

УДК 681.51

**А.Р. Гайдук, К.В. Колоколова, А.Р. Нейдорф, Е.А. Плаксиенко****СИНТЕЗ СИСТЕМЫ АВТОНОМНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМ МНОГОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ НА ОСНОВЕ УФЖ\***

*Рассматривается задача синтеза систем автономного управления многомерными морскими подвижными объектами. Целью статьи является разработка метода аналитического синтеза систем автономного управления движениями нелинейных многомерных подвижных объектов с заданной скоростью по заданной траектории. При этом предполагается, что траектория движения определяется заданными координатами текущего положения объекта и целевой точки. Система должна оперативно решать задачи определения текущего курса, угловой скорости его изменения и обеспечивать соответствующее движение подвижного объекта. Сложность решения указанных задач обусловлена многомерностью и нелинейным характером математических моделей, а также ограничениями на величины управляющих воздействий рассматриваемых объектов управления. Для преодоления этих сложностей при решении поставленных задач используется представление нелинейной модели рассматриваемых подвижных объектов в управляемой форме Жордана уравнений многомерных объектов. К этой форме приводятся уравнения многих реальных многомерных объектов с дифференцируемыми нелинейностями. При выполнении установленных в работе условий разрешимости разработанный метод позволяет получить аналитическое решение задачи синтеза системы автоматического управления. При этом качество процессов управления обеспечивается путем назначения параметров алгоритмов управления по каждой управляемой переменной. Эти алгоритмы реализуются цифровым регулятором, построенным на основе специализированного микроконтроллера, связанного с измерительными датчиками и исполнительными устройствами. Свойства синтезированной системы автономного управления многомерным подвижным объектом исследуются путем численного моделирования на ПЭВМ. Разработанный метод аналитического синтеза применим и в тех случаях, когда желаемые траектории движения задаются другими способами.*

*Объект управления; нелинейность; многомерность; управляемая форма Жордана; траектория; метод аналитического синтеза; микроконтроллер.*

**A.R. Gaiduk, K.V. Kolokolova, A.R. Neydorf, E.A. Plaksienko****DESIGN OF AUTONOMOUS CONTROL SYSTEM OF NONLINEAR MULTIVARIABLE OBJECT ON THE BASE OF JCF**

*In article the design problem of autonomous control systems for multivariable marine mobile objects is considered. The purpose of the article is development of a method for analytical design of the systems for autonomous control of the nonlinear movements of the multivariate mobile objects with the desired speed on the desired trajectory. Thus it is supposed, that the trajectory of movement is determined by the given coordinates of the current position of object and a target point. The system should solve operatively tasks of definition of the current rate, angular speed its change and to provide corresponding movement of the mobile object. Complexity of the specified tasks decision is caused by multivariability and nonlinear character of the mathematical models and also restrictions on values of control action of the considered objects. For overcoming these complexities at the decision of tasks in view representation of nonlinear model of considered mobile objects the Jordan controlled form of the equations of the multivariate objects is used. The equations of many real multivariable objects with differentiated nonlinearity are resulted in this form. At performance of the established in work conditions of resolvability the developed method allows to receive the analytical decision of the design automatic control system problem. Quality of control processes is provided by assignment of the control algorithms parameters on each controlled variables. These algorithms it is realized by the digital controller constructed on the basis*

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 13-08-000249-а и Совета по грантам Президента РФ проект № НШ-1557.2012.10.

*of the specialized microcontroller, connected with measuring gauges and executive devices. Properties of the synthesized system of autonomous control of multivariable moving object are investigated by numerical simulation on a PC. The developed method of analytical design is applicable and when desirable trajectories of movement are given by other ways.*

*Controlled object; nonlinearity; multivariability; Jordan controlled form; trajectory; method of analytical design; microcontroller.*

**Введение.** Проблема автономного управления морскими подвижными объектами осложнена необходимостью разработки автоматических систем управления, которые обеспечивали бы выполнение тех или иных миссий в автономном режиме [1–4]. В простейшем случае требуется, чтобы система автономного управления обеспечивала движение объекта по заданной траектории с заданной скоростью [2, 4]. Эта проблема является достаточно сложной, так как движение подвижных, в том числе и морских объектов, описывается нелинейными уравнениями, т.е. рассматриваемые объекты являются нелинейными. Для решения указанной проблемы применялись различные подходы. В работах [5, 6] решение задачи синтеза эффективных управлений нелинейными объектами ищется на основе принципов самоорганизации. Достаточно часто применяются адаптивные стабилизирующие управления [7–9]. Оригинальный подход к решению задачи управления нелинейными объектами предложен в работе [10]. Как известно, классическое оптимальное по быстродействию управление является не эффективным в тех случаях, когда время работы системы значительно превышает длительность переходных процессов. Для преодоления этого недостатка вводится эпсилон-оптимальное по быстродействию управление, которое в переходном процессе незначительно отличается от обычного оптимального по быстродействию управления. Степень отличия определяется малой величиной эпсилон. В установившемся режиме это управление переходит в обычное стабилизирующее управление.

