

15. *Asanov M.O., Baranskiy V.A., Rasin V.V.* Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy [Discrete mathematics: graphs, matroids, algorithms]. Izhevsk: NITs «RKhD», 2001, 288 p.
16. *Svami M., Tkhulasiraman K.* Grafy, seti i algoritmy [Graphs, networks and algorithms]. Moscow: Mir, 1984, 455 p.
17. *Basaker R., Saati T.* Konechnye grafy i seti [Finite graphs and networks]. Moscow: Nauka, 1974, 368 p.
18. *Zykov A.A.* Teoriya konechnykh grafov [Theory of finite graphs]. Novosibirsk: Nauka, 1969, 554 p.
19. *Kochkarov A., Perepelitsa V.* Fractal Graphs and Their Properties, *ICM 1998 Berlin, International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications and Posters*, 199, 347 p.
20. *Balkhanov V.K.* Vvedenie v teoriyu fraktal'nogo ischisleniya [Introduction to the theory of fractal calculus]. Ulan-Ude: BGU, 2001, 58 p.
21. *Nekrashevych V.* Hyperbolic spaces from self – simiral group actions, *Algebra and Discrete Mathematics*, 2003, No. 2, pp. 68-77.
22. *Riehl J., Hespanha J.P.* Fractal graph optimization algorithms, *Proc. of the 44th Conf. on Decision and Contr.*, 2005, p. 2188-2193.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Д.М. Эдиев.

**Кочкаров Ахмат Магомедович** – Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Институт прикладной математики и информатики; e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; 369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36; кафедра математики; д.ф.-м.н.; профессор; зав. кафедрой.

**Кочкарова Асият Нерчуквна** – e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; тел.: 89283909698; кафедра математики; ассистент.

**Хапаева Лёля Халисовна** – e-mail: Lelia.kazalieva@yandex.ru; тел.: 89280250725; кафедра информатики и информационных технологий; к.ф.-м.н.; доцент.

**Kochkarov Ahmat Magometovich** – North-Caucasian State Humanitarian Technological Academy, Institute of Applied Mathematics and Computer Science; e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; 36, Stavropol street, Cherkessk, 369000; dr. of phys. and math. sc.; professor; the department of mathematics; head of department.

**Kochkarova Asiyat Nerchukovna** – e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; phone: +79283909698; the department of mathematics; assistant.

**Khapaeva Lelia Halisovna** – e-mail: Lelia.kazalieva@yandex.ru; phone: +79280250725; the department of Informatics and information technologies; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.

УДК 519.532.711.3

**А.К. Кубанова**

### **ЯЧЕИСТО-ПОСЛОЙНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УДАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СРЕДУ**

*Существуют техногенные и природные воздействия на многофазные объекты окружающей среды, когда при этих интенсивных ударных воздействиях, как правило, пространственно-временные характеристики неизвестны, а известны их локальные амплитуды и продолжительности воздействия малы, по сравнению с характерным временем релаксации среды. В такой ситуации возникает необходимость в развитии нового подхода к моделированию динамики движения многофазных сред. Суть предложенного нами подхода заключается: в развитии методов математического моделирования достаточно сложных процессов динамики движения многофазных сред на основе модификации метода характеристик, учитывающего самосогласованность поля скоростей многофазной среды, положение*

характеристик, а также наличие поверхности сильного разрыва, позволяющее по известному локально-экстремальному воздействию на многофазную среду определить ее динамическое состояние, обусловленное этим воздействием. Следующим шагом является аналитическое задание формы ударной волны в среде, содержащее параметры, подлежащие самосогласованному определению в соответствии с алгоритмом расчета, учитывающее характерную реакцию среды на ударное воздействие. В соответствии с развитым в работе алгоритмом расчета нами предложен ячеисто-послойный метод определения распространения возмущения. Эти методы позволяют эффективно решать целый спектр практических задач при проектировании и расчете подземных сооружений и систем защиты от сейсмического и техногенного воздействия с учетом реологических особенностей сред.

*Динамика движения трехфазной среды; модифицированный метод характеристик; локально-экстремальное воздействие на среду; ячеисто-послойный метод.*

**A.K. Kubanova**

### **CELLULAR-LAYERED METHOD OF RESEARCH OF IMPACT ON THE ENVIRONMENT**

*There are ethnogeny and natural influences on multiphase objects of environment when at these intensive shock influences, as a rule, existential characteristics aren't known their local amplitudes and durations of influence are small, in comparison with characteristic time of a relaxation of environment. In such situation there is a necessity for development of the new approach to modeling of dynamics of movement of multiphase environments. The essence of the approach offered by us consists: in development of methods of mathematical modeling enough difficult processes of dynamics of movement of multiphase environments on the basis of updating of a method of the characteristics considering a self-coordination of a field of speeds of the multiphase environment, position of characteristics, and also presence of a surface of the strong rupture, allowing on known locally-extreme influence on the multiphase environment to define its dynamic condition caused by this influence. In according with the algorithm of calculation we offered cellular-layered method of determining the spread of the disturbance. These methods can solve a range of practical problems effectively in the design and computation of underground structures and systems of protection against seismic and technogenic effects with considering the rheological characteristics of environments.*

*Dynamics of movement of the three-phase environment; the modified method of characteristics; locally-extreme influence on Environment; cellular-layered method.*

**Введение.** Имеющиеся в природе многокомпонентные среды (например, грунты) существенно отличаются по реологическим свойствам друг от друга, поэтому ряд авторов [1, 2, 3] предложили динамическую модель конкретной многокомпонентной среды – грунта как модель пластичности Хенке-Мизеса с необратимой объемной деформацией, что справедливо для грунтов малой важности.

