REFERENCES

1. *Melikhova O.A., Melikhova Z.A.* Diskretnaya matematika: Ucheb. Posobie [Discrete mathematics: textbook]. Taganrog: Izd-vo TRTU, 2006, 172 p.
2. *Melikhova O.A.* Metody postroeniya intellektualnykh sistem na osnove nechetkoy logiki: Nauchnoe izdanie [Methods for constructing intelligent systems based on fuzzy logic: a Scientific edition]. Taganrog: Izd-vo TRTU, 2007, 92 p.
3. *Melikhova O.A., Melikhova Z.A.* Ispolzovanie apparata nechetkoy matematiki pri modelirovanii sistem podderzhki prinyatiya resheniy [The use of fuzzy mathematics for modeling systems of support of decision making], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, No, 7 (132), pp. 113-118.
4. *Kureychik V.M.* Osobennosti postroeniya sistem podderzhki prinyatiya resheniy [Features of construction of systems of support of decision making], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, No. 7 (132), pp. 92-98.
5. *Gastev Yu.A.* Gomomorfizmy i modeli [Homomorphisms and model]. Moscow: Nauka, 1975, 150 p.
6. *Kureychik V.M.* Algoritmy odnomernoy upakovki elementov [Algorithms of one-dimensional packing items], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 7 (144), pp. 8-11.
7. *Kazharov A.A., Kureychik V.M.* Ispolzovanie shablonnykh resheniy v muravinykh algoritmakh [The use of standard solutions in ant algorithms], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 7 (144), pp. 17-22.
8. *Zade L.A.* Razmytye mnozhestva i ikh primenenie v raspoznavanii obrazov i klaster-analize [Fuzzy sets and their applications in image recognition and cluster analysis]. *V sb.: Klassifikatsiya i klaster* [In the collection: Classification and clustering]. Moscow: Mir, 1980, pp. 21-32

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Мелихова Оксана Аскольдовна – Южный федеральный университет; e-mail: ao@tsure.ru; 347928, г. Таганрог, ул. Энгельса, 1; тел.: 88634371651; кафедра систем автоматизированного проектирования; доцент.

Melikhova Oksana Askoldovna – Southern Federal University; e-mail: ao@tsure.ru; 1, Engelse street Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371651; the department of computer aided design; associate professor.

УДК 621.376.57

П.П. Кравченко, Л.В. Пирская

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ИСКЛЮЧАЮЩИЙ ОПЕРАЦИЮ МНОГОРАЗРЯДНОГО УМНОЖЕНИЯ

Рассматривается итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений, исключающий операцию многоразрядного умножения при проектировании специализированных вычислительных средств. Разработан метод организации итерационного процесса для решения систем алгебраических уравнений с использованием дельта-преобразований первого порядка с переменным квантом. Метод базируется наоптимальных теоретических оценках, характеризующих длительность идеализированных итерационных циклов и вес изменяемых квантов отработки начального максимального значения невязки. Для реализации реальных итерационных процессов разработаны квазиоптимальные условия, определяющие две или четыре итерации в каждом цикле. Кроме того, значения квантов должны быть представлены в виде $2^{-s}, s \in N$ *, что позволяет на каждой итерации представить умножение коэффициента матрицы на квант в виде операции сдвига на S двоичных разрядов. Введение данного способа представления кванта позволяет реализовать выполне-*

ние итерационного процесса без использования операции многоразрядного умножения. Приводятся результаты экспериментальных исследований для различных по скорости сходимости систем линейных алгебраических уравнений. Показана возможность сокращения количества итераций по сравнению с использованием дельта преобразований с постоянным квантом в сотни – тысячи раз при обеспечении одинаковой точности, а также существенным приближением по количеству итераций к методу простой итерации.

Итерационные методы; системы линейных алгебраических уравнений; дельта-преобразования первого порядка; специализированные вычислители.