Для разработки искомого автономного управления используется уточненная математическая модель подвижного объекта, предложенная в [11], которая является существенно нелинейной. В соответствии с этими уравнениями этот объект является многомерным объектом управления с двумя управлениями и двумя управляемыми переменными. Поэтому система управления его движениями синтезируется как многомерная на основе уравнений, представленных в управляемой форме Жордана [12–17]. Это позволяет, с одной стороны, учесть нелинейность и многомерность модели, а с другой стороны, выбором параметров законов управления обеспечить желаемое качество процесса автономного выполнения подвижным объектом заданных миссий. При этом предполагается, что полученный нелинейный закон управления реализуется цифровым устройством управления.

**Математическая модель.** Уточненная математическая модель подвижного объекта (ПО) [3, 11] с учетом принятой системы координат (рис. 1,а), описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x}_g = V_x \cos \varphi + V_z \sin \varphi, \quad \dot{z}_g = V_z \cos \varphi - V_x \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_y, \quad J_y \dot{\omega}_y = -c_y \omega_y - l F_T \sin \alpha, \quad (2)$$

$$m_z \dot{V}_z = -c_z |V_z| V_z + F_T \sin \alpha, \quad m_x \dot{V}_x = -c_x |V_x| V_x + F_T \cos \alpha, \quad (3)$$

$$y_1 = V_x, \quad y_2 = \omega_y \quad \text{или} \quad y_2 = \varphi, \quad (4)$$

где  $\dot{x}_g, \dot{z}_g$  – скорости изменения координат центра тяжести ПО в неподвижной системе координат;  $V_x, V_z$  – проекции вектора скорости ПО на оси связанной с ним системы координат  $XZY$ ;  $\varphi$  – текущий курс, а  $\omega_y = \dot{\varphi}$  и  $J_y$  – угловая скорость и момент инерции ПО относительно вертикальной оси  $OY$ ;  $c_x, c_y, c_z$  –

гидродинамические коэффициенты сил и моментов сопротивления, приложенных к ПО;  $m_x$ ,  $m_z$  – суммарные массы ПО с учетом присоединенных масс относительно осей  $OX$  и  $OZ$ ;  $F_T$  – равнодействующая сил тяги (упоров), создаваемых двигателями ПО;  $\alpha$  – угол поворота подвижной рамы, на которой установлены двигатели ПО;  $l = 0,4$  – расстояние от точки приложения силы тяги до оси  $OY$ , м (рис. 1,б);  $y_1$ ,  $y_2$  – управляемые переменные подвижного объекта: продольная скорость, угловая скорость или курс.

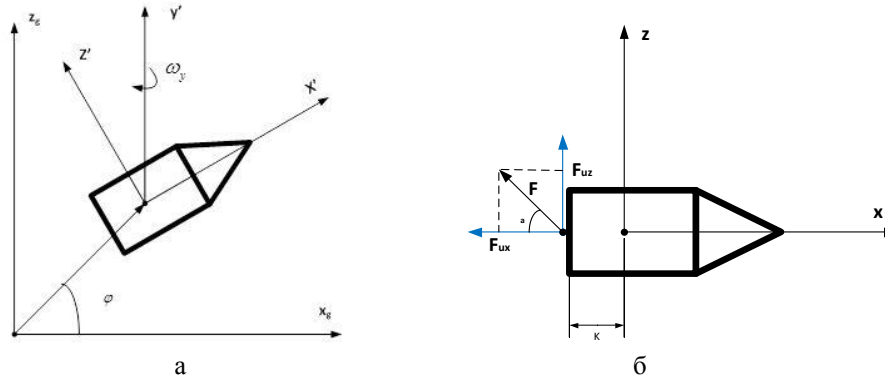


Рис. 1. Системы координат а) и управления подвижного объекта б)

В уравнениях (2)–(3) не учитываются аэродинамические силы и моменты, так как они значительно меньше гидродинамических, морская поверхность предполагается плоской, а килевая, боковая и вертикальная качки ПО отсутствуют [2, 3].

Подчеркнем, что уравнения (1) являются кинематическими, так как они связывают скорости ПО с его курсом. Для определения текущих координат  $x_g(t)$  и  $z_g(t)$  ПО и его курса  $\varphi(t)$ , достаточно проинтегрировать по времени  $\tau$  в пределах от  $\tau = 0$  до  $\tau = t$  уравнения (1) при заданных начальных условиях  $x_g(0)$ ,  $z_g(0)$ ,  $\varphi(0)$  и функциях  $V_x(\tau)$ ,  $V_z(\tau)$ ,  $\omega_y(t)$ , вытекающих из уравнений (2), (3) с учетом управляющих воздействий. Этими воздействиями в уравнениях (2), (3) являются упор  $F_T$  и угол  $\alpha$  [11].