Ряд экспериментальных работ [4, 5] позволил установить, что причиной больших различий в значениях параметров взрывных волн в грунтах, в первую очередь, является различие в содержаниях компонент среды. На основе опытного и теоретического материала Г.М. Ляхов [5] предложил модель водонасыщенного грунта как мелкодисперсной трехкомпонентной среды, которая дала возможность объяснить ряд закономерностей распространения взрывных волн.

В 1956 году Х.А. Рахматулин предложил модель механики смеси сжимаемых компонент на основе представления как движения взаимопроникающих континуумов [6]. Весьма существенно, что он использовал схему силового взаимодействия между фазами соответствующей именно многофазной среде, а не многокомпонентной. Им проанализированы и даны основы теории пограничного слоя в двухфазной среде.

Дальнейшее развитие динамики движения многофазных сред получило в работах Р.И. Нигматулина [7–9], в которых с единых позиций механики сплошных сред предложена математическая модель движения гетерогенных сред. Значительный вклад в развитие математического моделирования динамики движения многокомпонентных сред внесли работы ряда авторов [3, 10–14].

В работах многочисленных исследователей [15–18] при построении математических моделей движения, многокомпонентных сред изучения их различных свойств, взаимодействие между компонентами используются различные предположения и упрощения относительно исследуемого явления [19, 20]. Решаются нестационарные, стационарные, одномерные, двумерные задачи, аналитически и численно на основе стандартных гидродинамических методов численного расчета при динамических нагрузках с известными, временными и пространственными характеристиками этого воздействия.

Однако существуют техногенные, антропогенные и природные воздействия на объекты окружающей среды, когда при этих интенсивных ударных воздействиях, как правило пространственно-временные характеристики неизвестны, а известны их локальные амплитуды и продолжительности воздействия малы по сравнению с характерным временем релаксации среды, или имеется неполный набор данных о внешнем воздействии на части поверхности, ограничивающий природный объект. При таком внешнем воздействии становится неприменимыми известными стандартные численные методы решения соответствующих гидродинамических задач, так как они не позволяют в процессе расчета учесть реальное разделение многокомпонентной среды на две области границей (фронтом ударной волны) на которой такие параметры как давление, плотность, скорость движения среды и так далее испытывают скачок, а возмущения, вызванные ударным воздействием большой интенсивности распространяются за фронтом ударной волны вдоль характеристик. Ситуация осложняется еще и тем, что вдоль характеристик ее гидродинамические параметры существенно меняются, что делает необходимым самосогласованное нахождение их направлений и параметров, определяющих динамику возмущенной среды. В результате возникает необходимость в развитии такого подхода к исследованию динамики движения многокомпонентных сред при ударных воздействиях большой интенсивности, которые адекватно учитывали бы начально-локальную определенность внешнего воздействия, самосогласованность положения характеристик с полем скоростей среды и наличие поверхности сильного разрыва гидродинамических параметров среды.

Исследованная в данной работе проблема имеет характерную особенность, которая заключается в наличии существенной недоопределенности в условиях взаимодействия среды с внешними факторами.

**Постановка задачи.** Исследовать модельными подходами динамическое состояние трехкомпонентной среды, инициируемого техногенным воздействием на ее поверхность, когда достоверно известно только локально-экстремальная характеристика этого воздействия. Известна лишь локальная амплитуда этого ударного воздействия, которое инициирует двумерное движение среды типа смеси из воздуха, воды и кварца. Скорость распространения ударной волны в возмущенной области превышает местную скорость звука [21]. В этом случае необходимо использовать модифицированный метод характеристик, направление которых определяют возмущение среды. Среда при таком внешнем воздействии разделится на две области (возмущенную и покоящуюся) границей – ударной волной, положение и форма которой должны определяться условиями, характеризующими возмущенное и невозмущенное состояние среды. Математическое моделирование процессов, происходящих в области возмущения, представляет собой нестандартную

гидродинамическую задачу, так как изначально известна только одна из локальных характеристик внешнего воздействия на среду ( $P$  – давление переднего фронта сверхзвуковой ударной нагрузки, бегущей по границе среды). Задачи такого типа представляют на наш взгляд новый класс задач, в которых математические модели представляются нелинейными уравнениями гиперболического типа. Поэтому необходимо разработать численные методы расчета области возмущения. В соответствии с этим нами предложен ячеисто-последовательный метод.

**1. В силу локальной определенности внешнего воздействия на многофазную среду** и наличия поверхности сильного разрыва на начальном этапе моделирования необходимо определить параметры, характеризующие реакцию среды в области локализации этого воздействия. Следующим шагом является аналитическое задание формы ударной волны в среде, содержащее параметры, подлежащие самосогласованному определению в соответствии с алгоритмом расчета, учитывающее характерную реакцию среды на ударное воздействие. В силу ударного воздействия на среду ее возмущения распространяются за фронтом ударной волны вдоль характеристик. При определенных на начальном шаге параметрах среды в точке непосредственного приложения ударного воздействия и заданной форме фронта ударной волны все последующие расчеты в области за фронтом волны ведутся последовательными шагами, так что для определения состояния возмущенной среды на следующем пространственно-временном шаге, по результатам расчетов на предыдущем шаге, находятся самосогласованно как характеристики, так и параметры определения фронта ударной волны.

Полученные результаты [21] исследования применены и развиты при исследовании динамического состояния трехфазной среды инициируемого техногенным воздействием.

Для формулировки начально-граничных условий в области ударного воздействия необходимо рассмотреть движение вдоль границы среды нагрузки неизменного профиля. Исследование проблемы воздействия на поверхность трехфазной среды (воздух-вода-кварц) постоянной нагрузки, бегущей по ее границе сверхзвуковой скоростью  $D_0$  (рис. 1) проведено в системе координат, связанной с этой волной, которая движется со скоростью  $D_1$  по невозмущенной среде, не меняя своей конфигурации.