P.P. Kravchenko, L.V.Pirskaya

THE ITERATIVE METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS, EXCLUSIVE THE MULTI-BIT MULTIPLICATION OPERATION

In work it is considered the iterative method for solving systems of linear algebraic equations, exclusive the multi-bit multiplication operation in the design of embedded systems. It is developed a method of organizing an iterative process for solving systems of algebraic equations with using the first order delta-transformations with variable quantum. The method is based on the optimal theoretical estimates characterizing the idealized iterative cycles duration and quanta variable weight of initial maximum value of the misalignment. It is developed quasioptimal conditions defining two or four iterations in each cycle for realization real iterative working processes. Moreover, quanta values should be presented in a form of $2^{-s}, s \in N$ that allow expressing the multiplication of coefficient matrix on a quantum in a form of shift operation on S bitsat each iteration. This quantum representation allows realizing the execution of iterative process without the use of multi-bit multiplication operation. The paper presents experimental results for the various systems of linear algebraic equations with the different rate of convergence. It is showed the possibility of reducing the number of iterations compared with the delta transformation with a fixed quantum in thousands of times with the same accuracy. And it is largely approximate to the number of iteration for the simple iteration method.

Iterative methods; systems of linear algebraic equations; delta transformation of the first order; specialized computing devices.

Введение. Создание высокопроизводительных вычислительных систем, функционирующих в реальном времени, связывается, в частности, с использованием проблемно-ориентированных специализированных средств на основе ПЛИС, БИС, контроллеров, микропроцессоров [1]. В решении задачи эффективного проектирования специализированных вычислителей большое значение имеют особенности алгоритмического обеспечения, позволяющие достигать, по возможности, наиболее высоких качественных показателей производительности при минимизированных затратах ресурсов (оборудования).

В качестве отдельных компонент задач, решаемых в рамках специализированных вычислительных средств, часто выступают задачи вычислительной математики, в частности, представляемые в виде систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При использовании итерационных методов решения этих систем имеет место необходимость использования большого количества устройств умножения, реализация которых требует значительных аппаратных ресурсов и затрат машинного времени при работе с полноразрядными кодами переменных и коэффициентов.

В связи с отмеченным выше представляет интерес создание таких алгоритмических преобразований итерационных процессов решения СЛАУ, которые ориентированы на повышение качественных характеристик соответствующих вычислительных структур.

Известны итерационные методы решения СЛАУ, исключающие операцию умножения, базирующиеся на основе дельта-преобразований первого порядка [2–9].

Сущность методов решения СЛАУ на основе дельта-преобразований первого порядка заключается в представлении решаемой задачи в виде системы разностных уравнений первого порядка; формирование переменных осуществляется на основе постоянных по модулю и отличающихся по знаку значений первых разностей (квантов преобразования), а операция умножения заменяется на операцию, основной компонентой которой является умножение на ±1 [2–9].

Недостатком метода, освещенного в работах[5,8] и базирующегося на постоянном кванте является большое количество итераций по сравнению с использованием классических методов решения [10–12]. Методы, использующие переменный квант и рассмотренные в работах [3, 4], имеют эвристический переборный характер.

В работе [2] рассмотрен метод алгоритмической организации итерационного процесса решения СЛАУ с использованием дельта-преобразований первого порядка, позволяющий исключать операции умножения многоразрядных кодов, и нацеленный на сокращение количества итераций путем оперирования с изменяющимся по определенному закону квантом преобразования [2]. В качестве недостатков этого метода следует отметить следующие:

- приведенная в работе оценка количества итераций на интервалах постоянства кванта преобразования включает использование нормы матрицы коэффициентов и относится к оценкам при "наихудших воздействиях"; однако, вероятность проявления наихудших воздействий, как правило, оказывается малой, а рекомендуемая в данной работе оценка существенно завышенной по отношению к практическим результатам;
- упомянутая оценка применима только в случае, если норма матрицы коэффициентов оказывается меньше единицы; в то же время итерационные процессы при определенных условиях могут успешно реализовываться и при норме больше единицы, и в данном случае приведенная оценка не может быть использована для организации вычислительного процесса;
- процессу решения СЛАУ должен предшествовать расчет количества итераций в циклах с использованием, в частности, операции деления, что в условиях выполнения этих вычислений с помощью специализированного вычислительного устройства мало целесообразно.

В настоящей работе предлагается существенно упрощенный по сравнению с упомянутым выше, алгоритм организации итерационного процесса решения СЛАУ с переменным квантом, базирующийся на оптимальных при определенных условиях оценках и обеспечивающий оптимизацию длительности реальных итерационных процессов.