Будем предполагать, что желаемая траектория движения задается направлением на целевую точку  $(x_{gc}, z_{gc})$  из текущего положения подвижного объекта  $(x_{gt}, z_{gt})$ . Этот угол при показанной на рис. 1,а системе координат определяется выражениями

$$\varphi^* = -\arctg \frac{z_{gc} - z_{gt}}{x_{gc} - x_{gt}}, \quad x_{gc} > x_{gt}, \quad (5)$$

$$\varphi^* = 90^\circ \operatorname{sign}(z_{gc} - z_{gt}), \quad x_{gc} = x_{gt}, \quad z_{gc} \neq z_{gt}, \quad (6)$$

$$\varphi^* = -180^\circ \operatorname{sign}(z_{gc} - z_{gt}) - \arctg \frac{z_{gc} - z_{gt}}{x_{gc} - x_{gt}}, \quad x_{gc} < x_{gt}. \quad (7)$$

Как видно, из выражений (5)–(7) с изменением места нахождения подвижного объекта в некоторых случаях направление на цель непрерывно изменяется. В частности, если текущая траектория движения объекта не направлена цель, то

направление на цель непрерывно изменяется. В этом случае желаемую угловую скорость  $\omega_y^*$ , при которой будет обеспечиваться приближение текущей траектории к направлению на цель, можно найти по формуле

$$\omega_y^* = \frac{d\varphi^*}{dt} = \frac{\partial\varphi^*}{dx_{gt}} \dot{x}_{gt} + \frac{\partial\varphi^*}{dz_{gt}} \dot{z}_{gt}. \quad (8)$$

Из выражения (5) следуют равенства

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_{gt}} = -\frac{z_{gc} - z_{gt}}{(x_{gc} - x_{gt})^2 + (z_{gc} - z_{gt})^2}, \quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial z_{gt}} = \frac{x_{gc} - x_{gt}}{(x_{gc} - x_{gt})^2 + (z_{gc} - z_{gt})^2}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (9) в равенство (8), получим

$$\omega_y^* = \frac{d\varphi^*}{dt} = -\frac{(x_{gc} - x_{gt})\dot{x}_{gt} - (z_{gc} - z_{gt})\dot{z}_{gt}}{(x_{gc} - x_{gt})^2 + (z_{gc} - z_{gt})^2}. \quad (10)$$

Здесь  $\dot{x}_{gt}$  и  $\dot{z}_{gt}$  определяются соотношениями (1) при  $V_x = V_x^*(t)$  и  $V_z = V_z^*(t)$  где  $V_x^*(t)$  и  $V_z^*(t)$  заданные функции времени.

Таким образом, для обеспечения движения катера с заданной продольной скоростью  $V_x^*(t)$  по заданной траектории необходимо обеспечивать соответствующее изменение курса  $\varphi^*(t)$  и угловой скорости  $\omega_y^*$  [2, 4, 11]. Конструкция рассматриваемого ПО имеет только два независимых управления:  $u_1 = F_T \cos \alpha$  и  $u_2 = F_T \sin \alpha$ . При этом управление  $u_1$  позволяет изменять продольную скорость  $V_x$ , а для управления остальными тремя величинами: курсом, угловой скоростью и боковым смещением имеется только одно управление  $u_2$ . Рассмотрим синтез системы управления продольной скоростью  $V_x^*(t)$ , угловой скоростью  $\omega_y = \omega_y(t)$  и боковым смещением  $z = z(t)$  ПО.

Как обычно, прежде всего, найдем уравнения ПО в отклонениях [13, 15]. С этой целью введем переменные состояния – отклонения:  $x_{11} = V_x - V_x^*$ ,  $x_{12} = \varphi - \varphi^*$ ,  $x_{22} = \omega_y - \omega_y^*$ ,  $x_{32} = V_z - V_z^*$ . Для определения уравнений движения в отклонениях, продифференцируем по времени введенные отклонения и учтем выражения (2)–(4). В результате получим:

$$\dot{x}_{11} = (-c_x |x_{11} + V_x^*| (x_{11} + V_x^*) + u_1 - m_x \dot{V}_x^*) / m_x, \quad y_1 = x_{11}, \quad (11)$$

$$\dot{x}_{12} = x_{22}, \quad (12)$$

$$\dot{x}_{22} = (-c_y (x_{22} + \omega_y^*) - k u_2 - J_y \dot{\omega}_y^*) / J_y, \quad (13)$$

$$\dot{x}_{32} = (-c_z |x_{32} + V_z^*| (x_{32} + V_z^*) + u_2 - m_z \dot{V}_z^*) / m_z, \quad y_2 = x_{22}. \quad (14)$$

Как видно, математическая модель рассматриваемого ПО состоит, как бы из двух нелинейных блоков, каждый из которых имеет «свое» управление. Структура данного ПО, очевидно, полностью соответствует структуре многомерных нелинейных объектов, модели которых представлены в управляемой форме Жордана (УФЖ), предложенной в [12–15]. Это позволяет провести аналитический синтез искомой автономной системы управления. При этом предполагается, что переменные  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\omega_y = \omega_y(t)$ ,  $V_z = V_z^*(t)$  и  $V_x = V_x^*(t)$  измеряются специальными

датчиками. Поскольку  $\varphi^*(t)$  и  $\omega_y^*(t)$  определяются выражениями (5)–(8) и (10) при заданных координатах цели, и функциях  $V_x^*(t)$ ,  $V_z^*(t)$ , то переменные состояния  $x_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$  в уравнениях (1), (11)–(14) можно считать измеряемыми и использовать при синтезе системы управления.