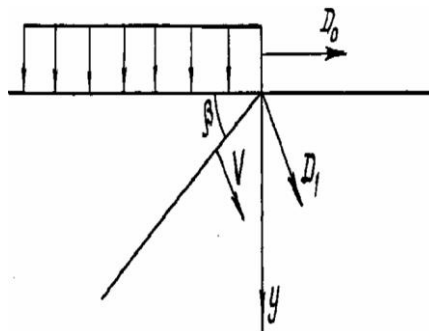


Рис. 1. Постановка задачи для постоянного профиля нагрузки

В этой системе координат параметры многофазной среды не зависят от времени, т.е. течение является стационарным.

Решение этой проблемы проводится нами на основе теории взаимопроникающих движений компонент [6, 22], что позволяет нам построить односкоростную математическую модель картины движения мелкодисперсной трехфазной

среды, представляющей собой совокупность твердых минеральных частиц (кварц), воды и воздуха. При прохождении ударной волны сжатие каждой из составляющих происходит по закону присущему этой фазе в свободном состоянии, с общим давлением фаз среды, представляющую условия совместного деформирования фаз, регулирующие их объемные содержания. Несовпадение давлений в компонентах может иметь место при учете их мелкомасштабного движения (молекулярно-капиллярных эффектов, инерции компонент, прочность), возможного в рамках кинетического, а не гидродинамического подходов [7, 8].

Для получения средней плотности многофазной среды на ударной волне нельзя пользоваться законом изэнтропического сжатия каждой фазы, так как гидродинамические параметры на скачке зависят от начальных условий (перед скачком), поэтому более правильно брать для каждой фазы среды соответствующую адиабату Гюгонио [23, 24], которая имеет вид:

$$\rho_i^o = \psi_i(P); \quad f_i = \frac{\rho_i}{\rho_i^o} \quad (i=1,2,3). \quad (1)$$

Функции, входящие в формулу (1) зависят не только от давления на скачке, но и от давления перед скачком. В ряде случаев для жидкой и твердой фаз среды вместо адиабаты Гюгонио можно применять изэнтропу. Как показал численный эксперимент результаты расчетов с использованием для указанных фаз разных подходов практически не различаются. Для описания возмущенного движения среды (за ударной волной) по характеристикам можно пользоваться законом изэнтропического сжатия каждой фазы среды.

При исследовании распространения ударной волны для газовой фазы среды в качестве уравнения ее состояния принята адиабата Гюгонио, а сжимаемость твердой и жидкой фаз определялась соответствующими уравнениями сжатия:

$$\frac{\rho_1^o}{\rho_{10}^o} = \frac{\chi P + P_0}{P_0 \chi + P} \quad \text{для газообразной фазы,}$$

$$\chi = (\gamma + 1)(\gamma - 1)^{-1} \quad (2)$$

$$P - P_0 = k_i \left( 1 - \frac{\rho_{i0}^o}{\rho_i^o} \right) \quad (i=2,3) \quad \text{для жидкой и твердой фаз.}$$

Используя классические соотношения на ударной волне для трехфазной среды (закон сохранения массы, количества движения и энергии) имеем:

$$D_1 \rho_0 = \rho(D_1 - V); \quad D_1 \rho_0 V = P - P_0; \quad D_1 = D_0 \sin \beta \quad (3)$$

$$D_1 \rho_0 \frac{V^2}{2} + D_1 (f_{10} \rho_{10}^o E_1 + f_{20} \rho_{20}^o E_2 + f_{30} \rho_{30}^o E_3) = PV$$

$$E_1 = \frac{P_0}{(\gamma - 1) \rho_{10}^o} \frac{P^2 - P_0^2}{(\chi P + P_0)}, \quad E_2 = \frac{P_0^2}{2K_2 \rho_{20}^o} \left( \frac{P}{P_0} - 1 \right)^2$$

$$E_3 = \frac{P_0^2}{2K_3 \rho_{30}^o} \left( \frac{P}{P_0} - 1 \right)^2$$

(здесь  $E_1, E_2, E_3$  – приращения внутренних энергий единиц масс соответствующих фаз среды;  $f_{10}, f_{20}, f_{30}$  – объемные доли указанных фаз в среде,  $\gamma$  – показатель адиабаты воздуха;  $K_i$  – модуль объемного сжатия фазы;  $\rho_i^o, \rho_{i0}^o$  –

текущая истинная и начальная истинная плотности фаз;  $\rho, \rho_0$  – приведенная и приведенная начальная плотности трехфазной среды;  $D_1, V$  – скорость ударной волны и скорость среды за волной, перед волной среда покоится;  $\beta$  – угол наклона косоугольной ударной волны к границе трехфазной среды;  $D_0$  – скорость бегущей по границе нагрузки интенсивностью  $P$ , получена следующая зависимость плотности от давления на ударной волне, распространяющейся в трехфазной среде [21]

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \left[ \frac{2f_{10}}{(\gamma - 1)} \cdot \frac{(P - P_0)}{(\chi P + P_0)} + \left( \frac{f_{20}}{k_2} + \frac{f_{30}}{k_3} \right) \cdot \frac{(P - P_0)^2}{(P + P_0)} \right], \quad (4)$$

затем скорость фронта ударной волны  $D_1$  в многофазной среде, скорость частиц среды  $V$  на фронте ударной волны и угол наклона фронта ударной волны в начальной точке.

$$D_1^2 = \frac{P - P_0}{\rho_0 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}, \quad V^2 = \frac{P - P_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \quad (5)$$

$$D_0^2 = \frac{\chi P - P_0}{\rho_{10}^0 (\chi - 1)}, \quad \sin \beta = D_1 \cdot D_0^{-1}.$$

Значения  $D_0$  (м/с) и  $\sin \beta$  приведены ниже (табл. 1).

