

УДК 004.032

**В.Ф. Гузик, С.М. Гушанский, В.С. Потапов****КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕПЕНИ ЗАПУТАННОСТИ\***

*Описывается понятие абсолютной и частичной запутанности, условия их реализации и влияния на процесс и результат работы квантовых алгоритмов и квантовых систем. Также проведен и схематически проиллюстрирован процесс квантовой телепортации. В рамках выполненной реализации графически отражено влияние частичной запутанности на корректность телепортации с учетом величины ошибки. Проведена разработка ряда условий для количественной характеристики запутанности состояния. Также проанализированы и описаны наиболее известные типы мер квантовых запутанностей. Актуальность развития данного направления в квантовом мире имеет огромное значение в разработке и реализации квантовых вычислителей, так как без моделирования работы квантовых алгоритмов, их результатов становится затруднительным, а иногда и вовсе невозможным технологию квантовых вычислений – квантовые компьютеры и алгоритмы, квантовый криптоанализ. Рассмотрим также ряд других, не менее важных причин актуальности тематики: разработанная квантовая модель позволит наглядно увидеть сильные и слабые стороны модели, а также усовершенствовать ее в будущем; пока не создано квантового компьютера, единственная возможность практического изучения квантового компьютеринга – моделирование физических процессов квантового вычислителя, включая набор квантовых алгоритмов, на классическом или использование различных элементов физики и химии в не характерных для них состояниях и направлениях; в случае создания квантового вычислителя моделирование его прототипа станет наглядным пособием для понимания основных процессов и явлений, благодаря которым стало возможным его создание; разработанная квантовая модель с набором квантовых алгоритмов и ее доказанные преимущества позволят легче привлечь инвестиции в физическое создание и совершенствование квантового компьютера. Научная новизна данного направления в первую очередь выражается в постоянном обновлении и дополнении поля квантовых алгоритмов, а взаимосвязь квантовых алгоритмов и такого важного квантового свойства, как запутанность и вовсе слабо освещена в мире. Однако именно это явление и его процесс может в полной мере раскрыть природу не только работы квантовых алгоритмов, но и всех квантовых вычислений в целом. Конструирование новых квантовых алгоритмов и систем является динамичной областью, о чем свидетельствует количество существующих квантовых (45 алгоритмов и 160 статей, из которых не менее чем 14 были написаны в 2013 и 2014 годах). Хотя квантовые вычисления, основой для большинства которых является квантовая запутанность, еще не готовы к переходу от теории к практике, тем не менее, можно обоснованно догадываться какую форму, возможно, квантовый компьютер примет, или, что более важно для дизайнера языка программирования, по какому интерфейсу можно будет взаимодействовать с таким квантовым компьютером.*

*Частичная запутанность; квантовая телепортация; положительная частичная перестановка; дистиллируемая запутанность; сепарабельные состояния; энтропия.*

**V.P. Guzik, S.M. Gushansky, V.S. Potapov****QUANTITATIVE CHARACTERISTICS OF THE DEGREE OF ENTANGLEMENT**

*This article describes the concept of the absolute and partial entanglement, conditions of their implementation and impact on the process and the result of quantum algorithms and quantum systems. Also held and a schematic illustration of the process of quantum teleportation. As part of the implementation of graphically reflected the impact of the partial entanglement teleportation in correct given the magnitude of error. Spend the development a number of conditions for the quantitative characterization of the state of confusion. Also analyzed and described the most known types of measures of quantum entanglement. The relevance of this trend in the quan-*

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № НК 15-01-01270.

*tum world is great importance in the development and implementation of quantum calculators, as without simulation of quantum algorithms, their results become difficult and sometimes impossible to do quantum computing technology - computers and quantum algorithms, quantum cryptanalysis. We also consider a number of other equally important reasons for the relevance of subjects: developed quantum model will clearly see the strengths and weaknesses of the model, as well as to improve it in the future; it is not created a quantum computer, the only opportunity to explore practical quantum computing - quantum physics simulation of the calculator, including a set of quantum algorithms, the classic or use of various elements of physics and chemistry in not typical for these conditions and directions; In case of a quantum computer simulation of its prototype will be a visual aid for understanding the basic processes and phenomena, which have made it possible to create it; designed with a set of quantum model of quantum algorithms and its proven benefits will make it easier to attract investment in the physical creation and improvement of a quantum computer. The scientific novelty of this area is primarily expressed in constant updating and supplementing the field of quantum algorithms, and relationship of quantum algorithms and such important properties as confusion and did poorly lit in the world. However, this phenomenon and its process can fully disclose the nature of the work not only of quantum algorithms, but all of quantum computing in general. Construction of new quantum algorithms and systems is a dynamic area, as evidenced by the number of existing quantum (45 algorithms and 160 articles, of which at least 14 were written in 2013 and 2014). Although quantum computing, the basis for the majority of which is quantum entanglement, is not yet ready to move from theory to practice, however, one can reasonably speculate what form, perhaps, a quantum computer will take, or what is more important for on what the design of the programming language interface can interact with a quantum computer.*

