

Раздел I. Технологии управления и моделирования

УДК 681.5.013

В.Х. Пшихопов, М.Ю. Медведев

ПЛАНИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУППЫ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ*

Рассматривается проблема планирования траекторий движения группы подвижных объектов, функционирующей в двумерной среде с неподвижными препятствиями. Рассматриваются уравнения кинематики подвижных объектов на плоскости с идеальными связями. Предлагается метод планирования траекторий движения, основанный на интерпретации всех соседних объектов, как репеллеров. Метод позволяет на основе простых алгоритмов, реализуемых подвижными объектами, без использования централизованного алгоритма, организовать групповое движение. Предлагается новый способ введения репеллеров, основанный на формировании неустойчивых состояний в фазовом пространстве подвижных объектов. Отталкивающие силы формируются в виде выходов динамических звеньев, интегрирующих нелинейные функции, зависящие от расстояний до препятствий. В результате получены законы изменения скоростей и направлений движения подвижных объектов. С помощью метода функций Ляпунова проведен анализ полученных траекторий движения на устойчивость. Показано наличие и асимптотическая устойчивость установившихся режимов движения группы подвижных объектов. Предложена модификация алгоритмов планирования, не требующая предварительного задания траекторий движения подвижных объектов. Разработанные алгоритмы реализованы в рамках децентрализованной структуры системы управления. Проведено численное моделирование группы, состоящей из пяти роботов в среде с неподвижными препятствиями. На основании проведенного анализа и результатов моделирования делаются выводы о применимости предложенного метода на практике. Обсуждается развитие предлагаемого метода планирования траекторий движения, предполагающее использование как уравнений кинематики, так и уравнений динамики, что позволит учитывать скорости сближения с препятствиями. Также обсуждается возможность использования предложенного метода в трехмерных средах и средах с подвижными препятствиями.

Групповое управление; подвижный объект; децентрализованное управление; репеллер; неустойчивый режим; функция Ляпунова.

V.Kh. Pshikhopov, M.Yu. Medvedev

PATH PLANNING FOR A GROUP OF VEHICLES IN THE 2-D ENVIRONMENT WITH OBSTACLES

The problem of distributed control of heterogeneous group of vehicles in the environment with obstacles is considered. The control algorithms are based on kinematics equations of vehicles in a two dimensional environment. The proposed algorithms are based on the principle of allowing all neighboring robot objects as repeller. The proposed method of decentralized group control is based on the simple local control algorithms. A new approach for forming repellers is discussed. In contrast to the known methods for forming repeller, repulsive forces are generated at the output of dynamic system that allows the synthesis in the state space, and not in geometrical space. Re-

* Работа поддержана грантом Российского научного фонда 14-19-01533, выполняемого Южным федеральным университетом.

sults of the proposed algorithms are velocities and heading angles of the controlled vehicles. By means of a method of functions of Lyapunov the analysis of the received movement trajectories on stability is carried out. Existence and asymptotic stability of the steady state of the movement of vehicles group is shown. The modification of algorithms of planning which isn't demanding a preliminary references is offered. The developed algorithms are realized within the decentralized structure of a control system. Numerical modeling of the group consisting of five robots in the environment with motionless obstacles is carried out. On the basis of the carried-out analysis and results of modeling conclusions about applicability of the offered method in practice are drawn. The development of the offered trajectories planning method of the movement assuming use as the kinematics equations, and dynamics equations that will allow to consider speeds of rapprochement with obstacles is discussed. Also possibility of use of the offered method in three-dimensional environments and Wednesdays is discussed with mobile obstacles.

Group control; vehicle; decentralized control; repeller; unstable mode; function of Lyapunov.

Введение. Идея использования отталкивающих и притягивающих множеств в системах управления подвижными объектами впервые реализована в работах А.К. Платонова в 1970 году [1, 2], в которых представлен метод потенциалов (потенциальных полей) в задаче выбора пути для мобильного робота. За рубежом основные ссылки делаются на работы Брукса и Хатиба, которые вышли в свет в 1985 и 1896 году [3–5]. Вместе с тем работа фирмы Хитачи по управлению МР, в которой использованы идеи «силового поля», выпущена в 1984 году [6]. В настоящее время метод потенциалов получил широкое распространение. Обзор и анализ методов, использующих потенциальные поля, можно найти в работе [7]. В работах [8, 9] изложена идея преобразования точечных препятствий в репеллеры, используя теорему Ляпунова о неустойчивости. Такой подход позволяет реализовать движение в средах с препятствиями без картографирования. В [10] этот подход распространен на трехмерное пространство, а в [7] рассматривается задача движения в среде с препятствиями, которые могут образовывать различные конфигурации.

Идея представления препятствий репеллерами также может быть востребована при решении задач группового управления [11]. При этом могут рассматриваться однотипные или разнотипные группы [12, 13]. Группы зачастую состоят из интеллектуальных роботов, к которым принято относить либо системы, снабженные мощным вычислительным комплексом, либо системы, построенные на основе интеллектуальных методов, таких как аппарат нечеткой логики Л. Заде, искусственные нейронные сети и экспертные системы [14, 15].

Когда для решения конкретной задачи не требуются все роботы группы или, когда перед группой ставится несколько задач, формируются кластеры (подгруппы) [16, 17].

В системах группового управления роботами могут реализовываться методы централизованной, децентрализованной или гибридной стратегии управления. При централизованной стратегии система управления каждого робота получает алгоритм действий по информационным каналам и реализует его. В этом случае системы управления роботов-исполнителей, фактически, решают локальные задачи управления исполнительными механизмами, поэтому основная часть роботов группы могут иметь не сложные вычислительные комплексы.

Более перспективной представляется децентрализованная стратегия управления, которая приводит к распределенным системам группового управления. В этой связи в данной статье рассматривается задача распределенного управления неоднородной группой подвижных объектов в двумерной среде с препятствиями с использованием идеологии репеллеров.