1. Постановка задачи. Пусть исходная СЛАУ, содержащая матрицу постоянных коэффициентов с постоянными свободными членами, имеет вид:

$$BY^*(t) = G. \qquad (1)$$

Преобразуем систему:

$$Y^*(t) = AY^*(t) + D.$$

Переходим к форме записи с использованием итерационного метода и введением невязки $z(t)$:

$$z(t) = Y(t) - AY(t) - D. \qquad (2)$$

В приведенных системах $B = [b_{rj}]$, $A = [a_{rj}]$ – матрицы коэффициентов размерности $n \times n$; G, $Y^*(t)$ – вектор-столбцы, соответственно, правых частей и неизвестных системы; $z(t)$, $Y(t)$ – вектор-столбцы невязок и приближенных значений неизвестных; t – независимая переменная; $det\, A \neq 0$.

Алгоритм приближенного решения системы (1) и дельта-преобразования первого порядка с учетом введения переменного кванта представим в следующей разностной форме для i-го шага при начальных условиях $Y_{r01}=0,\ z_{r01}=D_r$, $r=\overline{1,n}$,[13]:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{– формирование значений переключающих функций и}\\
\text{знаков квантов первых разностей переменных:}\\
\varDelta_{ril}=-sign(z_{r(i-1)l});\ \varDelta_{ril}\in\{+1,-1\};\ r=\overline{1,n},\ i=1,2,\ldots,R_l;\ l=1,2,\ldots,P;\\
\text{Демодуляция:}\\
\nabla Y_{ril}=c_l^{*}\varDelta_{ril};\ Y_{ril}=Y_{r(i-1)l}+\nabla Y_{ril};\\
\text{– формирование первой разности преобразуемой переменной:}\\
\nabla y_{ril}=\sum_{j=1}^{n}a_{rj}c_l^{*}\varDelta_{j(i-1)l};\\
\text{– формирование значений невязок:}\\
\nabla z_{ril}=\nabla Y_{ril}-\nabla y_{ril};\\
z_{ril}=z_{r(i-1)l}+\nabla z_{ril}.
\end{array}\right\}\qquad(3)$$

В приведенном алгоритме (3) c_l – вес модуля кванта преобразования на l-м цикле ($c_l>0$), P – количество итерационных циклов, выполняемых при постоянных по модулю значениях квантов, R_l – количество итераций в цикле. Кроме того, для стыков участков соседних циклов справедливы соотношения: $Y_{r0l}=Y_{rR(l-1)}$; $z_{r0l}=z_{rR(l-1)}$.

Требуется найти условия оптимизированного выбора количества циклов и значений переменных квантов, позволяющие оптимизировать по количеству итераций характеризующийся сходимостью процесс решения СЛАУ.

2. Формирование исходных положений в решении задачи оптимизации. Из рассмотрения алгоритма (3) можно записать:

$$z_{ril}=z_{r(i-1)l}-c_l^{*}sign(z_{r(i-1)l})-\nabla y_{ril}.$$

Предположим, что $\nabla y_{ril}=0$. При выполнении этого условия на i-ом шаге r-го уравнения модуль $z_{r(i-1)l}$ будет уменьшаться, т.е. становится $|z_{ril}|<|z_{r(i-1)l}|$ на величину c_l^{*}. Невязка $z_{r(i-1)l}$, $i=1,2,\ldots,R_l$ уменьшается, причем её уменьшающееся значение с ростом i обязательно проходит через нуль, меняя знак. При этом количество шагов (итераций) в данных условиях до вхождения в нуль для $l=1$ будет составлять

$$R_1=\frac{|z_{r01}|}{c_1}.$$

После прохождения через нуль максимальное значение невязки в данных условиях

$$z_{rR1}=z_{r02},\ |z_{r02}|\le c_1,$$

причем $sign(z_{r02})=-sign(z_{r01})$. Соответственно для l-го, $l=1,2,\ldots,P$ значения R_l можно записать:

$$R_l=\frac{|z_{r0l}|}{c_l}.\qquad(4)$$

В качестве условия завершения переходного процесса в цикле теперь принимаем

$$\left|z_{rRl}\right| \le c_l\,,\ l = 1,2,\ldots,P\,,\ r = \overline{1,n}\,. \qquad (5)$$

На основе изложенного выше можно сформулировать следующие заключения:

1. При условии $\nabla y_{ril} = 0$ значение невязки в конце сходящего итерационного процесса меняет знак.