*Partial entanglement; quantum teleportation; positive partial reinstillation; distilled entanglement; separable state; entropy.*

**Введение.** В настоящее время повышенное внимание к квантовой запутанности обусловлено задачами практического характера, в которых квантовая запутанность является ресурсом реализаций квантовых алгоритмов (КА) [1], разработки квантовых криптографических протоколов и др. Впервые понятие «запутанных» состояний было введено Э. Шредингером в работе «Современное состояние квантовой механики» [2]. Шредингер вывел понятие запутанных состояний для описания состояния совокупной или составной системы, которая состоит из нескольких частей. Такие квантовые состояния так же называют ЭПР – состояниями по первым буквам известных ученых Эйнштейна, Подольского и Розена [3]:

$$|\psi_{epr}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 * |1\rangle_2 - |1\rangle_1 * |0\rangle_2),$$

где  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  – волновые функции спина первой и второй частицы, ориентированного «вверх» и «вниз» соответственно. Если измерить первую частицу, и если она оказывается в состоянии  $|0\rangle$ , то вторую частицу мы измерим в состоянии  $|1\rangle$ .

Кроме того, известные результаты о двухчастичной квантовой запутанности играют важнейшую роль в кодах коррекции квантовых ошибок, необходимых для построения полноценного квантового компьютера, что дает основания говорить о перспективности исследования многочастичной квантовой запутанности и для этого направления.

Важную роль запутанность играет и в квантовой криптографии. Во-первых, существуют экспериментально реализованные протоколы квантовой криптографии, использующие квантовые запутанные состояния, и, во-вторых, наиболее эффективные (из известных на данный момент) атаки на квантовые криптографические протоколы включают в себя запутывание передаваемых квантовых состояний с анциллами (вспомогательными состояниями).

Результат работы квантового алгоритма носит вероятностный характер. За счёт небольшого увеличения количества операций в алгоритме и достижения максимальной запутывания кубитов можно сколь угодно приблизить вероят-

ность получения правильного результата к единице. Именно запутанность играет ключевую роль в работе большинства квантовых алгоритмов как ресурс для передачи квантовой информации. С помощью запутанности рассматриваем систему (алгоритм) не как состоящую из отдельных подсистем, а как единую целую. И чем больше степень запутанности, тем более «единой» становится система и тем она более сильна к влиянию декогеренции и ложности полученных результатов.

Любая задача, решаемая квантовым алгоритмом, может быть решена и классическим компьютером путем прямого вычисления унитарных матриц экспоненциальной размерности, получения явного вида квантовых состояний. В частности, проблемы, неразрешимые на классических компьютерах (например, проблема остановки), остаются неразрешимыми и на квантовых. Но такое прямое моделирование требует экспоненциального времени, и потому возникает возможность, используя квантовый параллелизм, ускорять на квантовом компьютере некоторые классические алгоритмы.

Задача данной статьи заключается в анализе теоретической и практической составляющей понятия абсолютной и частичной запутанности, условия их существования и влияния на квантовые процессы. Также в перечень задач входит реализация процесса квантовой телепортации и выявление зависимости между частичной запутанностью и корректностью телепортации с учетом величины ошибки. Вследствие выполнения вышестоящих задач, а также описания наиболее известных типов мер квантовых запутанностей главной целью работы является разработка ряда условий для количественной характеристики запутанности квантового состояния. В дальнейшем этот перечень необходим для качественной и количественной оценки влияния степени запутанности на работу квантовых алгоритмов и вычислений в целом. Это стало возможно благодаря проводимым исследованиям и результатам, полученным авторами ранее [1, 4, 8, 10].

**1. Частичная запутанность.** Запутанность [4] – это не абсолютное понятие «все» или «ничего», она имеет количественную оценку. Запутанность предполагает манипуляции, т.е. присутствует возможность ее разбавления или концентрирования. Возникает вопрос: есть ли возможность использования частично запутанных состояний в квантовых алгоритмах и к чему это приведет? Чтобы ответить на это вопрос необходимо определиться с мерой запутанности. Самая широко известная мера квантовой запутанности – это энтропия фон Неймана [5]. Для вычисления данной меры необходимо реализовать разложение Шмидта [6].