Алгоритм с предварительным заданием траектории. Рассмотрим подвижные объекты, уравнения кинематики которых имеют вид (рис. 1)

$$\dot{y}_{1i} = V_i \cos \varphi_i, \quad \dot{y}_{2i} = V_i \sin \varphi_i, \quad (1)$$

где y_{1i}, y_{2i} – координаты подвижного объекта; V_i – скорость подвижного объекта; φ_i – угол курса подвижного объекта; $i = \overline{1, n}$.

Положение подвижного объекта характеризуется координатами y_{1i}, y_{2i} во внешней системе Oy_1y_2 . Скорость V_i и курсовой угол φ_i являются управлениями. Каждый подвижный объект измеряет координаты соседних объектов и имеет информацию о координатах y_L, y_R области L , в которой функционирует группа. Число n подвижных объектов в группе неизвестно. Ставится задача перемещения группы в направлении Oy_2 оси с равномерным распределением объектов вдоль оси Oy_1 .

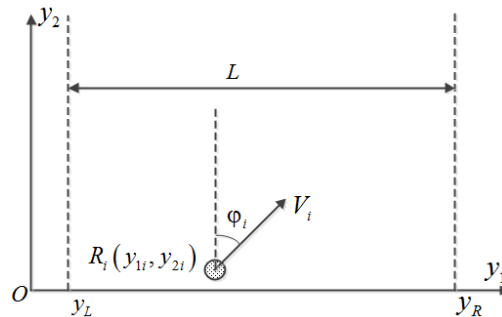


Рис. 1. Переменные состояния подвижных объектов и система координат

Пусть $y_{2i} = 0$, а $y_{1i} \neq y_{1j}, \forall i \neq j, i, j = \overline{1, n}$. Пронумеруем подвижные объекты таким образом, чтобы индекс $i = \overline{1, n}$ возрастал с увеличением координаты y_{1i} . В этом случае локальный алгоритм управления для i -го подвижного объекта можно синтезировать следующим образом.

Представим для i -го подвижного объекта соседние объекты в виде репеллеров. При этом, соседний слева объект должен формировать силу, выталкивающую i -й подвижного объекта вправо, а соседний справа объект – вправо. Функции, на основе которых формируются репеллеры для i -го подвижного объекта, представлены на рис. 2.

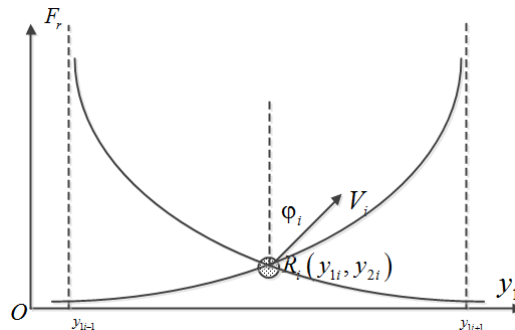


Рис. 2. Формирование репеллеров

В данной работе предлагается формировать отталкивающие силы в виде динамической переменной, являющейся результатов интегрирования функций, представленных на рис. 2.

Пусть функции, представленные на рис. 2, являются степенными функциями. Тогда указанная идея реализуется путем расширения системы (2) следующими уравнениями:

$$\dot{z}_i = \frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}}, \quad (2)$$

где $y_{l0} = y_L$; $y_{ln+1} = y_R$.

Как следует из уравнения (2), переменные z_i зависят от величин, обратных расстояниям между роботами R_{i-1} , R_i и R_{i+1} .

Пусть исходная требования к траектории движения i -го подвижного объекта представлены в виде вектора

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} y_{li} - y_{i0} \\ \dot{y}_{2i} - V_k \end{bmatrix},$$

где y_{i0}, V_k – произвольные числа, не равные нулю.

Чтобы учесть влияние репеллеров сформируем цель системы управления i -го подвижного объекта в виде

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} y_{li} - y_{i0} (1 + z_i) \\ \dot{y}_{2i} - V_k \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Таким образом, при появлении репеллера слева от i -го подвижного объекта переменная z_i увеличивается, следовательно, составляющая $y_{i0} (1 + z_i)$ также увеличивается. При появлении репеллера справа, как следует из (2) переменная z_i уменьшается, следовательно, выражение $y_{i0} (1 + z_i)$ также уменьшается.

Производная по времени от первого элемента вектора (3) в силу уравнений (1), (2) описывается выражением

$$\dot{\Psi}_i [1] = V_i \cos \varphi_i - y_{i0} \left(\frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}} \right). \quad (4)$$

Потребуем, чтобы замкнутая система управления i -го подвижного объекта удовлетворяла следующим дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_i [1] + T_{0i} \Psi_i [1] &= 0, \\ \Psi_i [2] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

где T_{0i} – постоянные положительные числа.

Подставив в уравнение (5) выражения (3), (4), получим

$$\begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i0} \left(\frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}} \right) - T_{0i} (y_{li} - y_{i0} (1 + z_i)) \\ V_k \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} V_i \\ \Phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{u_{ix}^2 + u_{iy}^2} \\ \arctan\left(\frac{u_{iy}}{u_{ix}}\right) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Проведем анализ поведения замкнутой системы управления, которая имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{1i} \\ \dot{y}_{2i} \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i0} \left(\frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}} \right) - T_{0i} (y_{li} - y_{i0} (1 + z_i)) \\ V_k \\ \frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что замкнутая система управления декомпозирована на две независимые подсистемы, первая из которых описывается вторым уравнением, а вторая – первым и третьим.

