54-60.
18. Alpatova A.V., Kisel' N.N. Electromagnetic field calculation inside the dielectric sphere with inhomogeneous insertion, *2001 IEEE Antennas and Propagation Intern. Symp. Dig., Boston, July 2001*, Vol. 1, pp. 220-223.
19. Kisel' V.N., Alpatova A.V., Kisel' N.N. Effektivnyy algoritm rascheta elektromagnitnogo polya v neodnorodnom tsilindre [An efficient algorithm of calculation of electromagnetic fields in inhomogeneous cylinder], *Izvestiya TRTU [Izvestiya TSURE]*, 2001, No. 1 (19), pp. 28-34.
20. Kisel' N.N., Alpatova A.V., Kisel' V.N. A New Effective Algorithm For Heterogeneous Dielectric, *EMC 2002, International Wroclaw Symposium And Exhibition On Electromagnetic*, Vol. 1, pp. 234-240.
21. Kisel' N.N., Alpatova A.V., Kisel' V.N. Vzbuzhdenie neodnorodnogo krugovogo dielektricheskogo tsilindra [Excitation of inhomogeneous circular dielectric cylinder], *Rasseyaniye elektromagnitnykh voln [Scattering of electromagnetic waves]*, ed. by B.M. Petrova. Taganrog: Radiotekhnicheskii un-t, 2002, Issue 12, pp. 5-8.
22. Kisel' N.N., Alpatova A.V., Kisel' V.N. Sochetanie metodov integral'nykh uravneniy i sobstvennykh funktsiy dlya rascheta vzbuzhdeniya krugovogo dielektricheskogo tsilindra s neodnorodnym vklucheniem [A combination of methods of integral equations and eigenfunctions to calculate the excitation of a circular dielectric cylinder with inhomogeneous inclusion], *Antenny [Antennas]*, 2001, Issue 4 (50), pp. 54-60.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор К.Е. Румянцев.

**Кисель Наталья Николаевна** – Южный федеральный университет; e-mail: nnkisel@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; кафедра антенн и радиопередающих устройств; к.т.н.; доцент.

**Kisel Natalia Nikolayevna** – Southern Federal University; e-mail: nnkisel@sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; the department of antennas and radio transmitters; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 621.396.67

DOI 10.18522/2311-3103-2016-8-5867

**П.Н. Башлы, Ю.А. Кузнецов, Д.А. Безуглов, А.Э. Боярчук**

### **О ВЫБОРЕ НЕРЕГУЛИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК**

*Поиск оптимального решения задачи управления сложной многопараметрической системой требует больших вычислительных и временных затрат, в связи с чем актуальной является проблема оптимального управления параметрами таких систем. К сложным техническим системам относятся современные антенные решетки, в составе которой может быть несколько сотен или тысяч элементов с регулируемой амплитудой и фазой. В ряде прикладных задач для синтеза антенной решетки с заданными энергетическими параметрами достаточно управлять комплексными амплитудами токов в части элементов. Такие решения являются квазиоптимальными. Управление всеми этими элементами в реальном масштабе времени зачастую крайне затруднительно, а иногда просто нецелесообразно. Целью работы является проведение исследований, позволяющих обосновать выбор группы нерегулируемых элементов в составе АР при решении задачи матричного синтеза. Рассмотрен метод синтеза квазиоптимальных антенных решеток, основанный на максим-*