Пусть существуют две подсистемы А (размерности N) и В (размерности M \* N). Тогда комплексное состояние этих двух подсистем может быть записано в виде:

$$\psi_{AB} = \sum_{i=1}^M c_i * |\alpha_i\rangle * |\beta_i\rangle,$$

где  $|\alpha_i\rangle = |\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_M\rangle$  – базис для подсистемы А,  $|\beta_i\rangle = |\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \dots, |\beta_M\rangle$  – базис для подсистемы В,  $c_i$  – действительные, положительные числа. Из разложения Шмидта следует, что с точки зрения каждого из двух наблюдателей перепутанные состояния являются смешанными состояниями. Так для наблюдателей А и В:

$$\rho_A = S\rho_B(\psi_{AB}) = S\rho_B |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{i=1}^M |c_i|^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|.$$

$$\rho_B = S\rho_A(\psi_{AB}) = S\rho_A |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{i=1}^M |c_i|^2 |\beta_i\rangle\langle\beta_i|.$$

Энтропия частично перепутанного чистого состояния – это энтропия фон Неймана

$$E = -S\rho(\rho * \ln(\rho))$$

либо подсистемы А ( $\rho_A$ ), либо подсистемы В ( $\rho_B$ ):

$$E \equiv -S\rho(\rho_A * \ln(\rho_A)) = -S\rho(\rho_B * \ln(\rho_B)) = -\sum_i c_i^2 * \ln(c_i^2).$$

Подразумевается, что существует не максимально запутанная пара, а частично, вследствие влияния на нее неблагоприятных факторов.

Квантовая телепортация [7] – это передача состояния квантовой системы из одного места в другое даже в случае отсутствия квантового канала связи между отправителем и получателем. Для объяснения смысла телепортации положим, что два человека (Алиса и Боб) в прошлом находились в одном месте и приготовили ЭПР-пару из двух кубитов [8].

Затем эти люди разъехались в разные места, но каждый из них взял с собой один кубит из ЭПР-пары. По истечении длительного времени Алисе потребовалось передать некий кубит  $|\Psi\rangle$  Бобу. При этом Алиса не знает состояния кубита  $|\Psi\rangle$ , т.е. не знает величины коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  и имеет возможность связаться с Бобом только по классическому каналу связи. В соответствии с общими принципами квантовой механики и теоремой о неклонированности квантового состояния [9], Алиса не может без разрушения кубита  $|\Psi\rangle$  определить коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  и просто передать их значения Бобу, чтобы он изготовил соответствующий кубит у себя.

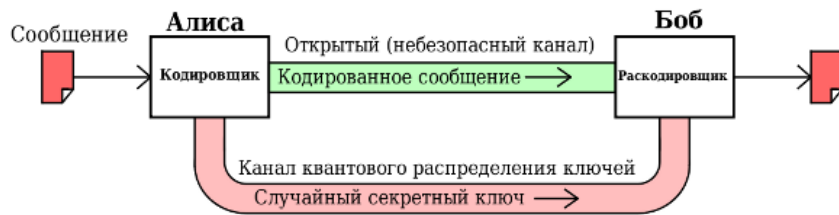


Рис. 1. Использование квантового распределения ключа

Однако Алиса может осуществить взаимодействие кубитов, которые входят в ЭПР – пару, а затем произвести измерение полученного двух – кубитового состояния. В итоге Алиса может получить в определенной доле вероятности один из четырех возможных классических результатов: 00, 01, 10, 11. Далее она посылает эту информацию Бобу. В зависимости от сообщения, которое пошлет Алиса, Боб выполняет одну из четырех операций к своему кубиту из ЭПР – пары. В результате у Боба появится кубит в состоянии  $|\Psi\rangle$ . Это и есть квантовая телепортация. Квантовая схема данного процесса представлена на рис. 2.