Зная угол наклона  $\beta$  ударной волны к границе, можно определить составляющие двумерной скорости движения частиц среды по осям координат.

$$U = V \sin \beta, \quad V = V \cos \beta. \quad (6)$$

Таблица 1

$\frac{P}{P_0}$	$D_0$ (м/с)	Значения $\sin \beta$ .				
		$f_{10} = 0$	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0,01	0,1
		$f_{20} = 0.4$	0.399	0.39	0,35	0,3
		$f_{30} = 0.6$	0.6	0.6	0,64	0,6
100	3148	0,5156	0,4353	0,2885	0,2293	0,0811
200	4383,6	0,3661	0,3331	0,2571	0,2088	0,0803
400	6292	0,2591	0,2461	0,2111	0,1830	0,0789
600	7705	0,2117	0,2041	0,1834	0,1654	0,0773
1000	9947	0,1700	0,1601	0,1588	0,1412	0,0752

Для последующего расчета реакции среды на ударное воздействие проведен численный расчет в начальной точке алгоритма расчета, развитого в работе. Получены необходимые для этого параметры ударной волны в трехфазной среде, а также параметры движущейся за фронтом среды (вода-воздух-кварц). Исследовано влияние содержания фаз среды на эти параметры. Определен угол наклона фронта ударной волны к границе полупространства и влияние на этот угол содержания фаз и величины постоянной нагрузки, бегущей по границе. Анализ, полученных результатов распределений вертикального и горизонтального составляющих массовой скорости частиц среды показал, что наибольший вклад в движение среды при ударных воздействиях вносит вертикальное смещение, на которое влияет содержание компонент и величина источника возмущения, что согласуется с работой [25].

**2. После этого можно переходить к исследованию** двумерного движения трехфазной среды типа смеси из воздуха, воды и кварца, которое инициируется бегущей вдоль плоской границы ударной волновой нагрузкой неизвестного профиля, когда скорость распространения ударной волны в возмущенной области превышает местную скорость звука. В этом случае необходимо использовать метод характеристик, направление которых определяют возмущения среды.

При исследовании указанного движения предполагалось, что нижнее пространство занимает трехфазная среда, на границе которой приложена бегущая с постоянной скоростью  $D_0$  нагрузка переменного профиля, которая изменяется на этой поверхности по неизвестному закону. Известна лишь локальная амплитуда этого ударного воздействия. Многофазная среда при таком внешнем воздействии разделится на две области (возмущенную и покоящуюся) границей – ударной волной. В соответствии с развиваемым в работе алгоритмом расчета, где учтена характерная реакция многофазной среды на ударное воздействие необходимо задать аналитическую форму ударной волны в среде, параметры которой подлежат дальнейшему самосогласованному определению в процессе расчета.

Скорость распространения фронта ударной волны в среде, инициируемая таким локально-экстремальным источником воздействия на ее поверхность, будет сверхзвуковая [21].

Область возмущенного движения многофазной среды ограничена ударной волной, положение и форма которой в общем случае должно определяться условием, характеризующим возмущенное и невозмущенное состояние среды. Использование этого условия приводит к необходимости поиска численным методом точек среды, где указанное условие выполняется, решая при этом каждый раз, весь набор уравнений динамики возмущенной и невозмущенной областей среды. Нами показано [21], что эти трудности численного моделирования положения фронта ударной волны можно обойти аналитическим заданием формы фронта в виде многочлена по степеням глубины проникания  $y$  возмущения в среду. Предварительный анализ показал, что без ущерба для качественного и количественного описания положения поверхности ударной волны достаточно ограничиться уравнением

$$x = ay + by^2 \quad (7)$$

Такой вид (7) описывает реальное уравнение поверхности ударной волны в многофазной среде при локально-экстремальном внешнем воздействии на ее поверхность. При этом параметры  $a, b$  в (7) в соответствии с развитым в работе алгоритмом расчета определяются на каждом его шаге самосогласования с помощью процедуры, описанной в [21] по формулам.

$$a = ctg\beta - 2by \quad (\text{при } x = 0, y = 0, a = 2ctg\beta_0)$$

$$b = \frac{ctg(\beta_0 - \alpha \cdot n) - a}{2y}, \quad \text{при } y \leq y_\Sigma$$

$\alpha$  – размер "шага" по углу наклона фронта ударной волны в среде к оси  $x$ ,  $n$  – число расчетных "шагов", где ограничение на их число определяется условием – величина скорости фронта ударной волны должна быть больше значения местной скорости звука (предел – равенство). В противном случае ударная волна вырождается и в поликомпонентной среде распространяются малые возмущения.  $y_\Sigma$  – ордината фронта ударной волны в среде,  $P_0$  – давление со стороны невозмущенной области среды, по мере проникания вглубь многофазной среды определяется давлением атмосферы и гидростатическим давлением среды.

На основе подхода, примененного в работе для определения исходного шага алгоритма расчета численно определен фронт ударной волны в многофазной среде, сформулированы граничные условия в начальной точке среды, определены все параметры  $(U, V, P, \rho, C, \beta, D_1)$  на фронте этой ударной волны. При численном исследовании реакции поликомпонентной среды на внешнее локально-экстремальное воздействие они являются начальными параметрами на базисном ("нулевом", или начальном) слое, с которого производится расчет динамики развития возмущений трехфазной среды.

Следующим шагом алгоритма расчета является определение полного набора гидродинамических параметров среды в области ее возмущения, используя при этом найденные на предыдущем шаге аналогичные параметры среды. Математическое моделирование процессов происходящих в этой области среды, при известном локально-экстремальном внешнем воздействии представляет собой нестандартную гидродинамическую задачу, так как изначально известна только одна из локальных характеристик внешнего воздействия на среду ( $P_1$  – давление переднего фронта сверхзвуковой ударной нагрузки бегущей по границе поликомпонентной среды). Задачи такого типа представляют, на наш взгляд, новый класс задач, которые названы нами - начально-граничными задачами.