**Синтез системы управления подвижным объектом. Управление продольной скоростью.** Переходя к определению управления  $u_1 = F_T \cos \alpha$ , которое определяет характер изменения продольной составляющей скорости  $V_x$  подвижного объекта, отметим, что оно входит лишь в одно уравнение (11). Это позволяет найти управление  $u_1$  на основе метода аналитического синтеза нелинейных систем управления (АСНСУ) с применением УФЖ [16, 17]. Вводя новую переменную состояния  $w_1 = x_{11} = V_x - V_x^*$  и полагая  $\dot{w}_1 = -\lambda_1 w_1$ , получим следующее выражение:

$$u_1 = c_x |V_x| V_x + m_x (\dot{V}_x^* - \lambda_1 (V_x - V_x^*)). \quad (15)$$

Однако управление (15) не обеспечивает астатизма системы управления по скорости  $V_x$ , т.е. при этом управлении ошибка по скорости ПО в установившемся режиме не будет равной нулю даже при постоянной заданной скорости  $V_x^*$  [18–20]. Для исключения этого недостатка, введем в устройство управления интегратор, временно отнеся его уравнение к модели рассматриваемого канала. С этой целью положим  $u_1 = x_{21}$ , а  $\dot{x}_{21} = u_{1,vsp}$ , где  $u_{1,vsp}$  – вспомогательное управление.

В результате уравнения канала управления скоростью  $V_x$  принимают вид

$$\dot{x}_{11} = \left[ -c_x |x_{11} + V_x^*| (x_{11} + V_x^*) + x_{21} - m_x \dot{V}_x^* \right] / m_x = \phi_{11}(x_{11}, x_{21}), \quad \dot{x}_{21} = u_{1,vsp}. \quad (16)$$

Так как  $\partial \phi_{11}(x_{11}, x_{21}) / \partial x_{21} = m_x^{-1} \neq 0$ , то уравнения (16) имеют УФЖ при  $n = 2$  и  $\phi_2(x_{11}, x_{21}) = 0$  [17]. В данном случае  $n = 2$ , поэтому в соответствии с указанным выше методом введем две переменные  $w_1 = x_{11}$  и  $w_2 = \dot{w}_1 + \lambda_1 w_1$ . При этом

$$w_2 = \dot{w}_1 + \lambda_1 w_1 = -m_x^{-1} \left[ c_x |x_{11} + V_x^*| (x_{11} + V_x^*) - x_{21} + m_x \dot{V}_x^* \right] + \lambda_1 x_{11}$$

или

$$w_2 = \phi_{11}(x_{11}, x_{21}) + \lambda_1 x_{11}, \quad (17)$$

где

$$\phi_{11}(x_{11}, x_{21}) = -m_x^{-1} \left[ c_x |x_{11} + V_x^*| (x_{11} + V_x^*) - x_{21} + m_x \dot{V}_x^* \right]. \quad (18)$$

Согласно [18] для определения управления  $u_{1,vsp}$  необходимо найти производную по времени от переменной  $w_2$ , определяемой выражениями (20), (18) содержащие произведение  $|\zeta| \zeta$ . В связи с этим приведем в явной форме вывод формулы производной по  $\zeta$  от этого произведения

$$\frac{d|\zeta| \zeta}{d\zeta} = \begin{cases} d\zeta^2/d\zeta, & \zeta > 0 \\ -d\zeta^2/d\zeta, & \zeta < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\zeta, & \zeta > 0 \\ -2\zeta, & \zeta < 0 \end{cases} = 2|\zeta|. \quad (19)$$

В общем случае и  $V_x^* = V_x^*(t)$ , и  $\dot{V}_z^* = \dot{V}_z^*(t)$  – функции времени, поэтому, следуя [9, 19], управление  $u_{1,vsp}$  из (16) найдем из условия  $\dot{w}_2 = -\lambda_2 w_2$ . Дифференцируя по времени  $t$  функцию  $w_2$  (17) с учетом выражений (18), (19) и подставляя в уравнение  $\dot{w}_2 = -\lambda_2 w_2$ , получим

$$\dot{w}_2 = -m_x^{-1} \left[ 2c_x \left| x_{11} + V_x^* \right| (\phi_{11}(x_{11}, x_{21}) + \dot{V}_x^*) - u_{1,vsp} + m_x \ddot{V}_x^* \right] + \lambda_1 \phi_{11}(x_{11}, x_{21}) = -\lambda_2 w_2.$$

Отсюда с учетом равенства (17) выводим

$$u_{1,vsp} = 2c_x \left| x_{11} + V_x^* \right| (\phi_{11}(x_{11}, x_{21}) + \dot{V}_x^*) + m_x \ddot{V}_x^* - m_x [(\lambda_1 + \lambda_2) \phi_{11}(x_{11}, x_{21}) + \lambda_1 \lambda_2 x_{11}]. \quad (20)$$

Так как  $u_1 = x_{21}$ , а  $x_{11} = V_x - V_x^*$ , то из уравнений (16) и равенства (20), вытекают следующие уравнения астатического устройства управления скоростью  $V_x$  подвижного объекта:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{21} &= 2c_x \left| x_{11} + V_x^* \right| (\phi_{11}(x_{11}, x_{21}) + \dot{V}_x^*) - m_x [(\lambda_1 + \lambda_2) \phi_{11}(x_{11}, x_{21}) + \lambda_1 \lambda_2 x_{11} - \ddot{V}_x^*], \\ u_1 &= x_{21}. \end{aligned} \quad (21)$$

Полученные выражения (21) являются искомым управлением продольной скоростью автономного подвижного объекта. Положительные постоянные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в первом выражении (21) определяют длительность и характер переходного процесса по скорости подвижного объекта. При выборе этих значений необходимо учитывать ограничения по модулю управления  $u_1$ . Последнее связано с тем, что при увеличении значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  с целью уменьшения длительности переходного процесса по скорости  $V_x$ , как правило, увеличивается требуемое значение  $|u_1|$ .