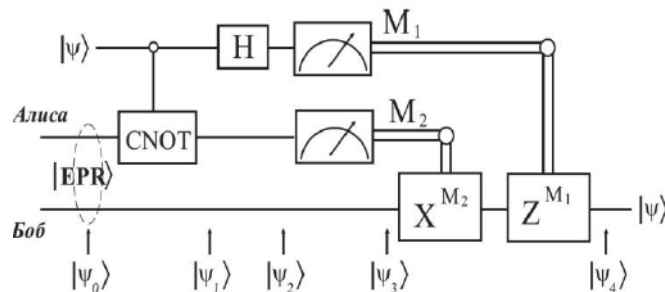


Рис. 2. Квантовая схема процесса телепортации

На рис. 3 изображен график, показывающий влияние частичной запутанности на корректность телепортации. Алгоритм телепортирует кубиты с произвольными состояниями суперпозиции. Чтобы исключить случайный фактор и получить оценку, не зависящую от конкретного состояния, производится большое количество телепортаций с разными случайными состояниями, в данном примере 1000 на каждую величину запутанности и находится среднее арифметическое ошибок.

Стоит отметить, что результат работы квантового алгоритма носит вероятностный характер. За счёт небольшого увеличения количества операций в алгоритме и достижения максимальной запутывания кубитов можно сколь угодно приблизить вероятность получения правильного результата к единице. Именно запутанность играет ключевую роль в работе большинства квантовых алгоритмов как ресурс для передачи квантовой информации. С помощью запутанности рассматриваем систему (алгоритм) не как состоящую из отдельных подсистем, а как единую целую. И чем больше степень запутанности, тем более «единой» становится система и тем она более сильна к влиянию декогеренции и ложности полученных результатов.

Любая задача, решаемая квантовым алгоритмом, может быть решена и классическим компьютером путем прямого вычисления унитарных матриц экспоненциальной размерности, получения явного вида квантовых состояний. В частности, проблемы, неразрешимые на классических компьютерах (например, проблема останковки), остаются неразрешимыми и на квантовых. Но такое прямое моделирование требует экспоненциального времени, и потому возникает возможность, используя квантовый параллелизм, ускорять на квантовом компьютере некоторые классические алгоритмы.

Ось абсцисс отображает энтропию фон Неймана запутанной пары, а ось ординат – величину ошибки. График реализован по 20 точкам, каждая из которых вычислена на основе 1000 виртуальных телепортаций.

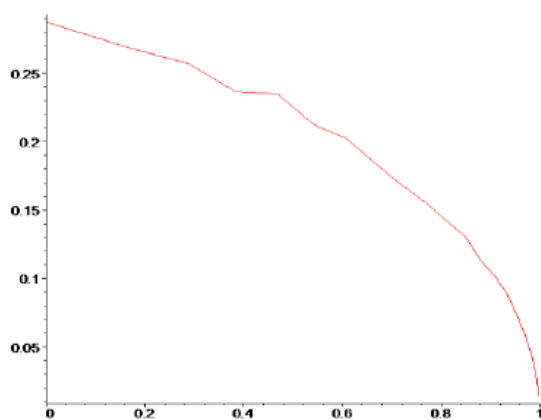


Рис. 3. График влияния частичной запутанности на корректность телепортации

Что представляет собой величина ошибки? Величина ошибки [10] – это разница между квадратами значений коэффициентов входного и выходного вектора квантовой системы. Следовательно, при максимальной запутанности ( $E = 1$ ) величина ошибки равна нулю. Частичная запутанность не исключает успешность выполнения квантового алгоритма, а лишь вносит погрешность, и эта погрешность тем больше, чем меньше запутанность.

**2. Количественные характеристики степени запутанности.** Запутанность – это особая форма корреляции квантовых частиц, не имеющая классических аналогов. Для того чтобы создать максимальную запутанную пару необходимо на первый кубит воздействовать гейтом Адамара, а потом на оба гейтом CNOT.

Кубиты изначально берутся в чистом состоянии:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Базис всех гейтов составляют 4 матрицы Паули, все остальные гейты получаются путем обычного и тензорного произведения матриц и умножением на коэффициент:

$$\sigma_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для количественной оценки запутанности рассмотрим многочастичную систему [11], которая описывается вектором состояния  $|\psi\rangle$ . Вектор состояния  $|\psi\rangle$  состоит из  $n$  подсистем, находящихся также в чистом состоянии. Такие состояния принято считать несепарабельными или запутанными состояниями. Это состояние математически описывается как вектор в гильбертовом пространстве [12]. Строго говоря, чистые состояния в природе не существуют из-за практически неустранимых взаимодействий с окружением.