2. Количество итераций в цикле можно оценивать с использованием выражения (4).

При выполнении реального сходящегося итерационного процесса вероятность значения $\nabla y_{ril} = 0$ мала и необходимо учитывать соотношение $\nabla y_{ril} \ne 0$. Если $sign(\nabla y_{ril}) = sign(z_{r(i-1)l})$, т. е.

$$z_{ril} = z_{r(i-1)l} - c_l^* sign(z_{r(i-1)l}) - \left|\nabla y_{ril}\right| sign(z_{r(i-1)l})$$

и

$$z_{ril} = z_{r(i-1)l} - (\, c_l^* + \left|\nabla y_{ril}\right|) sign(z_{r(i-1)l})\,,$$

то скорость уменьшения невязки увеличивается (уменьшается количество итераций в цикле), благодаря соответствующему уменьшению невязки на каждом шаге на величину, превышающую квант $(c_l^* + \left|\nabla y_{ril}\right|)$.

Если $sign(\nabla y_{ril}) = -sign(z_{r(i-1)l})$, т. е.

$$z_{ril} = z_{r(i-1)l} - c_l^* sign(z_{r(i-1)l}) + \left|\nabla y_{ril}\right| sign(z_{r(i-1)l})$$

и

$$z_{ril} = z_{r(i-1)l} - (\, c_l^* - \left|\nabla y_{ril}\right|) sign(z_{r(i-1)l})\,,$$

то скорость уменьшения невязки уменьшается (увеличивается количество итераций в цикле) благодаря соответствующему уменьшению невязки на каждом шаге на величину меньшую, чем квант $(c_l^* - \left|\nabla y_{ril}\right|)$, причем, условием уменьшения невязки является $c_l^* > \left|\nabla y_{ril}\right|$.

В связи с этим можно сделать следующие заключения:

1. Количество итераций в цикле при $\nabla y_{ril} \ne 0$ может быть больше или меньше величины (4).

2. При реализации сходящегося вычислительного процесса значение невязки в конце цикла меняет знак, т.е.

$$sign(z_{rRl}) = -sign(z_{r(R-1)l})\,,\ l = 1,2,\ldots,P\,,\ r = \overline{1,n}\,. \qquad (6)$$

Обобщая изложенное выше, для проведения теоретического обоснования условий организации эффективного итерационного вычислительного процесса с изменяющимся квантом дельта-преобразования первого порядка принимаем:

1. В качестве основного расчетного соотношения количества итераций в цикле принимаем (4).

2. В рамках формирования момента завершения итерационного процесса в l-м цикле принимаем условие (6), соответствующее моменту (номеру шага), к которому по всем уравнениям СЛАУ сформированы в этом цикле признаки изменения знака невязки, то есть завершения итерационного процесса.

3. Оптимальные оценки, обеспечивающие минимальную длительность итерационных процессов при $\nabla y_{ril} = 0$. Будем искать оценку теоретического минимального количества итераций (количество шагов дельта-преобразования начальных невязок при $\nabla y_{ril} = 0$). Вычислительный процесс будем строить таким образом, чтобы реальное количество итераций для заданной матрицы *A*, оказывалось по возможности наиболее близко к расчетному теоретическому минимуму.

Количество итераций (длительность переходного процесса) M решения СЛАУ представим в виде:

$$M = \sum_{l=1}^{P} R_l \ , l = 1,2,\ldots,P \qquad (7)$$

и

$$M = \sum_{l=1}^{P} \frac{|z_{0l}|_{max}}{c_l}, \qquad (8)$$

где $|z_{0l}|_{max} = max\ |z_{r0l}|,\ r = \overline{1,n}$.

Учитывая (5), для значения невязки запишем предельное соотношение:

$$|z_{0l}|_{max} = c_{l-1},\ l = 1,2,\ldots,P.$$

Выражение (8) принимает вид:

$$M = \frac{|z_{01}|_{max}}{c_1} + \frac{c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_3} + \ldots + \frac{c_{P-1}}{c_P}. \qquad (9)$$

Принимаем для всех циклов:

$$R_l = R,\ l = 1,2,\ldots,P, \qquad (10)$$

(обоснованность данного положения имеет строгое выходящее за рамки данной статьи доказательство).