Проведем анализ замкнутой системы управления относительно переменных y_{li} и z_i , используя уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{li} \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i0} \left(\frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}} \right) - T_{0i} (y_{li} - y_{i0} (1 + z_i)) \\ \frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Полагая в уравнениях (9) производные по времени равными нулю, найдем уравнения установившегося режима

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}}, \\ 0 = y_{i0} \left(\frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} - \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}} \right) - T_{0i} (y_{li} - y_{i0} (1 + z_i)). \end{cases} \quad (10)$$

Выразим из (10) переменные y_{li} и z_i

$$\begin{cases} y_{li} = \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2}, \\ z_i = \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2y_{i0}} - 1. \end{cases} \quad (11)$$

Выразим рекуррентные соотношения (11) через параметры y_L, y_R . Запишем первое уравнение из (11) для $i=1$:

$$y_{11} = \frac{y_L + y_{12}}{2}. \quad (12)$$

Аналогично для $i=2$ имеем

$$\begin{aligned}
 y_{12} &= \frac{y_{11} + y_{13}}{2} = \frac{\frac{y_L + y_{12}}{2} + y_{13}}{2} \Rightarrow y_{12} = \frac{y_L}{4} + \frac{y_{12}}{4} + \frac{y_{13}}{2}, \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{3}{4} y_{12} = \frac{y_L}{4} + \frac{y_{13}}{2} \Rightarrow y_{12} = \frac{y_L + 2y_{13}}{3}.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Для $i = 3$ получаем:

$$\begin{aligned}
 y_{13} &= \frac{y_{12} + y_{14}}{2} = \frac{\frac{y_L + 2y_{13}}{3} + y_{14}}{2} \Rightarrow y_{13} = \frac{y_L}{6} + \frac{2y_{13}}{6} + \frac{y_{14}}{2}, \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{2}{3} y_{13} = \frac{y_L}{6} + \frac{y_{14}}{2} \Rightarrow y_{13} = \frac{y_L + 3y_{14}}{4}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Анализируя последовательность (12)–(14) приходим к выражению

$$y_{1i} = \frac{y_L + iy_{i+1}}{i+1}. \quad (15)$$

Теперь запишем выражение (15) для $i = n$:

$$y_{1n} = \frac{y_L + ny_R}{n+1}. \quad (16)$$

Далее для $i = n-1$ из (15) с учетом (16) получаем

$$\begin{aligned}
 y_{1n-1} &= \frac{y_L + (n-1)y_{1n}}{n} = \frac{y_L + (n-1)\frac{y_L + ny_R}{n+1}}{n} = \\
 &= \frac{(n+1)y_L + (n-1)y_L + (n-1)ny_R}{n(n+1)} = \frac{2y_L + (n-1)y_R}{n+1}.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично, для $i = n-2$ из (15) с учетом (17) получаем

$$y_{1n-2} = \frac{3y_L + (n-2)y_R}{n+1}. \quad (18)$$

Проводя анализ последовательности (16)–(18), с учетом второго уравнения (11), получаем следующие выражения для уравнений установившегося режима замкнутой системы управления

$$\begin{cases} y_{1i} = \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1}, \\ z_i = \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} - 1. \end{cases} \quad (19)$$

Выражения (19) определяют значения переменных y_{1i} и z_i , $i = \overline{1, n}$, в установившемся режиме движения. Из (19) видно, что установившиеся значения координат y_{1i} зависят только от числа роботов n и границ области функционирования y_L, y_R .

Проанализируем устойчивость замкнутой системы (1), (2), (6), (7) относительно установившегося режима (19).

Для этого запишем следующую квадратичную форму в качестве функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right)^2 + \left(z_i - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} + 1 \right)^2 \right\}. \quad (20)$$

Как видно из выражения (20) в качестве функции Ляпунова выбрана сумма квадратичных функций отклонений от установившегося режима, описываемого соотношениями (19).

Производная по времени от функции (20) с учетом уравнений замкнутой системы (1), (2), (6), (7) равна

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n \left\{ \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) (y_{0i} \dot{z}_i - T_0 (y_{li} - y_{0i} (1 + z_i))) + \right. \\ & \left. + \left(z_i - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} + 1 \right) \dot{z}_i \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Преобразуем выражение (21) к виду

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n \left\{ \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) y_{0i} \dot{z}_i + \right. \\ & + \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) \left(-T_0 \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} + \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} - y_{0i} (1 + z_i) \right) \right) + \\ & + \left(z_i - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} + 1 \right) \dot{z}_i \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) y_{0i} \dot{z}_i - \right. \\ & - T_0 \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right)^2 + \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) T_0 \left(y_{0i} (z_i + 1) - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) + \\ & \left. + \left(z_i - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} + 1 \right) \dot{z}_i \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Выделим полные квадраты в выражении (22), используя его второе и третье слагаемые:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n \left\{ -T_0 \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} - \frac{y_{0i}}{2} \left(z_i + 1 - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} \right) \right)^2 - \right. \\ & - \frac{y_{0i}^2}{4} \left(z_i + 1 - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} \right)^2 + \left(z_i + 1 - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} \right) \dot{z}_i + \\ & \left. + \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) y_{0i} \dot{z}_i \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Снова выделим полные квадраты, используя второе и третье слагаемые выражения (23):

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n \left\{ -T_0 \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} - \frac{y_{0i}}{2} \left(z_i + 1 - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} \right) \right)^2 - \right. \\ & - \left(\frac{y_{0i}}{2} \left(z_i + 1 - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} \right) - \frac{\dot{z}_i}{y_{0i}} \right)^2 - \frac{\dot{z}_i^2}{y_{0i}^2} + \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) y_{0i} \dot{z}_i \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Применяя еще раз операцию выделения полных квадратов, из выражения (24), с учетом уравнения (2), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n \left\{ -T_0 \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} - \frac{y_{0i}}{2} \left(z_i + 1 - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} \right) \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left(\frac{y_{0i}}{2} \left(z_i + 1 - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{(n+1)y_{0i}} \right) - \frac{1}{y_{0i}} - \frac{1}{y_{li} - y_{li-1} - y_{li+1} - y_{li}} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{y_{li} - y_{li-1} - y_{li+1} - y_{li}} - \frac{1}{y_{0i}} - \frac{y_{0i}}{2} \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right) \right)^2 - \frac{y_{0i}^2}{4} \left(y_{li} - \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, из (25) следует, что положение равновесия (19) является асимптотически устойчивым в замкнутой системе (1), (2), (6), (7). При этом полагается, что

$$y_{li} \neq y_{li-1}, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Алгоритм с обеспечением строя. Алгоритм управления (6), (7) требует предварительного задания траектории движения. Кроме того, подвижные объекты не с алгоритмом управления (6), (7) движутся с постоянными скоростями, поэтому не придерживаются одной линии. В условиях препятствий длины траекторий различных подвижных объектов могут сильно отличаться, поэтому требуется модифицировать алгоритмы управления. Для этого введем в рассмотрение следующий вектор ошибок управления