**Управление угловой скоростью и боковым смещением.** Изменения угловой скорости  $\omega_y = \omega_y(t)$  и бокового смещения  $z = z(t)$  ПО описываются уравнениями (13) и (14). Здесь управление  $u_2$  входит в оба эти уравнения, поэтому их форма не является Жордановой [17, 18]. Чтобы преобразовать эти уравнения к Жордановой форме, проведем замену переменных, полагая:  $\mathcal{G}_1 = x_{22} + \eta x_{32}$ ,  $\mathcal{G}_2 = x_{32}$ , где  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  – новые переменные состояния, а  $\eta$  – постоянный параметр преобразования. Его значение выбирается таким образом, чтобы производная  $\dot{\mathcal{G}}_1$  не зависела от управления  $u_2$ . Легко установить, что при  $\eta = m_z k / J_y$  система уравнений (13), (14) в переменных  $\mathcal{G}_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  имеет вид:

$$\dot{\mathcal{G}}_1 = \bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2), \quad (22)$$

$$\dot{\mathcal{G}}_2 = \bar{\phi}_2(\mathcal{G}_2) + u, \quad (23)$$

где

$$\bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = -J_y^{-1} \left[ c_y (\mathcal{G}_1 - \eta \mathcal{G}_2 + \omega_y^*) + k c_z \left| \mathcal{G}_2 + V_z^* \right| (\mathcal{G}_2 + V_z^*) \right] - \dot{\omega}_y^* - \eta \dot{V}_z^*, \quad (24)$$

$$\bar{\phi}_2(\mathcal{G}_2) = -m_z^{-1} \left[ c_z \left| \mathcal{G}_2 + V_z^* \right| (\mathcal{G}_2 + V_z^*) + m_z \dot{V}_z^* \right], \quad u = u_2 / m_z, \quad (25)$$

Согласно [17, 18] для оценки управляемости объекта (22)–(25) необходимо найти производную по  $\mathcal{G}_2$  от функции  $\bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$  (24). Эта функция содержит произведение  $|\zeta|\zeta$ , поэтому, применив правило (19) к функции (24) и проведя некоторые преобразования с учетом равенства  $\mathcal{G}_2 = x_{32} = V_z - V_z^*$ , получим

$$\gamma_1(V_z) = \frac{\partial \bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)}{\partial \mathcal{G}_2} = \frac{kc_z}{J_y} \left( \frac{m_z c_y}{J_y c_z} - 2|V_z| \right) \quad (26)$$

Как видно величина  $\gamma_1(V_z)$  (28) обращается в нуль лишь при достаточно больших значениях  $V_z$ . Следовательно, одновременная управляемость угловой скорости и бокового сноса ПО сохраняется при условии

$$|V_z| < \frac{m_z c_y}{2J_y c_z}. \quad (27)$$

Далее будем полагать, что условие (30) выполняется. При этом условии уравнения (25)–(28) имеют УФЖ, что позволяет, как и выше, найти указанным выше методом АСНСУ управление  $u_2$ , которое будет обеспечивать желаемые изменения угловой скорости и бокового смещения подвижного объекта. При этом курс объекта  $\varphi(t)$  будет стремиться к желаемому значению  $\varphi^*(t)$ , которое определяется равенствами (5)–(7). Отметим, что при  $\dot{\omega}_y^* \neq const$  или  $V_z^* \neq const$  уравнения (22)–(25) являются нестационарными, поэтому расчет управления  $u_2$  производится аналогично расчету управления  $u_1$ , но без условия обеспечения астатизма первого порядка.

В соответствии с методом АСНСУ с применением УФЖ введем вспомогательные переменные с учетом уравнения (22) следующим образом:

$$\bar{w}_1 = \mathcal{G}_1, \quad \bar{w}_2 = \dot{w}_1 + \lambda_3 \bar{w}_1 = \dot{\mathcal{G}}_1 + \lambda_3 \mathcal{G}_1 = \bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) + \lambda_3 \mathcal{G}_1, \quad (28)$$

Дифференцируя по времени  $t$  функцию  $\bar{w}_2 = \bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) + \lambda_3 \mathcal{G}_1$ , с учетом выражений (22)–(25) и подставляя полученное выражение в уравнение  $\dot{w}_2 = -\lambda_2 w_2$ , найдем с учетом обозначений (26) и (28)