Для количественной характеристики запутанности состояния важное значение имеет понятие меры запутанности. Эта мера  $E$  должна удовлетворять следующим условиям:

1. Вариативность относительно локальных квантовых операций.
2. Непрерывность [13].
3. Аддитивность [14]. Если существует более одной копии системы, то необходимо выполнение следующего условия:

$$E(|\psi_{AB}\rangle \otimes |\varphi_{AB}\rangle) = E(|\psi_{AB}\rangle) + E(|\varphi_{AB}\rangle)$$

Наиболее широко применяемая мера запутанности, применяемая при исследовании различных систем – энтропийная [15]. Для смешанных двухсоставных систем существует множество мер запутанности, но наиболее интересными являются следующие:

1. Запутанность формирования.
2. Дистиллируемая запутанность [16].
3. ПЧП критерий (положительная частичная перестановка) [17].
4. Отрицательность [18].

Запутанность формирования [19] – минимальная усредненная запутанность ансамблей чистых состояний [20], реализующих данное смешанное состояние:

$$E_F(\rho) = \min \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle)$$

где  $E(|\psi_i\rangle)$  – запутанность чистых состояний  $|\psi_i\rangle$ , которые входят в ансамбль, а минимум берется по всем возможным реализациям  $\rho$  чистых состояний. Данный вид запутанности определяется как минимальное число чистой запутанности, которое необходимо для создания данного состояния при помощи квантовых операций локального характера.

На рис. 4 изображено сравнения мер запутанности. Ось абсцисс отображает степень запутанности. Сплошная линия – геометрическая мера запутанности, нормированная на единицу, пунктирная линия – запутанность формирования, а линия из точек – относительная энтропия.

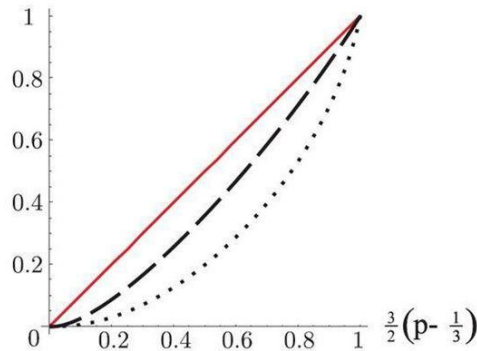


Рис. 4. Сравнения мер квантовой запутанности

В свою очередь запутанность формирования для двухкубитного чистого состояния эквивалентна мере запутанности именуемой энтропией фон Неймана. Состояния, имеющие нулевую запутанность формирования, являются сепарабельными и наоборот. Следующее выражение получено для произвольного смешанного двухкубитного состояния. Для системы двух кубитов, аналитическое выражение запутанности формирования имеет вид

$$E_F(\rho) = - \sum_{\sigma=\pm} \frac{\sqrt{1 + \sigma^* C^2(\rho)}}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{1 + \sigma^* C^2(\rho)}}{2} \right)$$

где  $C(\rho)$  называется конкуренция для чистых состояний. Для матрицы плотности  $\rho$  двухкубитной системы инвертированная матрица  $R$  определяется следующим образом

$$R = \sqrt{\rho}^* \bar{\rho}^* \sqrt{\rho} = \sqrt{\rho} (\sigma^y \otimes \sigma^y)^* \rho^* (\sigma^y \otimes \sigma^y)^* \sqrt{\rho}$$

где  $\rho^*$  обозначает комплексное сопряжение. Тогда согласованность определяется

$$C = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  – квадратные корни из собственных чисел матрицы  $R$ . Так как запутанность формирования является монотонной функцией от согласованности, а также  $C$  – может быть использована как мера запутанности. Это возможно благодаря любопытной особенности систем состоящей из двух кубитов: а именно, что существует непрерывное разнообразие оптимального разложения. При этом сепарабельному состоянию соответствует  $C = 0$ , а максимально запутанному  $C = 1$ .

Дистиллируемая запутанность – эта квантовая мера запутанности, которая выражается асимптотическим выделением произвольного числа чистых синглетов, которые могут быть приготовлены локально из смешанного состояния. Известно два принципиально противоположных типа запутывания. Первый – свободное перепутывание, которое может быть очищено в синглетную форму [21]. Второй, граничное перепутывание, тип перепутывания, который невозможно очистить или использовать для выполнения задач квантового характера.