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} y_{li} - \frac{y_{li-1} + y_{li+1} - z_i}{2}, \quad i = \overline{1, n} \\ \dot{y}_{2i} - V_k, \quad y_{2i} - y_{2i-1}, \quad i = \overline{2, n} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Потребуем, чтобы ошибки (26) удовлетворяли следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i [1] + T_{1i} \psi_i [1] &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \psi_i [2] &= 0, \quad \dot{\psi}_i [2] + T_{2i} \psi_i [2] = 0, \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (27)$$

где T_{1i}, T_{2i} – постоянные параметры.

Продифференцировав вектор (26) по времени и подставив его в (27), получим систему алгебраических уравнений, разрешив которую относительно скоростей и углов ориентации подвижных объектов, получим:

$$\begin{aligned} u_{ix} &= \frac{\dot{y}_{li-1} + \dot{y}_{li+1} - \frac{1}{y_{li} - y_{li-1}} + \frac{1}{y_{li+1} - y_{li}}}{2} - T_{1i} \left(y_{li} - \frac{y_{li-1} + y_{li+1} - z_i}{2} \right), \quad i = \overline{1, n}, \\ u_{iy} &= V_k, \\ u_{iy} &= \dot{y}_{2i-1} - T_{2i} (y_{2i} - y_{2i-1}), \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда уравнения замкнутой системы управления имеют вид:

$$\dot{y}_{1i} = \frac{\dot{y}_{1i-1} + \dot{y}_{1i+1} - \frac{1}{y_{1i} - y_{1i-1}} + \frac{1}{y_{1i+1} - y_{1i}}}{2} - T_{1i} \left(y_{1i} - \frac{y_{1i-1} + y_{1i+1} - z_i}{2} \right), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\dot{y}_{21} = V_k,$$

$$\dot{y}_{2i} = \dot{y}_{2i-1} - T_{2i} (y_{2i} - y_{2i-1}), \quad i = \overline{2, n},$$

$$\dot{z}_i = \frac{1}{y_{1i} - y_{1i-1}} - \frac{1}{y_{1i+1} - y_{1i}}$$

Замкнутая система (29), как и ранее, декомпозируется на две независимые подсистемы. Первая подсистема состоит из второго и третьего уравнения системы (29), а вторая – из первого и четвертого уравнений.

Рассмотрим первую подсистему, состоящую из второго и третьего уравнения системы (29). Запишем ее в следующем виде:

$$\dot{y}_{21} = V_k,$$

$$\dot{y}_{22} = \dot{y}_{21} - T_2 (y_{22} - y_{21}) = V_k - T_2 (y_{22} - y_{21}),$$

$$\dot{y}_{23} = \dot{y}_{22} - T_2 (y_{23} - y_{22}) = V_k - T_2 (y_{22} - y_{21}) - T_2 (y_{23} - y_{22}) = V_k - T_2 (y_{23} - y_{21}),$$

$$\dots$$

$$\dot{y}_{2i} = V_k - T_2 (y_{2i} - y_{21}),$$

$$\dots$$

Проинтегрируем первое уравнение (30)

$$y_{21} = y_{21}^0 + V_k t. \quad (31)$$

Тогда, с учетом (31), последнее уравнение из (30) принимает вид

$$\dot{y}_{2i} + T_2 y_{2i} = V_k + T_2 (y_{21}^0 + V_k t). \quad (32)$$

Решая уравнение (32), получаем

$$y_{2i}(t) = (y_{2i}^0 - y_{21}^0) e^{-T_2 t} + y_{21}^0 + V_k t. \quad (33)$$

Из выражения (33) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{2i}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left((y_{2i}^0 - y_{21}^0) e^{-T_2 t} + y_{21}^0 + V_k t \right) = y_{21}^0 + V_k t.$$

Таким образом, с течением времени положения всех подвижных объектов вдоль оси Oy_2 стремятся к положению самого левого объекта, т.е. группа поддерживает строй.

Рассмотрим теперь вторую подсистему, состоящую из первого и четвертого уравнений системы (29). Установившийся режим данной подсистемы описывается уравнениями

$$0 = \frac{1}{y_{1i} - y_{1i-1}} + \frac{1}{y_{1i+1} - y_{1i}} - T_{1i} \left(y_{1i} - \frac{y_{1i-1} + y_{1i+1} - z_i}{2} \right), \quad (34)$$

$$0 = \frac{1}{y_{1i} - y_{1i-1}} - \frac{1}{y_{1i+1} - y_{1i}}.$$

Решая систему (34), получаем выражения

$$y_{li} = \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2}, \quad z_i = 0, \quad (35)$$

или

$$y_{li} = \frac{(n-i+1)y_L + iy_R}{n+1}, \quad z_i = 0. \quad (36)$$

Для исследования устойчивости замкнутой систем управления рассмотрим следующую функцию

$$V = \frac{1}{2} \left(y_i - \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2} + \frac{1}{2} z_i \right)^2. \quad (37)$$

Производная функции (37) по времени в силу уравнений замкнутой системы (29) равна

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(y_i - \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2} + \frac{1}{2} z_i \right) \left(\dot{y}_i - \frac{\dot{y}_{li-1} + \dot{y}_{li+1}}{2} + \frac{1}{2} \dot{z}_i \right) = \\ &= \left(y_i - \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2} + \frac{1}{2} z_i \right) \left(\frac{\dot{y}_{li-1} + \dot{y}_{li+1}}{2} - \frac{1}{2} \dot{z}_i - T_{li} \left(y_i - \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2} + \frac{1}{2} z_i \right) - \frac{\dot{y}_{li-1} + \dot{y}_{li+1}}{2} + \frac{1}{2} \dot{z}_i \right) = \\ &= -T_{li} \left(y_i - \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2} + \frac{1}{2} z_i \right)^2 \end{aligned} \quad (38)$$