Уравнения движения возмущенной среды, указанной начально-граничной задачи, после перехода к подвижной системе координат  $(x, y, t)$

$$\begin{aligned} (U + D_0) \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{C^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}; & -\infty < x < \infty; \\ (U + D_0) \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{C^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}; & 0 < y \leq \sum . \\ (U + D_0) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + V \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Начально-граничные условия для уравнения (8) имеют вид

$$P_1 = \frac{2}{(\gamma + 1)} D_0^2 \rho_{10}^0 - \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} P_{атм}; \quad \sin \beta_0 = D_1 \cdot D_0^{-1} \quad x = 0; y = 0,$$

где  $P_{атм}$  – атмосферное давление;  $D_1, \beta_0$  – скорость и угол наклона фронта ударной волны в начальной точке 0,  $P_1$  – известное давление в начальной его точке локально-экстремального внешнего воздействия.

В силу того, что внешнее воздействие носят ударный характер, движение среды в области возмущения будет вихревым [21, 23], поэтому для его анализа вводится функция тока и вихрь.

$$U = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Связь между давлением и плотностью выражается уравнением состояния трехфазной среды, полученным в работе [23].

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{f_{i0} \rho_{i0}^0}{\psi_i(P)}, \quad (9)$$



где  $\psi_i$  – известные уравнения сжимаемости фаз (для газовой фазы среды принята адиабата Пуассона);  $f_{i0}, \rho_{i0}^0$  – объемные доли и истинные начальные плотности фаз среды.

Полученное после преобразования уравнение движения возмущенной среды является нелинейным уравнением гиперболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial x} + (\lambda - A) \frac{\partial U}{\partial y} = A\omega \left[ 1 - \frac{\lambda V(D_0 + U)}{V^2 - C^2} \right] + B - \frac{A\lambda}{V^2 - C^2} \left\{ [(U - D_0)^2 - C^2] \frac{\partial U}{\partial x} + 2V(U + D_0) \frac{\partial U}{\partial y} \right\}. \quad (10)$$

Возмущения, вызванные ударным воздействием на многофазную среду, распространяются вдоль характеристик.

Нами показано, что в плоскости  $x, y$  имеются два направления – характеристики

$$\lambda_{1,2} = \frac{dy}{dx} = \frac{V(U + D_0) \pm C \sqrt{(U + D_0)^2 + V^2 - C^2}}{(U + D_0)^2 + C^2} \quad (11)$$

вдоль которых существует линейная связь между полными дифференциалами искомых параметров

$$dU = A_{1,2} dV + B_{1,2} dx, \quad (12)$$

где

$$A_{1,2} = \frac{C^2 - V^2}{\lambda_{1,2} [(U + D_0)^2 - C^2]}; \quad B_{1,2} = -A\omega \left[ 1 + \frac{\lambda_{1,2} V (U + D_0)}{C^2 - V^2} \right].$$

Суть метода состоит в том, что для нахождения гидродинамических параметров многофазной среды на первом

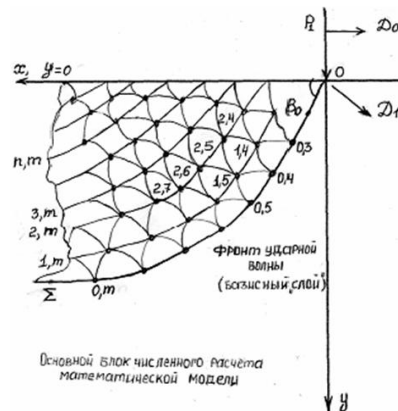


Рис. 2. Общая схеме ячеисто-послойного метода расчета

«слое»  $(0, m)$ , используются найденные нами параметры на ударной волне в среде. Принимая эти параметры за начальные, выбираются две точки, лежащие на ударной волне, с индексами  $(n - 1, m)$  и  $(n - 1, m + 1)$ ;  $n$  – номер слоя, а  $m$  – номер точки на этом слое (рис. 1), где  $n, m$  принимают целочисленные значения

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Из точки  $(n-1, m)$  проводится характеристика первого семейства, а из  $(n-1, m+1)$  - второго. Точка  $(n, m)$  определяется как пересечение характеристик в плоскости  $x, y$ . Приняв во внимание, что линия тока делит угол между характеристиками пополам, определяются параметры точки  $(n, m^*)$ .

Из уравнений (11), (12) получены две системы линейно-разностных уравнений для определения искомых параметров (искомые значения подчеркнуты дважды) в узловой точке  $(n, m)$ .

$$\begin{cases} \underline{V_{n,m}} - V_{n-1,m} = \frac{1}{A_1} \left[ \left( \underline{U_{n,m}} - U_{n-1,m} \right) - B_1(x_{n,m} - x_{n-1,m}) \right] \\ \underline{V_{n,m}} - V_{n-1,m+1} = \frac{1}{A_2} \left[ \left( \underline{U_{n,m}} - U_{n-1,m+1} \right) - B_2(x_{n,m} - x_{n-1,m+1}) \right] \\ \begin{cases} y_{n,m} - y_{n-1,m} = \lambda_1(x_{n,m} - x_{n-1,m}) \\ y_{n,m} - y_{n-1,m+1} = \lambda_2(x_{n,m} - x_{n-1,m+1}) \end{cases} \end{cases}$$

Значения  $A_{1,2}; B_{1,2}; \lambda_{1,2}$  определяются через параметры в соответствующих точках рассчитанного предыдущего "слоя"  $(n-1, m; n-1, m+1)$ . Вихрь выражается (рис. 3) через значения параметров в точках  $n, m; n, m^*$

$$\omega_{n,m} = \frac{V_{n,m} - V_{n,m}^*}{x_{n,m} - x_{n,m}^*} - \frac{U_{n,m} - U_{n,m}^*}{y_{n,m} - y_{n,m}^*}.$$