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 = & -J_y^{-1} \left[ c_y (\bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) + \dot{\omega}_y^*) + J_y \ddot{\omega}_y + k (2c_z |\mathcal{G}_2 + V_z^*| \dot{V}_z^* + m_z \ddot{V}_z^*) \right] + \\ & + \lambda_3 \bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) + \gamma_1 (\bar{\phi}_2(\mathcal{G}_2) + u) = -\lambda_4 (\bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) + \lambda_3 \mathcal{G}_1). \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  строго положительные числа. Отсюда с учетом равенства  $u = u_2 / m_z$  вытекает следующее выражение для управления

$$\begin{aligned} u_2 = & \frac{m_z}{\gamma_1} \left\{ J_y^{-1} \left[ c_y (\bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) + \dot{\omega}_y^*) + J_y \ddot{\omega}_y + k (2c_z |V_z| \dot{V}_z^* + m_z \ddot{V}_z^*) \right] - \right. \\ & \left. - (\lambda_3 + \lambda_4) \bar{\phi}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) - \lambda_3 \lambda_4 \mathcal{G}_1 \right\} - m_z \bar{\phi}_2(\mathcal{G}_2). \quad (29) \end{aligned}$$

Отметим, что в исходных переменных величины  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ , входящие в выражения (22), (23) и (29), описываются выражениями

$$\mathcal{G}_1 = \omega_y - \omega_y^* + km_z J_y^{-1}(V_z - V_z^*), \quad \mathcal{G}_2 = V_z - V_z^*. \quad (30)$$

Таким образом, при совместном управлении угловой скоростью и боковым смещением при условии (27) управляющее воздействие  $u_2$  определяется по формулам (29), (24)–(26) и (30). Приведенные соотношения (21) и (29), (30) позволяют найти управления  $u_1$  и  $u_2$ . Соответствующие значения реальных управляющих воздействий ПО – упора  $F_T$  и угла поворота рамы  $\alpha$  можно найти по следующим формулам:

$$F_T = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad \alpha = \arctg(u_2 / u_1), \quad u_1 > 0.$$

Отметим, что если  $u_1 \leq 0$ , то для определения угла  $\alpha$  применяются общие формулы, аналогичные соотношениям (8)–(10) [21]. Более детально реализация значений  $F_T$  и  $\alpha$  с учетом конструктивных ограничений рассмотрена в работе [11]. Однако, следует подчеркнуть, что указанные конструктивные ограничения на значения управляющих воздействий  $F_T$  и  $\alpha$  приводят к ограничению области устойчивости движений подвижного объекта. Аналитическое определение этой области затруднительно, поэтому в данной работе проводится её исследование методом компьютерного моделирования в MATLAB.

**Заключение.** Разработан метод аналитического синтеза систем автономного управления подвижными многомерными нелинейными объектами, отличающийся применением управляемой формы Жордана многомерных уравнений нелинейных объектов. Разработанный метод позволяет с одной стороны учесть нелинейный характер моделей, а с другой стороны, выбором параметров алгоритмов управления обеспечить желаемое качество процессов выполнения автономными подвижными объектами заданных миссий. Предполагается, что подвижные объекты оборудованы измерительными системами, способными определять их текущие координаты и скорости линейных и угловых перемещений. Нелинейные алгоритмы автономного управления реализуется цифровыми устройствами управления на основе специализированных микроконтроллеров.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лукомский Ю.А., Чугунов В.С. Системы управления морскими подвижными объектами. – Л.: Судостроение, 1988. – 272 с.
2. Справочник по теории корабля / Под ред. Я.И. Войткунского. – Л.: Судостроение, 1996.
3. Управление подвижными объектами. Библиографический указатель. В 3-х вып. Вып. 3. Морские объекты. – М.: ИПУ РАН, 2011.
4. Вагуценко Л.Л., Цымбал Н.Н. Системы автоматического управления движением судна. – 3-е изд., переработан. и дополн. – Одесса: Фенікс, 2007.
5. Бурдун И.Е. Модель самоорганизации движения К. Рейнольдса и вопросы «стайного» применения высокоманевренных высокоавтономных беспилотных ЛА // Материалы XVI Школы-семинара ЦАГИ «Аэродинамика летательных аппаратов», 3-4 марта 2005. – Жуковский: ЦАГИ, 2005. – С. 28-29.
6. Нейдорф Р.А. Динамическая самоорганизация в дискретно-непрерывных системах управления технологическими процессами. Синергетика. Самоорганизующиеся процессы в системах и технологиях // Материалы Международной научной конференции, 21-26 сентября. Ч. 1. – Комсомольск-на-Амуре, 1998. – С. 37-46.
7. Marino R., Tomei P. Adaptive regulation of uncertain linear minimum phase systems with unknown exosystems // Proc. IEEE 45<sup>th</sup> Conf. Decision Control. – San Diego. 2006. – P. 1099-1104.
8. Fradkov A.L., Hill D.J. Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems // Automatica. – 1998. – No. 6. – P. 6977-703.
9. Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А. Астатическое управление нелинейными объектами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 3 (128). – С. 151-160.