ПЧП (положительная частичная перестановка) критерий – иной путь обнаружения и доказательства запутанности квантовой системы, использующий операцию частичного транспонирования матрицы плотности [22]. Возьмем матрицу плотности  $\rho$ , для нее мы можем записать ортонормированный базис [23]  $\{|n, m\rangle\}$ , такой что

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} \rho_{i,j,k,l} |i, j\rangle \langle k, l|.$$

Далее определяем частичное транспонирование подсистемы A по базису  $\{|n\rangle\}$ , и получаем новую матрицу

$$\rho^{T_A} = \sum_{i,j,k,l} \rho_{i,j,k,l} |k, j\rangle \langle i, l|$$

Если  $\rho^{T_A}$  имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение, то  $\rho$  обязательно является запутанным. На основе ПЧП критерия введена еще одна используемая мера запутанности – отрицательность. Отрицательность определяется как абсолютная величина суммы отрицательных собственных значений матрицы  $\rho^{T_A}$ :

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{T_A}\|_1 - 1}{2}$$

где  $\|Z\|$  – норма матрицы Z. Такой подход к определению запутанности является весьма практичным приемом вычисления запутанности.

Общим методом для проверки запутывание является способ, называемый «свидетель запутанности» [24]. Таким свидетелем является оператор, который обнаруживает запутанность. Эрмитовый оператор [25] W является свидетелем запутанности, если выполняется условие  $Tr(\rho_s W^{\wedge}) \geq 0$  для всех сепарабельных состояний  $\rho_s$  и  $Tr(\rho_e W^{\wedge}) < 0$  для всех запутанных состояний  $\rho_e$ . Резюмируя, рассмотрим рисунок образования сепарабельных и запутанных, чистых и смешанных состояний.



Рис. 5. Иллюстрация структуры множества матриц плотности и концепция свидетеля запутанности

Чистые состояния находятся на линии поверхности выпуклой оболочки матриц плотности. Все состояния, находящиеся внутри матрицы – смешанные. Сепарабельными состояниями являются подмножество, которые сами по себе выпуклые. В этой иллюстрации свидетелем запутанности является гиперплоскость (пунктирная линия): состояния выше этой плоскости свидетели запутанности, ниже – не могут быть однозначно классифицированы по этому образцу с выбором свидетелей / гиперплоскости [26].



**Заключение.** В ходе написания данной научной статьи было описано и подробно проанализировано понятие абсолютной и частичной запутанности, условия их реализации и влияния на процесс и результат работы квантовых алгоритмов и квантовых систем. Реализован и схематически проиллюстрирован процесс квантовой телепортации, что в последствии отображено на графике, показывающем влияние частичной запутанности на корректность телепортации с учетом величины ошибки. Разработан ряд условий для количественной характеристики запутанности состояния, а также описаны наиболее известные типы мер квантовых запутанностей.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Потапов В.С., Гушанский С.М.* Исследование роли запутанности в построении и реализации квантовых алгоритмов // Информационные технологии, системный анализ и управление (ИТСАиУ-2015): Сборник трудов XIII Всероссийской научной конференции молодых ученых, аспирантов и студентов, г. Таганрог, 16-18 декабря 2015 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 3. – С. 123-129.
2. *Шредингер Э.* Современное состояние квантовой механики // Успехи химии. – 1936. – Т. 5. – С. 390.
3. *Bell J.S.* On the Einstein Podolsky Rosen paradox // Physics. – 1964. – Vol. 1, No. 3. – P. 195-200.
4. *Гузик В.Ф., Гушанский С.М., Касаркин А.В.* Использование квантовой запутанности для моделирования параметра согласованности в задачах теории игр // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 4 (153). – С. 22-28.
5. Von Neumann entropy. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Von\\_Neumann\\_entropy](https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann_entropy) (дата обращения: 14.03.2016).
6. *Preskill J.* Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. California Institute of Technology, 1998.
7. Квантовая телепортация. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Квантовая\\_телепортация](https://ru.wikipedia.org/wiki/Квантовая_телепортация) (дата обращения: 16.03.2016).
8. *Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V.* Models of a quantum computer, their characteristics and analysis // 2015 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). – Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015. – P. 583-587.
9. *Кулик С.Д., Берков А.В., Яковлев В.П.* Введение в теорию квантовых вычислений (методы квантовой механики в кибернетике): учебное пособие. – В 2 кн. – Кн. 2. – М.: МИФИ, 2008. – 532 с.
10. *Гузик В.Ф., Гушанский С.М., Потапов В.С.* Проведение полного факторного эксперимента для характеристик модели квантового вычислителя // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 3 (164). – С. 46-54.
11. *Липкин А.И.* Концепции современного естествознания. Ч. 1. Науки о неживом (физика, химия, синергетика): курс лекций. – М. – Берлин: Директ – Медиа, 2015. – 151 с.
12. Гильбертово пространство. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Гильбертово\\_пространство](https://ru.wikipedia.org/wiki/Гильбертово_пространство) (Дата обращения: 20.03.2016).
13. *Plenio M., Virmani S.* Spin chains and channels with memory // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – P. 120504.
14. Аддитивность. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Аддитивность> (дата обращения: 22.03.2016).
15. *Баргатин И.В., Гришанин Б.А., Задков В.Н.* Запутанные квантовые состояния атомных систем // УФН. – 2001. – Т. 171. – С. 625.
16. *Bennett C.H. et. al.* Mixed-state entanglement and quantum error correction // Phys. Rev. A. – 1996. – Vol. 54. – P. 3824.
17. *Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R.* Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 223. – P. 1-8.
18. *Vidal G. and Werner R.F.A.* Computable measure of entanglement // Phys. Rev. A. – 2002. – Vol. 65. – P. 032314.
19. *Wootters W.K.* Entanglement of formation and concurrence // Quant. Inf. Comp. – 2001. – Vol. 1. – P. 27-44.