С учетом того, что $y_0 = y_L$, $y_{n+1} = y_R$ первое уравнение из (35) можно переписать в следующем виде

$$y_n = \frac{y_L + ny_R}{n+1}, \quad y_i = \frac{y_L}{i+1} + \frac{iy_{li+1}}{i+1}, \quad i = \overline{n-1, 1}. \quad (39)$$

Поместим начало координат в точку y_L , тогда из выражения (39) приходим к соотношениям вида

$$y_n = \frac{n}{n+1} y_R, \quad y_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} y_R, \quad \dots \quad y_1 = \frac{1}{n+1} y_R. \quad (40)$$

Из (40) находим расстояние между соседними роботами:

$$y_{li} - y_{li-1} = \frac{1}{n+1} y_R = \frac{L}{n+1}. \quad (41)$$

Таким образом, рассматриваемая система управления группой роботов будет успешно функционировать при выполнении следующего условия:

$$r_p^j < \frac{L}{n + n_p + 1}. \quad (42)$$

где r_p^j – радиус препятствия.

Алгоритм с параметрическим введением неустойчивых состояний. Рассмотрим следующие выражения, определяющие ошибки роботов:

$$e_1 = \begin{bmatrix} y_{11} - \frac{y_{11-1} + y_{11+1}}{2} + \frac{LT_{11}}{2k} z_1 \\ \dot{y}_{21} - V_k \end{bmatrix}. \quad (43)$$

$$e_i = \begin{bmatrix} y_{1i} - \frac{y_{1i-1} + y_{1i+1}}{2} + \frac{LT_{1i}}{2k} z_i \\ y_{2i} - y_{2i-1} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{2, n}. \quad (44)$$

Потребуем, чтобы ошибки (43), (44) удовлетворяли следующим дифференциальным уравнениям

$$\dot{e}_1 [1] + (T_{21} - z_1^2) e_1 [1] = 0, \quad (45)$$

$$\dot{e}_i + \begin{bmatrix} T_{2i} - z_i^2 & 0 \\ 0 & T_{2i} \end{bmatrix} e_i = 0, \quad i = \overline{2, n}. \quad (46)$$

Вычислим производные от ошибок (43), (44) и, подставив их вместе с (43), (130) в (45), (46), получим алгебраические уравнения, решив которые найдем выражения для изменения скоростей и углов движения роботов:

$$\begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{y}_{1L} + \dot{y}_{12}}{2} - \frac{LT_{11}}{2k} \dot{z}_1 - (T_{21} - z_1^2) \left(y_{11} - \frac{y_{1L} + y_{12}}{2} + \frac{LT_{11}}{2k} z_1 \right) \\ V_k \end{bmatrix}. \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{y}_{li-1} + \dot{y}_{li+1}}{2} - \frac{LT_{li}}{2k} \dot{z}_i - (T_{2i} - z_i^2) \left(y_{li} - \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2} + \frac{LT_{li}}{2k} z_i \right) \\ \dot{y}_{2i-1} - T_{2i} (y_{2i} - y_{2i-1}) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Тогда уравнения замкнутой системы принимают вид

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{11} \\ \dot{y}_{21} \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{y}_{1L} + \dot{y}_{12}}{2} - \frac{LT_{11}}{2k} \dot{z}_1 - (T_{21} - z_1^2) \left(y_{11} - \frac{y_{1L} + y_{12}}{2} + \frac{LT_{11}}{2k} z_1 \right) \\ V_k \\ \frac{k}{L} (2y_{11} - y_{1L} - y_{12}) \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{li} \\ \dot{y}_{2i} \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{y}_{li-1} + \dot{y}_{li+1}}{2} - \frac{LT_{li}}{2k} \dot{z}_i - (T_{2i} - z_i^2) \left(y_{li} - \frac{y_{li-1} + y_{li+1}}{2} + \frac{LT_{li}}{2k} z_i \right) \\ \dot{y}_{2i-1} - T_{2i} (y_{2i} - y_{2i-1}) \\ \frac{k}{L} (2y_{li} - y_{li-1} - y_{li+1}) \end{bmatrix}, \quad i = \overline{2, n}. \quad (50)$$

Проведем анализ первого и третьего уравнений (49), (50) на устойчивость, полагая, что отталкивающие силы формируются уравнением

$$\dot{z}_i = k(2y_{li} - y_{li-1} - y_{li+1})/L, \quad (51)$$

Полагая в (49), (50) сигналы y_{li-1} , y_{li+1} равными нулю получаем следующую систему для анализа устойчивости

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{li} \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{LT_{li}}{2k} y_{li} - (T_{2i} - z_i^2) \left(y_{li} + \frac{LT_{li}}{2k} \frac{z_i}{2} \right) \\ \frac{2k}{L} y_{li} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Выберем в качестве функции Ляпунова квадратичную функцию следующего вида:

$$V_i = \frac{1}{2} y_{li}^2 + \frac{1}{2} (y_i + z_i)^2. \quad (53)$$

Производная по времени от выражения (53) в силу системы (52) равна

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -2(T_{li} + T_{2i} - z_i^2) y_{li}^2 - \\ & - \left[(T_{2i} - z_i^2) \frac{T_{li} L}{2k} + (T_{li} + T_{2i} - z_i^2) - \frac{4k}{L} \right] y_{li} z_i - (T_{2i} - z_i^2) \frac{T_{li} L}{2k} z_i^2. \end{aligned} \quad (54)$$

Введем следующие обозначения:

$$R_i = T_{2i} - z_i^2, \quad a_i = \frac{L T_{li}}{2k}, \quad b_i = \frac{2k}{L}, \quad (55)$$

и перепишем выражение (54) с учетом (55)

$$\dot{V}_i = -2(T_{li} + R_i) y_{li}^2 - [(1 + a_i) R_i + T_{li} - 2b_i] y_{li} z_i - R_i a_i z_i^2. \quad (56)$$

Предположим, что вектор $[y \quad z]^T$ подвергнут некоторому неособенному преобразованию [18], т.е.