10. *Нейдорф Р.А.* Каскадный синтез динамического эталона эpsilon-оптимальной по быстрдействию системы // Материалы 5 Всероссийской научно-практической Конференции «Перспективные системы и задачи управления». – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – Т. 1. – С. 151-158.
11. *Пилюхов В.Х., Гуренко Б.В.* Разработка и исследование математической модели автономного надводного мини-корабля «Нептун» // Инженерный вестник Дона. – 2013. – № 4. – С. 23-28. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1918>.
12. *Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.* Синтез автономных и связанных многомерных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2012. – № 1. – С. 13-20.
13. *Wonham W.M.* Linear multivariable systems: a geometric approach. – 2<sup>nd</sup> ed. Springer-Verlag, New York, 1978.
14. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: полиномиальный метод синтеза // Научный вестник НГУ. – 2009. – № 4 (58). – С. 121-124.
15. *Gaiduk A.R., Plaksienko E.A., Besklubova K.V.* Multivariable dynamic system control under condition of autonomy and coherence. Dynamical systems. Theory. Proc.12-th Conference on Dynamical systems – theory and application. December 2-5, 2013, Łódź, Poland. – P. 195-204.
16. *Khalil N.K.* Robust servomechanism output feedback controllers for linearizable systems // Automatica. – 1994. – Vol. 30, No 10. – С. 57-69.
17. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012.
18. *Гайдук А.Р., Пилюхов В.Х., Медведев М.Ю., Плаксиенко Е.А., Шаповалов И.О.* Управляемая форма Жордана и синтез нелинейных систем управления // XII ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г.: Труды. [Эл. ресурс]. – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 521-531.
19. *Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.* Синтез нелинейных оптимальных систем на основе управляемой формы Жордана. Системный анализ, управление и обработка информации // Труды 5-го Международного семинара (п. Дивноморское, 1.10 – 6.10.2014 г.) / Под общ. ред. Р.А. Нейдорфа. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2014. – С. 209-215.
20. *Gaiduk A.R.* Astatic Control Design for Nonlinear Plants on Base of JCF // Trans-action on Electrical and Electronic Circuits and Systems. – 2013. – Vol. 3, No 2. – P. 80-84.
21. *Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А.* Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB. – СПб.: ЛАНЬ, 2011. – 464 с.

## REFERENCES

1. *Lukomskiy Yu.A., Chugunov V.S.* Sistemy upravleniya morskimi podvizhnymi ob"ektami [Control systems of sea mobile objects]. Leningrad: Sudostroenie, 1988, 272 p.
2. *Spravochnik po teorii korablya* [Handbook of ship theory], Under ed. Ya.I. Voytkunskogo. Leningrad: Sudostroenie, 1996.
3. *Upravlenie podvizhnymi ob"ektami. Bibliograficheskiy ukazatel'* [Management of mobile objects. Bibliography]. V 3-kh issue. Issue 3. Morskie ob"ekty [Marine objects]. Moscow: IPU RAN, 2011.
4. *Vagushchenko L.L., Tsymbal N.N.* Sistemy avtomaticheskogo upravleniya dvizheniem sudna [System of automatic control of ship motion]. 3<sup>rd</sup> izd., pererabotan. i dopoln. Odessa: Feniks, 2007.
5. *Burdun I.E.* Model' samoorganizatsii dvizheniya K. Reynol'dsa i voprosy «staynogo» primeneniya vysokomanevrennykh vysokoavtonomnykh bespilotnykh LA [The model of self-organization movement K. Reynolds and questions "schooling" the use of highly maneuverable vysokooktanovykh unmanned LA], *Materialy XVI Shkoly-seminara TsAGI «Aerodinamika letatel'nykh apparatov», 3-4 marta 2005* [Proceedings of the sixteenth workshop TSAGI "Aerodynamics of aircraft", 3-4 March 2005]. Zhukovskiy: TsAGI, 2005, pp. 28-29.
6. *Neydorf R.A.* Dinamicheskaya samoorganizatsiya v diskretno-nepreryvnykh sistemakh upravleniya tekhnologicheskimi protsessami. Sinergetika. Samoorganizuyushchiesya protsessy v sistemakh i tekhnologiyakh [Dynamic self-organization of discrete-continuous systems of control of technological processes. Synergy. Self-organizing processes in systems and technologies], *Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii, 21-26 sentyabrya* [Proceedings of the International scientific conference, 21-26 September]. Part 1. Komsomol'sk-na-Amure, 1998, pp. 37-46.
7. *Marino R., Tomei P.* Adaptive regulation of uncertain linear minimum phase systems with unknown exosystems, *Proc. IEEE 45<sup>th</sup> Conf. Decision Control*. San Diego, 2006, pp. 1099-1104.