20. *Bennett C.H., Bernstein H.J., Popescu S. and Schumacher B.* Concentrating partial entanglement by local operations // *Phys. Rev. A.* – 1996. – Vol. 53. – P. 2046.
21. *Абдувагабова С.Г.* Определение сечения когерентного рассеяния нейтронов на связанных протонах. Бакинский Государственный Университет. Баку, Азербайджан. – 2010. – Т. 1. – С. 52.
22. Матрица плотности. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Матрица\\_плотности](https://ru.wikipedia.org/wiki/Матрица_плотности) (дата обращения: 27.03.2016).
23. *Makhlouf A., Paal E., Silvestrov S., Stolin A.* Algebra, Geometry and Mathematical Physics: AGMP, Mulhouse, France, October 2011. – 683 p.
24. *Terhal B.M.* Detecting quantum entanglement // *Theor. Comput. Sci.* – 2002. – Vol. 287. – P. 313.
25. Эрмитов оператор. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Эрмитов\\_оператор](https://ru.wikipedia.org/wiki/Эрмитов_оператор) (дата обращения: 04.04.2016).
26. Гиперплоскость. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Гиперплоскость> (дата обращения: 07.04.2016).

#### REFERENCES

1. *Potapov V.S., Gushanskiy S.M.* Issledovanie roli zaputannosti v postroenii i realizatsii kvantovykh algoritmov [Investigation of the role of involvement in building and implementation of quantum algorithms], *Informatsionnye tekhnologii, sistemnyy analiz i upravlenie (ITSAiU-2015): Sbornik trudov XIII Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii molodykh uchenykh, aspirantov i studentov, g. Taganrog, 16-18 dekabrya 2015 g.* [Information technology, system analysis and management (Idayu-2015): proceedings of the XIII all-Russian scientific conference of young scientists, postgraduates and students, Taganrog, 16-18 Dec 2015]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2016, Vol. 3, pp. 123-129.
2. *Shredinger E.* Sovremennoe sostoyanie kvantovoy mekhaniki [Modern status of quantum mechanics], *Uspekhi khimii* [Uspekhi Khimii], 1936, Vol. 5, pp. 390.
3. *Bell J.S.* On the Einstein Podolsky Rosen paradox, *Physics*, 1964, Vol. 1, No. 3, pp. 195-200.
4. *Guzik V.F., Gushanskiy S.M., Kasarkin A.V.* Ispol'zovanie kvantovoy zaputannosti dlya modelirovaniya parametra soglasovannosti v zadachakh teorii igr [Usage of quantum entanglement for simulation of consistency parameter in game theory problem], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 4 (153), pp. 22-28.
5. Von Neumann entropy. Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/Von\\_Neumann\\_entropy](https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann_entropy) (accessed 14 March 2016).
6. *Preskill J.* Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation. California Institute of Technology, 1998.
7. Квантовая телепортация [Quantum teleportation]. Available at: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Квантовая\\_телепортация](https://ru.wikipedia.org/wiki/Квантовая_телепортация) (accessed 16 March 2016).
8. *Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V.* Models of a quantum computer, their characteristics and analysis, *2015 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT).* – Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015, pp. 583-587.
9. *Kulik S.D., Berkov A.V., Yakovlev V.P.* Vvedenie v teoriyu kvantovykh vychisleniy (metody kvantovoy mekhaniki v kibernetike): uchebnoe posobie [Introduction to the theory of quantum computing (quantum mechanics methods in Cybernetics): a tutorial]. In 2 books. Book 2. Moscow: MIFI, 2008, 532 p.
10. *Guzik V.F., Gushanskiy S.M., Potapov V.S.* Provedenie polnogo faktornogo eksperimenta dlya kharakteristik modeli kvantovogo vychislitelya [Performance a full factorial experiment for the characteristics models of quantum calculators], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 3 (164), pp. 46-54.
11. *Lipkin A.I.* Kontseptsii sovremennoego estestvoznaniya. Ch. 1. Nauki o nezhimom (fizika, khimiya, sinergetika): kurs lektsiy [Concepts of modern natural science. Part 1. The science of the inanimate (physics, chemistry, synergy): a course of lectures]. Moscow – Berlin: Direkt – Media, 2015, 151 p.
12. Гильбертово пространство [On a Hilbert space]. Available at: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Гильбертово\\_пространство](https://ru.wikipedia.org/wiki/Гильбертово_пространство) (accessed 20 March 2016).
13. *Plenio M., Virmani S.* Spin chains and channels with memory, *Phys. Rev. Lett.*, 2007, Vol. 99, pp. 120504.