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

где $\eta_1 \quad \eta_2$ – компоненты нового вектора. При этом матрица преобразования в (57) такова, что в новых переменных функция $-\dot{V}_i$ равна сумме квадратов новых переменных. Тогда с учетом преобразования (57) и принятого допущения выражение (56) запишется так

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -2(T_{li} + R_i)(c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2)^2 - \\ & - [(1 + a_i) R_i + T_{li} - 2b_i] (c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2)(c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2) - R_i a_i (c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2)^2 = -\eta_1^2 - \eta_2^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Примем $c_{12} = 0$, и из (58) получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -2(T_{li} + R_i) c_{11}^2 \eta_1^2 - [(1 + a_i) R_i + T_{li} - 2b_i] (c_{11}\eta_1)(c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2) - \\ & - R_i a_i (c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2)^2 = [-2(T_{li} + R_i) c_{11}^2 - ((1 + a_i) R_i + T_{li} - 2b_i) c_{11} c_{21} - R_i a_i c_{21}^2] \eta_1^2 - \\ & - R_i a_i c_{22}^2 \eta_2^2 - [(1 + a_i) R_i + T_{li} - 2b_i] c_{11} c_{22} + 2R_i a_i c_{21} c_{22} \eta_1 \eta_2 = -\eta_1^2 - \eta_2^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Приравнивая в левой и правой частях (59) коэффициенты при одинаковых степенях η_1, η_2 , получаем систему уравнений, решая которую находим

$$c_{22}^2 = \frac{1}{R_i a_i}, \quad (60)$$

$$c_{11} = \frac{-2R_i a_i}{(1 + a_i) R_i + T_{li} - 2b_i} c_{21}, \quad (61)$$

$$c_{21}^2 = \frac{1}{2(T_{li} + R_i) \left(\frac{-2R_i a_i}{(1 + a_i) R_i + T_{li} - 2b_i} \right)^2 - R_i a_i}. \quad (62)$$

Таким образом, преобразование (57), (60)–(62) приводит выражение (56) к канонической отрицательно определенной форме, поэтому условия неособенности преобразования (57) являются условиями асимптотической устойчивости замкнутой системы (49), (50).

Из выражения (60), с учетом обозначений (55), следует, что

$$T_{2i} > z_i^2. \tag{63}$$

Аналогично из (61) и (62) получаем

$$(1 + a_i)R_i + T_{li} - 2b_i > 0, \tag{64}$$

$$8R_i a_i (T_{li} + R_i) > [(1 + a_i)R_i + T_{li} - 2b_i]^2. \tag{65}$$

Не снижая общности, можно предположить, что выполняется условие $L = k$. В этом случае неравенство (65) принимает вид

$$\left(4T_{li} - \left(1 + \frac{T_{li}}{2}\right)^2\right)R_i^2 + \left(4T_{li}^2 - 2\left(1 + \frac{T_{li}}{2}\right)(T_{li} - 4)\right)R_i - (T_{li} - 4)^2 > 0. \tag{66}$$

Таким образом, поиск условий устойчивости сводится к решению квадратичного неравенства (66) при ограничениях (63), (64).

На рис. 3 приведено графическое решение указанных неравенств.

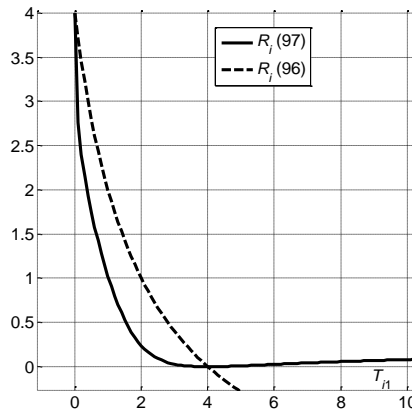


Рис. 3. Графическое решение неравенств (64), (66)

Из рис. 3 находим:

$$0 < T_{li} < 4, \quad z_i^2 < T_{2i} < z_i^2 + 4. \tag{67}$$

Результаты численного моделирования. Пусть модель робота описывается уравнениями (1), а закон управления выражением (28).

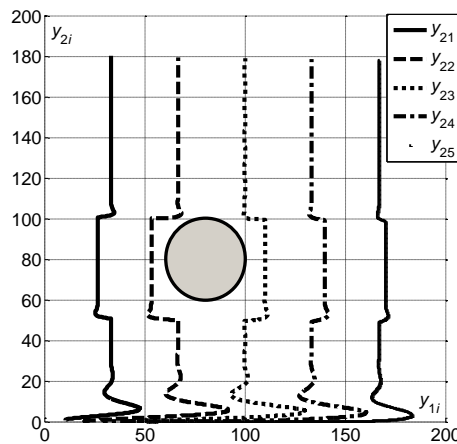


Рис. 4. Результаты моделирования

Параметры системы управления следующие: ширина рабочей зоны $L = 200$ м, $y_L = 0$ м, $y_R = 200$ м; – число роботов $n = 5$; уставки по скорости $V_{0i} = 1$ м/с; постоянные времени $T_{1i} = 1$ с⁻¹; начальные условия $y_{2i} = 0$, $y_{11} = 10, y_{12} = 20$, $y_{13} = 30, y_{14} = 40, y_{15} = 50$ м; координаты центра и радиус препятствия (80, 80) и 20 м.

В целях обеспечения безопасности маневры роботов начинаются за 10 метров до достижения препятствия. Первым маневр начинает робот, наиболее близкий к обнаруженному препятствию. На рис. 4 приведены результаты моделирования. Из рис. 4 следует, что система управления осуществляет равномерное размещение роботов вдоль оси Oy_1 , и обеспечивает обход препятствий.