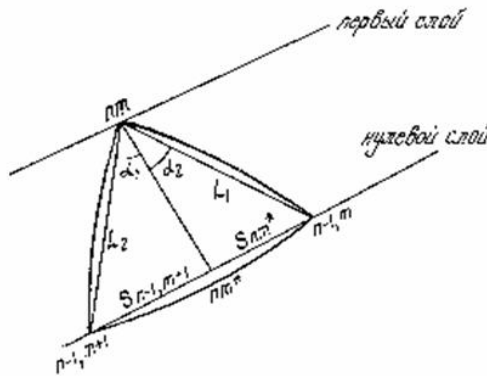


Рис. 3. Расчетная ячейка

Для расчета параметров трехфазной среды вдоль линии тока

$$D_0 U + \frac{U^2 + V^2}{2} + \int \frac{P_{n,m}}{P_{n,m}^* \rho} dP + D_0 \int \frac{Y_{n,m}}{Y_{n,m}^*} \frac{\partial V}{\partial x} dy = D_0 U_{n,m}^* + 0,5(U_{n,m}^{*2} + V_{n,m}^{*2}) \quad (13)$$

Последний интеграл в левой части равенства (13) был представлен следующим образом

$$\int_{y_{n,m}^*}^{y_{n,m}} \frac{\partial V}{\partial x} dy = \frac{V_{n,m} - V_{n,m}^*}{x_{n,m} - x_{n,m}^*} (y_{n,m} - y_{n,m}^*).$$

Применив ранее полученное уравнение (4) состояния трехфазной среды, первый интеграл в левой части (13) был представлен в виде:

$$\Phi = \int_{P_{n,m}^*}^{P_{n,m}} \frac{dP}{\rho_{n,m}^*} = \frac{1}{\rho_{n,m}^*} \int_{P_{n,m}^*}^{P_{n,m}} \left[ f_{10} \left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + f_{20} \left( 1 - \frac{P - P_0}{K_2} \right) + f_{30} \left( 1 - \frac{P - P_0}{K_3} \right) \right] dP.$$

После вычисления последнего интеграла получено выражение для давления в точке  $(n, m)$ .

$$\Phi = L_1 P_{n,m}^2 + L_2 P_{n,m} + L_3 P_{n,m}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + L_4$$

где

$$L_1 = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{f_{20}}{K_2} + \frac{f_{30}}{K_3} \right); \quad L_2 = \frac{1}{\rho_0} \left[ f_{20} + f_{30} + \left( \frac{f_{20}}{K_2} + \frac{f_{30}}{K_3} \right) P_0 \right]; \quad L_3 = \frac{f_{10} \gamma P_{n,m}^{\frac{1}{\gamma}}}{(\gamma-1) \rho_0}$$

$$L_4 = -\frac{P_{n,m}^*}{\rho_0} \left[ \frac{f_{10} \gamma}{\gamma-1} + f_{20} + f_{30} + \left( \frac{f_{20}}{K_2} + \frac{f_{30}}{K_3} \right) P_0 - P_{n,m}^* \left( \frac{f_{20}}{2K_2} + \frac{f_{30}}{2K_3} \right) \right].$$

Суммируя результаты расчетов интегралов, входящих в (13) найдено давление, а затем, по уравнению состояния многофазной среды

$$\rho_{n,m} = \rho_0 \left[ f_{10} \left( \frac{P_{n,m}^*}{P_{n,m}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + f_{20} \left( 1 - \frac{P_{n,m} - P_0}{K_2} \right) + f_{30} \left( 1 - \frac{P_{n,m} - P_0}{K_3} \right) \right]^{-1}$$

приведенная плотность среды, объемные содержания компонент, а также скорость звука в расчетной точке  $(n, m)$  многофазной среды.

$$C_{n,m} = \frac{f_{10} \left( \frac{P_0}{P_{n,m}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + f_{20} + f_{30} + (P_{n,m} - P_0) \left( \frac{f_{20}}{K_2} + \frac{f_{30}}{K_3} \right)}{\left\{ \rho_0 \left[ \frac{f_{10} P_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma P_{n,m}^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}} + \frac{f_{20}}{K_2} + \frac{f_{30}}{K_3} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

На основе вышеприведенной схемы задача решена численно на ЭВМ. Некоторые результаты расчета представлены в виде распределения  $P, U, V$ , отнесенного к их максимальным значениям на фронте бегущей волны (рис. 4, 5).

Из рис. 4 и 5 видно, что скорости и давления вдоль ударной волны падают медленнее, чем вдоль границы полупространства. Так, для варианта I ( $P = 100$  ат,  $D_0 = 3105$  м/с,  $\beta_0 = 26.2^\circ$ ,  $f_{10} = 0.001$ ,  $f_{20} = 0.399$ ,  $f_{30} = 0.6$ ) на расстоянии 1 метр от точки 0 вдоль границы давление ( $P$ ) падает на 84 %, в то же время как на таком же расстоянии вдоль ударной волны оно падает на 11 %.