14. Additivnost' [Additivity]. Available at: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Additivnost'> (accessed 22 March 2016).
15. *Bargatin I.V., Grishanin B.A., Zadkov V.N.* Zaputannye kvantovye sostoyaniya atomnykh sistem [Entangled quantum States of atomic systems], *UFN [Uspekhi Fizicheskikh Nauk]*, 2001, Vol. 171, pp. 625.
16. *Bennett C.H. et. al.* Mixed-state entanglement and quantum error correction, *Phys. Rev. A*, 1996, Vol. 54, pp. 3824.
17. *Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R.* Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, Vol. 223, pp. 1-8.
18. *Vidal G. and Werner R.F.A.* Computable measure of entanglement, *Phys. Rev. A*, 2002, Vol. 65, pp. 032314.
19. *Wootters W.K.* Entanglement of formation and concurrence, *Quant. Inf. Comp.*, 2001, Vol. 1, pp. 27-44.
20. *Bennett C.H., Bernstein H.J., Popescu S. and Schumacher B.* Concentrating partial entanglement by local operations, *Phys. Rev. A*, 1996, Vol. 53, pp. 2046.
21. *Abdulvagabova S.G.* Opredelenie secheniya kogerentnogo rasseyaniya neytronov na svyazannykh protonakh [The definition section of the coherent neutron scattering on the bound-tion of the protons]. Bakinskiy Gosudarstvennyy Universitet. Baku, Azerbaydzhan, 2010, Vol. 1, pp. 52.
22. Matritsa plotnosti [The matrix density]. Available at: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Matritsa\\_plotnosti](https://ru.wikipedia.org/wiki/Matritsa_plotnosti) (accessed 27 March 2016).
23. *Makhlouf A., Paal E., Silvestrov S., Stolin A.* Algebra, Geometry and Mathematical Physics: AGMP, Mulhouse, France, October 2011, 683 p.
24. *Terhal B.M.* Detecting quantum entanglement, *Theor. Comput. Sci.*, 2002, Vol. 287, pp. 313.
25. Ermitov operator [A Hermitian operator]. Available at: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Ermitov\\_operator](https://ru.wikipedia.org/wiki/Ermitov_operator) (accessed 04 April 2016).
26. Giperploskost' [The hyperplane]. Available at: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Giperploskost'> (accessed 07 April 2016).

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. Н.И. Витиска.

**Гузик Вячеслав Филиппович** – Южный федеральный университет; e-mail: [vfuzik@sfedu.ru](mailto:vfuzik@sfedu.ru); 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; кафедра вычислительной техники; зав. кафедрой; д.т.н.; профессор.

**Гушанский Сергей Михайлович** – e-mail: [kron@pbox.ttn.ru](mailto:kron@pbox.ttn.ru); кафедра вычислительной техники; к.т.н.; доцент.

**Потапов Виктор Сергеевич** – e-mail: [vitya-potapov@rambler.ru](mailto:vitya-potapov@rambler.ru); кафедра вычислительной техники; аспирант.

**Guzik Vyacheslav Philippovich** – Southern Federal University; e-mail: [vfuzik@sfedu.ru](mailto:vfuzik@sfedu.ru); 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; the department of computer science; head of department; dr. of eng. sc.; professor.

**Gushansky Sergei Mikhailovich** – e-mail: [kron@pbox.ttn.ru](mailto:kron@pbox.ttn.ru); the department of computer science; cand. of eng. sc.; assistant professor.

**Potapov Victor Sergeevich** – e-mail: [vitya-potapov@rambler.ru](mailto:vitya-potapov@rambler.ru); the department of computer science; postgraduate student.