Заключение. В статье предложены и проанализированы алгоритм распределенного управления группой неоднородных подвижных объектов, функционирующих в среде с препятствиями. Алгоритм строится на принципе управления, который позволяет интерпретировать все соседние объекты, как репеллеры. Предложен метод введения репеллеров, отличающийся тем, что силы отталкивания формируются динамическим звеном, интегрирующим расстояния до соседних препятствий. Проведенный анализ и результаты моделирования позволяют говорить об эффективности предложенных методов в средах с препятствиями. При этом предложенный подход может применяться и для нестационарных сред, так как препятствия представляются формально, как подвижные объекты.

Предлагаемые алгоритмы могут использоваться в системах планирования движения различных объектов [19–24]. Метод планирования обеспечивает устойчивость движения на уровне уравнений кинематики объекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Платонов А.К., Карпов И.И., Кирильченко А.А. Метод потенциалов в задаче прокладки трассы. Препринт Института прикладной математики АН СССР. – М., 1974. – 27 с.
2. Платонов А.К., Кирильченко А.А., Колганов М.А. Метод потенциалов в задаче выбора пути: история и перспективы. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2001.
3. Khatib O. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots // IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 1985. – P. 500-505.
4. Khatib O. Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots // Int. Journal of Robotics Research. – 1986. – Vol. 5, No. 1. – P. 90-98.
5. Brooks R.A. Self calibration of motion and stereo vision for mobile robots // IEEE Int. Robotics and Automation, 1986.
6. Ichikawa Y., Fujie M., Ozaki N. On mobility and autonomous properties of mobile robots // Robot. – 1984. – № 44. – P. 31-36.
7. Белоглазов Д.А., Гузик В.Ф., Косенко Е.Ю., Крухмалев В.А., Медведев М.Ю., Переверзев В.А., Пшихонов В.Х., Пьявченко А.О., Сапрыкин Р.В., Соловьев В.В., Финаев В.И., Чернухин Ю.В., Шиповалов И.О. Интеллектуальное планирование траекторий подвижных объектов в средах с препятствиями / Под ред. В.Х. Пшихопова. – М.: Физматлит, 2014. – 300 с. – ISBN 978-5-9221-1595-7.
8. Пшихонов В.Х. Аттракторы и репеллеры в конструировании систем управления подвижными объектами // Известия ТРТУ. – 2006. – № 3 (58). – С. 117-123.
9. Пшихонов В.Х. Организация репеллеров при движении мобильных роботов в среде с препятствиями // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 2. – С. 34-41.
10. Пшихонов В.Х., Медведев М.Ю., Крухмалев В.А. Позиционно-траекторное управление подвижными объектами в трехмерной среде с точечными препятствиями // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 1 (162). – С. 238-250.
11. Юревич Е.И. и др. Интеллектуальные роботы. – М.: Машиностроение, 2007. – 360 с.
12. Юревич Е.И. О проблеме группового управления роботами // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – № 2. – С. 9-13.

13. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. – М.: Физматлит, 2009. – 278 с.
14. *Васильев С.Н.* От классических задач регулирования к интеллектуальному управлению. I, II // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 1. – С. 5-21; – № 2. – С. 5-22.
15. *Пишихов В.Х., Медведев М.Ю.* Управление подвижными объектами в определенных и неопределенных средах. – М.: Наука, 2011. – 350 с. ISBN 978-5-02-037509-3.
16. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Распределенные системы планирования действий коллективов роботов. – М.: Янус-К, 2002. – 292 с.
17. *Ивченко В.Д., Корнеев А.А.* Анализ методов распределения заданий в задаче управления коллективом роботов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – № 7. – С. 36-42.
18. *Шнейдер В.Е. и др.* Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. школа, 1972. – 640 с.
19. *Pshikhov V.Kh., Krukhmalev V.A., Medvedev M.Yu., Fedorenko R.V., Kopylov S.A., Budko A.Yu., Chufistov V.M.* Adaptive control system design for robotic aircrafts // Proceedings – 2013 IEEE Latin American Robotics Symposium, LARS 2013. – P. 67-70. Doi: 10.1109/LARS.2013.59.
20. *Pshikhov V.Kh., Medvedev M.Yu., Gaiduk A.R., Gurenko B.V.* Control system design for autonomous underwater vehicle // Proceedings – 2013 IEEE Latin American Robotics Symposium, LARS 2013. – P. 77-82. Doi: 10.1109/LARS.2013.61.
21. *Пишихов В.Х., Медведев М.Ю., Гайдук А.Р., Нейдорф Р.А., Беляев В.Е., Федоренко Р.В., Костюков В.А., Крухмалев В.А.* Система позиционно-траекторного управления роботизированной воздухоплавательной платформой: алгоритмы управления // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2013. – № 7. – С. 13-20.
22. *Пишихов В.Х., Медведев М.Ю., Гайдук А.Р., Шевченко В.Е.* Энергосберегающее управление электропоездом в условиях неоднородности профиля пути // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 3 (140). – С. 162-168.
23. *Пишихов В.Х.* Дирижабли: перспективы использования в робототехнике // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – № 5. – С. 15-20.