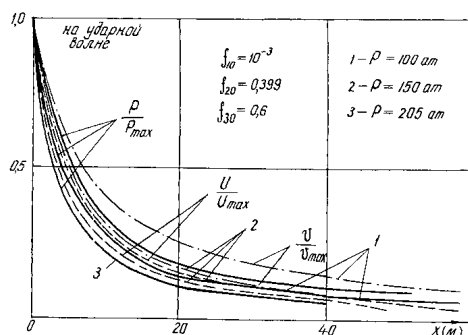


Рис. 4. Кривые распределения параметров в трехфазной среде

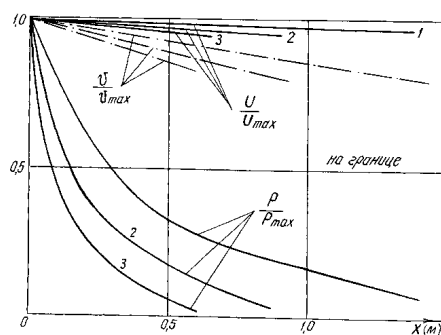


Рис. 5. Кривые распределения параметров на границе трехфазной среды и воздуха

**Выводы.** Развита численный метод исследования динамики движения многокомпонентных сред при ударных внешних нагрузках на основе модификаций метода характеристик, учитывающий самосогласованность определения поля скоростей среды, положения характеристик, а также наличия поверхности сильного разрыва. На основе ячеисто-послойного метода численного решения исследован ряд проблем движения сред, имеющих важное научное и практическое значение:

- ◆ влияние содержания компонент среды на характер ее волнового движения;
- ◆ формирование фронта ударной волны в среде в зависимости от содержания компонент среды и величины сверхзвуковой нагрузки;
- ◆ глубина проникания волновой нагрузки при больших скоростях распространения в многокомпонентную среду.

Показано, что размер возмущенной области среды при больших скоростях распространения локально-экстремального воздействия по ее поверхности значительно превышает характерную длину этого воздействия, что позволяет определить зоны безопасности в условиях ударных воздействий.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 25. – Вып. 4.
2. Григорян С.С., Мартыросян М.М. О волнах в грунте, возбуждаемых наземным взрывом. Отчет № 497. – М.: Институт механики МГУ, 1969.
3. Kaliski S., Osieski I. Plaska fala odciarena i osrodku fircinie nielinowym przy zmiennum mobile obciazenia. – Wazawa, 1958.
4. Алексеенко В.Д., Григорян С.С., Новгородов А.Ф., Рыков Г.В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов // Доклады Академии наук СССР. – 1960. – Т. 133, № 6.
5. Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых средах. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
6. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, № 2.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. – 464 с.
8. Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. – М.: ГОЭТАР-Медиа 2014. – 640 с.
9. Крайко А.Н. и др. Механика многофазных сред // Сборник «Науки и техники», Гидродинамика. – М.: ВИНТИ, 1972. – Т. 6. – С. 93-174.

10. Green A.E., Naghdi M.A. Attheory of mixtures Arch Rat // Mech and Anal. – 1967. – Vol. 24, No. 4. – P. 243-263.
11. Eringen A.C., Ingram I.D. Continuum theory of chemically reacting media // Snt. J. Eng. – Sep. 1956. – Vol. 3, No. 2. – P. 197-212.
12. Lutzky M., Lehto D.L. Shock propagation in spherically symmetric exponential atmosphere // Phys. Fluids. – 1968. – Vol. 11, No. 7. – P. 1466.
13. Carrier G.F. Shock waves in a dusty gas // J. Fluid Mech. – 1958. – Vol. 4. – P. 376-382.
14. Dunwoody N.T., Muller I. Arch Ration Mech and Anal. – 1968. – Vol. 29, No. 5.
15. Гогосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Об одной модели многофазной среды // Доклады Академии наук СССР. – 1977. – № 5. – С. 1098-1101.
16. Гогосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Об описании многофазных сред В кн. Проблема осреднения и построения континуальных моделей в механике сплошной среды. – М., 1980. – С. 36-52.
17. Мамадалиев В.А., Молев В.П. О распространении двумерной пластической волны в нелинейно-сжимаемой полуплоскости // ЖПМиТФ. – 1977. – № 4. – С. 152-156.
18. Truesdell C. Sulle basi della termomechanica Rend // Acad naz Lincei, Cl. Sci. Fis, mat. e natur. Ser. 8. – 1957. – Vol. 22. – P. 33-38, 158-166.
19. Fick A. Uber Diffusion // Ann. Phys. und Chem. – 1855. – Vol. 94, No.1. – P. 59-86.
20. Hilbert D. Mechanik der Continua Lechures of notes by W. Marchall in Purdue University, Library. – P. 1906-1907.
21. Кубанова А.К. Моделирование динамики движения поликомпонентных систем при внешних воздействиях. – М.: ООО «ИПЦ» Маска, 2010. – 280 с.
22. Кубанова А.К. Математическое моделирование динамики движения трехфазной среды при внешнем воздействии // Международная конференция «Современные проблемы газовой и волновой динамики». – М., 2009. – С. 62-64.
23. Рахматулин Х.А., Кубанова А.К. Волновое движение трехкомпонентной среды под действием нагрузки, бегущей по плоской границе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1983. – № 4. – С. 100-106.
24. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках // Университетская книга. – М.: Изд. «Логос», 2016.
25. Министерство обороны РФ. Центральный физико-технический институт. Физика ядерного взрыва. – М.: Наука, 1997. – Т. 1. – 528 с.