8. *Fradkov A.L., Hill D.J.* Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems, *Automatica*, 1998, No. 6, pp. 6977-703.
9. *Gayduk A.R., Plaksienko E.A.* Astaticheskoe upravlenie nelineynymi ob"ektami [A static control of nonlinear plants], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, No. 3 (128), pp. 151-160.
10. *Neydorf R.A.* Kaskadnyy sintez dinamicheskogo etalona epsilon-optimal'noy po bystrodeystviyu sistemy [Cascade synthesis of dynamic standard of Epsilon-optimal system], *Materialy 5 Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Perspektivnye sistemy i zadachi upravleniya»* [Materials of the 5th all-Russian scientific-practical Conference "Perspective systems and control problems"]. Taganrog: Izd-vo TTI YuFU, 2010, Vol. 1, pp. 151-158.
11. *Pshikhov V.Kh., Gurenko B.V.* Razrabotka i issledovanie matematicheskoy modeli avtonomnogo nadvodnogo mini-korablya «Neptun» [Development and research of mathematical models of Autonomous surface mini-ship "Neptune"], *Inzhenernyy vestnik Dona* [Engineering journal of Don], 2013, No. 4, pp. 23-28. Available at: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/1918>.
12. *Gayduk A.R., Plaksienko E.A.* Sintez avtonomnykh i svyaznykh mnogomernykh sistem upravleniya [Synthesis of Autonomous and coherent multidimensional control systems], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2012, No. 1, pp. 13-20.
13. *Wonham W.M.* Linear multivariable systems: a geometric approach. 2<sup>nd</sup> ed. Springer-Verlag, New York, 1978.
14. *Voevoda A.A.* Stabilizatsiya dvukhmassovoy sistemy: polinomial'nyy metod sinteza [Stabilization of two-mass system: a polynomial method for the synthesis of], *Nauchnyy vestnik NGU* [Scientific Bulletin of National Mining University], 2009, No. 4 (58), pp. 121-124.
15. *Gaiduk A.R., Plaksienko E.A., Besklubova K.V.* Multivariable dynamic system control under condition of autonomy and coherence. Dynamical systems. Theory. Proc.12-th Conference on Dynamical systems – theory and application. December 2-5, 2013, Łódź, Poland, pp. 195-204.
16. *Khalil N.K.* Robust servomechanism output feedback controllers for linearizable systems, *Automatica*, 1994, Vol. 30, No. 10, pp. 57-69.
17. *Gayduk A.R.* Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyy podkhod) [Theory and analytical methods of synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow: Fizmatlit, 2012.
18. *Gayduk A.R., Pshikhov V.Kh., Medvedev M.Yu., Plaksienko E.A., Shapovalov I.O.* Upravlyaemaya forma Zhordana i sintez nelineynykh sistem upravleniya [Controllable Jordan form and synthesis of nonlinear control systems], XII VSPU-2014. Moskva, 16-19 iyunya 2014 g.: Trudy. [El. resurs] [XII The EVERYTHING-2014. Moscow, June 16-19, 2014: Proceedings. [El. resource]. Moscow: IPU RAN, 2014, pp. 521-531.
19. *Gayduk A.R., Plaksienko E.A.* Sintez nelineynykh optimal'nykh sistem na osnove upravlyaemoy formy Zhordana. Sistemnyy analiz, upravlenie i obrabotka informatsii [Synthesis of nonlinear optimal systems based on the controllable Jordan form. System analysis, management and processing of information], *Trudy 5-go Mezhdunarodnogo seminara (p. Divnomorskoe, 1.10 – 6.10.2014 g.)* [Proceedings of the 5th International workshop (p. Divnomorskoe, 1.10 – 6.10.2014)], Under ed. R.A. Neydorfa. Rostov-on-Don: DGTU, 2014, pp. 209-215.
20. *Gaiduk A.R.* Astatic Control Design for Nonlinear Plants on Base of JCF, *Transaction on Electrical and Electronic Circuits and Systems*, 2013, Vol. 3, No. 2. pp. 80-84.
21. *Gayduk A.R., Belyaev V.E., Pyavchenko T.A.* Teoriya avtomaticheskogo upravleniya v primerakh i zadachakh s resheniyami v MATLAB [Automatic control theory in examples and problems with solutions in MATLAB]. St. Petersburg: LAN", 2011, 464 p.

Статью рекомендовала к опубликованию д.т.н., профессор М.А. Бутакова.

**Гайдук Анатолий Романович** – Южный федеральный университет; e-mail: [gaiduk\\_2003@mail.ru](mailto:gaiduk_2003@mail.ru); 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634361789; кафедра систем автоматического управления; д.т.н.; профессор.

**Колоколова Ксения Валериевна** – e-mail: [besklubova@rambler.ru](mailto:besklubova@rambler.ru); кафедра систем автоматического управления; ассистент.

**Плаксиенко Елена Анатольевна** – Таганрогский институт управления и экономики; e-mail: pumkad@mail.ru; 347900, г. Таганрог, ул. Петровская 45; тел.: 88634362583; кафедра математики и информатики; к.т.н.; доцент.

**Нейдорф Анна Рудольфовна** – Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донской государственный технический университет»; e-mail: neydan@yandex.ru; 344000, г. Ростов-на-Дону, ул. Катаева, 415; тел.: 88632738427; кафедра технических средств аквакультуры; к.ф.н.; доцент.

**Gaiduk Anatoly Romanovich** – Southern Federal University; e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634361789; the department of automatic control systems; dr. of eng. sc.; professor.

**Kolokolova Ksenia Valerievna** – e-mail: besklubova@rambler.ru; the department of automatic control systems; assistant.

**Plaksienko Elena Anatolievna** – Educational Establishment of Higher Education «Taganrog Management and Economy Institute»; e-mail: pumkad@mail.ru; 45, Petrovskaya street, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634362583; the department of mathematic and informatics; cand. of eng. sc.; assistant professor.

**Neydorf Anna Rudolyfovna** – Federal State-Owned Educational Establishment of Higher Vocational Education «Donskoy State Technical University»; e-mail: neydan@yandex.ru; 415, Kataeva street, Rostov-on-Don, 344000, Russia; phone: +78632738427; the department of technical means of aquaculture; cand. of philosophic sc.; associate professor.