REFERENCES

1. *Platonov A.K., Karpov I.I., Kiril'chenko A.A.* Metod potentsialov v zadache prokladki trassy. Preprint Instituta prikladnoy matematiki AN SSSR [Potentials method in the problem of routing. Preprint of Institute of applied mathematics, USSR Academy of Sciences]. Moscow, 1974, 27 p.
2. *Platonov A.K., Kiril'chenko A.A., Kolganov M.A.* Metod potentsialov v zadache vybora puti: istoriya i perspektivy [Potentials method in the problem of path selection: history and prospects]. Moscow: IPM im. M.V. Keldysha RAN, 2001.
3. *Khatib O.* Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots, *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, 1985, pp. 500-505.
4. *Khatib O.* Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots, *Int. Journal of Robotics Research*, 1986, Vol. 5, No. 1, pp. 90-98.
5. *Brooks R.A.* Self calibration of motion and stereo vision for mobile robots // *IEEE Int. Robotics and Automation*, 1986.
6. *Ichikawa Y., Fujie M., Ozaki N.* On mobility and autonomous properties of mobile robots, *Robot*, 1984, No. 44, pp. 31-36.
7. *Beloglazov D.A., Guzik V.F., Kosenko E.Yu., Krukhmalev V.A., Medvedev M.Yu., Pereverzev V.A., Pshikhov V.Kh., P'yavchenko A.O., Saprykin R.V., Solov'ev V.V., Finaev V.I., Chernukhin Yu.V., Shipovalov I.O.* Intellektual'noe planirovanie traektoriy podvizhnykh ob"ektov v sredakh s prepyatstviyami [Intelligent planning of the trajectories of moving objects in environments with obstacles], Ed. by V.Kh. Pshikhopova. Moscow: Fizmatlit, 2014, 300 p. ISBN 978-5-9221-1595-7.
8. *Pshikhov V.Kh.* Attraktory i repellery v konstruirovanii sistem upravleniya podvizhnymi ob"ektami [Attractors and repeller in the design of control systems rolling stock-sizes of object], *Izvestiya TRTU [Izvestiya TSURE]*, 2006, No. 3 (58), pp. 117-123.
9. *Pshikhov V.Kh.* Organizatsiya repellerov pri dvizhenii mobil'nykh robotov v srede s prepyatstviyami [The organization of repeller during the motion of mobile robots in environment with obstacles], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie [mechatronics, automation, control]*, 2008, No. 2, pp. 34-41.

10. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Krukhmalev V.A. Pozitsionno-traektnoe upravlenie podvizhnymi ob"ektami v trekhmernoy srede s tochechnymi prepyatstviyami [Position-trajectory control of vehicle in 3d with point obstacles], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 1 (162), pp. 238-250.
11. Yurevich E.I. *i dr.* Intellekturnye roboty [Intelligent robots]. Moscow: Mashinostroenie, 2007, 360 p.
12. Yurevich E.I. O probleme gruppovogo upravleniya robotami [The problem of group control of robots], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2004, No. 2, pp. 9-13.
13. Kalyaev I.A., Gayduk A.R., Kapustyan S.G. Modeli i algoritmy kollektivnogo upravleniya v gruppakh robotov [Models and algorithms of collective control in groups of robots]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 278 p.
14. Vasil'ev S.N. Ot klassicheskikh zadach regulirovaniya k intellektual'nomu upravleniyu. I, II [From classical regulation to intellectual property management. I, II], *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Journal of Computer and Systems Sciences International], 2001, No. 1, pp. 5-21; No. 2, pp. 5-22.
15. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu. Upravlenie podvizhnymi ob"ektami v opredelennykh i neopredelennykh sredakh [Management of mobile objects in certain and uncertain environments]. Moscow: Nauka, 2011, 350 p. ISBN 978-5-02-037509-3.
16. Kalyaev I.A., Gayduk A.R., Kapustyan S.G. Raspredelennye sistemy planirovaniya deystviy kollektivov robotov [Distributed systems planning teams of robots]. Moscow: Yanus-K, 2002, 292 p.
17. Ivchenko V.D., Korneev A.A. Analiz metodov raspredeleniya zadaniy v zadache upravleniya kollektivom robotov [The analysis methods of task distribution in the task of managing a group of robots], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2009, No. 7, pp. 36-42.
18. Shneyder V.E. *i dr.* Kratkiy kurs vysshey matematiki: Ucheb. posobie dlya vtuzov [A brief course of higher mathematics: textbook for technical colleges]. Moscow: Vyssh. shkola, 1972, 640 p.
19. Pshikhopov V.Kh., Krukhmalev V.A., Medvedev M.Yu., Fedorenko R.V., Kopylov S.A., Budko A.Yu., Chufistov V.M. Adaptive control system design for robotic aircrafts, *Proceedings – 2013 IEEE Latin American Robotics Symposium, LARS 2013*, pp. 67-70. Doi: 10.1109/LARS.2013.59.
20. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Gaiduk A.R., Gurenko B.V. Control system design for autonomous underwater vehicle, *Proceedings – 2013 IEEE Latin American Robotics Symposium, LARS 2013*, pp. 77-82. Doi: 10.1109/LARS.2013.61.
21. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Gayduk A.R., Neydorf R.A., Belyaev V.E., Fedorenko R.V., Kostyukov V.A., Krukhmalev V.A. Sistema pozitsionno-traektnogo upravleniya robotizirovannoy vozdukhoplavatel'noy platformoy: algoritmy upravleniya [The system of position-trajectory control of a robotic aircraft platform: control algorithms], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2013, No. 7, pp. 13-20.
22. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Gayduk A.R., Shevchenko V.E. Energoberegayushchee upravlenie elektropoezdom y usloviyakh neodnorodnosti profilya puti [Power saving control of an electric train in the conditions of heterogeneity of a track profile], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 3 (140), pp. 162-168.
23. Pshikhopov V.Kh. Dirizhabli: perspektivy ispol'zovaniya v robototekhnike [Airships: prospects of use in robotics], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2004, No. 5, pp. 15-20.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. С.Г. Капустян.

Пшихопов Вячеслав Хасанович – Южный федеральный университет; e-mail: pshichor@rambler.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел./факс: 88634371694; д.т.н.; профессор; проректор-директор Инженерно-Технологической академии Южного федерального университета в г. Таганроге.

Медведев Михаил Юрьевич – e-mail: medvmihal@sfned.ru; кафедра электротехники и мехатроники; зав. кафедрой; д.т.н.; профессор.

Pshikhov Vyacheslav Khasanovich – Southern Federal University; e-mail: pshichop@rambler.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone/fax: +78634371694; dr. of eng. sc.; professor; Vice-rector of Southern Federal University.

Medvedev Mikhaik Yur'evich – e-mail: medvmihal@sfedu.ru; the department of electrical engineering and mechatronics; head of department; dr. of eng. sc.; professor.