#### REFERENCES

1. Grigoryan S.S. Ob osnovnykh predstavleniyakh dinamiki gruntov [About the basic concepts of soil dynamics], *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1960, Vol. 25, Issue 4.
2. Grigoryan S.S., Martirosyan M.M. O volnakh v grunte, vzbuzhdaemykh nazemnym vzryvom. Otchet № 497 [About the waves in the soil induced by ground explosion. Report No. 497]. Moscow: Institut mekhaniki MGU, 1969.
3. Kaliski S., Osieski I. Plaska fala odciarenia u osrodku firicnie nielinowym przy zmiennum mobile obciazenia. – Wazawa, 1958.
4. Alekseenko V.D., Grigoryan S.S., Novgorodov A.F., Rykov G.V. Nekotorye eksperimental'nye issledovaniya po dinamike myagkikh gruntov [Some experimental fundamental research on the dynamics of soft soils], *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Doklady Sciences USSR], 1960, Vol. 133, No. 6.
5. Lyakhov G.M. Volny v gruntakh i poristyykh sredakh [Waves in soils and porous media]. Moscow: Nauka, 1982, 288 p.
6. Rakhmatulin Kh.A. Osnovy gazodinamiki vzaimopronikayushchikh dvizheniy szhimaemykh sred [Fundamentals of gas dynamics of interpenetrating motions of compressible fluids], *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1956, Vol. 20, No. 2.
7. Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka, 1987, Vol. 1, 464 p.
8. Nigmatulin R.I. Mekhanika sploshnoy sredy. Kinematika. Dinamika. Termodinamika. Statisticheskaya dinamika [Mechanics of the continuous environment. Kinematics. Dynamics. Thermodynamics. Statistical dynamics]. Moscow: GOETAR-Media 2014, 640 p.

9. *Krayko A.N. i dr. Mekhanika mnogofaznykh sred* [Mechanics of multiphase mediums], *Sbornik «Nauki i tekhniki», Gidrodinamika* [the Collection "Science and technology", fluid dynamics]. Moscow: VINITI, 1972, Vol. 6, pp. 93-174.
10. *Green A.E., Naghdi M.A.* Athery of mixtures *Arch Rat, Mech and Anal.*, 1967, Vol. 24, No. 4, pp. 243-263.
11. *Eringen A.C., Ingram I.D.* Continuum theory of chemically reacting media, *Snt. J. Eng.*, Sep. 1956, Vol. 3, No. 2, pp. 197-212.
12. *Lutzky M., Lehto D.L.* Shock propagation in spherically symmetric exponential atmosphere, *Phys. Fluids.* 1968, Vol. 11, No. 7, pp. 1466.
13. *Carrier G.F.* Shock waves in a dusty gas, *J. Fluid Mech.*, 1958, Vol. 4, pp. 376-382.
14. *Dunwoody N.T., Muller I.* *Arch Ration Mech and Anal*, 1968, Vol. 29, No. 5.
15. *Gogosov V.V., Naletova V.A., Shaposhnikova G.A.* Ob odnoy modeli mnogofaznoy sredy [A model for the multi-phase medium], *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Doklady Sciences USSR ], 1977, No. 5, pp. 1098-1101.
16. *Gogosov V.V., Naletova V.A., Shaposhnikova G.A.* Ob opisaniy mnogofaznykh sred: V kn. Problema osredneniya i postroeniya kontinual'nykh modeley v mekhanike sploshnoy sredy [About the description of multiphase media in book: The problem of averaging and the construction of continuum models in continuum mechanics]. Moscow, 1980, pp. 36-52.
17. *Mamadaliyev V.A., Molev V.P.* O rasprostraneni dvmernoy plasticheskoy volny v nelineynozshhimaemoy poluploskosti [On distribution of two-dimensional plastic waves in nonlinear compressible half-plane], *ZhPMiTF*, 1977, No. 4, pp. 152-156.
18. *Truesdell C.* Sulle basi della termomechanica *Rend, Acad naz Lincei, Cl. Sci. Fis, mal. e natur. Ser. 8*, 1957, Vol. 22, pp. 33-38, 158-166.
19. *Fick A.* Uber Diffusion, *Ann. Phys. und Chem.*, 1855, Vol. 94, No. 1, pp. 59-86.
20. *Hilbert D.* *Mechanik der Continua* Lectures of notes by W. Marchall in Purdue University, Library, pp. 1906-1907.
21. *Kubanova A.K.* Modelirovanie dinamiki dvizheniya polikomponentnykh sistem pri vneshnikh vozdeystviyakh [Modeling dynamics of multicomponent systems under external influences]. Moscow: OOO «IPTs» Maska, 2010, 280 p.
22. *Kubanova A.K.* Matematicheskoe modelirovanie dinamiki dvizheniya trekhfaznoy sredy pri vneshnem vozdeystvii [Mathematical modelling of dynamics of motion of a three-phase environment of an external impact], *Mezhdunarodnaya konferentsiya «Sovremennye problemy gazovoy i volnovoy dinamiki»* [International conference "Modern problems of gas and wave dynamics"]. Moscow, 2009, pp. 62-64.
23. *Rakhmatulin Kh.A., Kubanova A.K.* Volnovoe dvizhenie trekhkomponentnoy sredy pod deystviem nagruzki, begushchey po ploskoy granitse [The wave motion of a three-component environment, under the action of load, running on a flat boundary], *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika, mekhanika* [Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika], 1983, No. 4, pp. 100-106.
24. *Rakhmatulin Kh.A., Dem'yanov Yu.A.* Prochnost' pri intensivnykh kratkovremennykh nagruzkakh [Strength under intensive short-time loads], *Universitetskaya kniga* [University book]. Moscow: Izd. «Logos», 2016.
25. Ministerstvo oborony RF. Tsentral'nyy fiziko-tekhnicheskiiy institut. Fizika yadernogo vzryva [The Ministry of defence of the Russian Federation. Central physico-technical Institute. Physics of a nuclear explosion]. Moscow: Nauka, 1997, Vol. 1, 528 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Э.М. Карташов.

**Кубанова Асият Караджашевна** – Российский университет дружбы народов (РУДН); e-mail: a.k.kubanova@mail.ru; 117485, Москва, ул. Бултерова, 2, кв. 10; тел.: +79267606935; кафедра прикладной математики; д.ф.-м.н.; профессор.

**Kubanova Asijat Karadzhashевна** – The Peoples' Friendship University of Russia (PFUR); e-mail: a.k.kubanova@mail.ru; 2-1-10, Butlerova street, Moscow, 117485, Russia; phone: +79267606935; the department of applied mathematics; dr. phys.-math. sc; professor.