Начальные значения невязки $|z_{01}|_{max}$ и веса минимального кванта c_P, связанного с необходимой точностью вычислений, задаются в качестве начальных условий. Учитывая условие (9), (10) получаем:

$$R = \sqrt[P]{\frac{|z_{01}|_{max}}{c_P}}. \qquad (11)$$

В соответствии с выражением (11) оценка длительности переходного процесса (7) принимает вид:

$$M = P \cdot \sqrt[P]{\frac{|z_{01}|_{max}}{c_P}}. \qquad (12)$$

Будем искать условия обеспечения минимального значения M. Дифференцируем выражение (12), приравниваем к нулю и находим:

$$P = ln\frac{|z_{01}|_{max}}{c_P}. \qquad (13)$$

В итоге, оценка длительности переходного процесса M решения СЛАУ принимает вид:

$$M = ln\frac{|z_{01}|_{max}}{c_P} \cdot \left(\frac{|z_{01}|_{max}}{c_P}\right)^{\frac{1}{ln\frac{|z_{01}|_{max}}{c_P}}}. \qquad (14)$$

Используя определение натурального логарифма, выражение (13) запишем:

$$e^P = \frac{|z_{01}|_{max}}{c_P}. \qquad (15)$$

В то же время выражение (11) можно записать в виде:

$$R^P = \frac{|z_{01}|_{max}}{c_P}. \qquad (16)$$

Из равенства правых частей (15), (16) следует равенство левых частей: $e^P = R^P$, откуда для оптимального значения R получаем:

$$R = e = 2,718281828 .$$

Таким образом, при $\nabla y_{ril} = 0$ оптимальное количество итераций не зависит от начального значения невязки $|z_{01}|_{max}$ и веса минимального кванта c_P, а является константой, равной числу Эйлера.

4. Приведение оптимальных оценок к квазиоптимальным для реализации реального вычислительного процесса. Сущность реализации итерационного процесса решения СЛАУ без использования операции умножения многоразрядных кодов состоит в том, что значения постоянных величин c_l, $l = 1,2,\ldots,P$ должно представляться в виде 2^{-s}, $s \in N$, а P и R- в виде целочисленных значений P_{int} и R_{int} соответственно. При этом в алгоритме (3) на каждой итерации операция многоразрядного умножения коэффициента матрицы на квант преобразования может быть представлена операцией сдвига этого коэффициента на S двоичных разрядов.

Соотношения между квантами соседних циклов можно записать в виде:

$$c_{l-1} = c_l \cdot R , \ l = \overline{P,1} .$$

Для того чтобы все c_l, $l = 1,2,\ldots,P$ могли быть представлены в виде 2^{-s}, $s \in N$, очевидно, достаточно, чтобы $c_p = 2^{-s}$, $s \in N$ и

$$R_{\text{int}} = 2^k, \ k \in N. \tag{17}$$

В качестве целых значений R_{int} целесообразно принять числа, наиболее близкие к оптимальному $R = e$, т.е. $R_{int} = 2$ и $R_{int} = 4$.

Далее определим P_{int}. Прологарифмируем выражение (16) и, используя свойства логарифма, получим:

$$P = \frac{ln\dfrac{|z_{01}|_{max}}{c_P}}{ln R} .$$

Для целочисленных значений R_{int}:

$$P_{int} = \left\lceil \frac{ln\dfrac{|z_{01}|_{max}}{c_P}}{ln R_{int}} \right\rceil , \tag{18}$$

Выражение (18) представляет целую часть от числа, округленную в большую сторону. Теперь оценка общего количества итераций принимает вид:

$$M_{\text{int}} = P_{\text{int}} R_{\text{int}} . \tag{19}$$

На основе соотношений (18), $R_{int} = 2$ и $R_{int} = 4$, значения $|z_{01}|_{max}$ и заданного c_P может быть определено P_{int}. В то же время, для упрощения и универсиализации алгоритма (3) представляется целесообразным создание универсальных шаблонов, задающих количество циклов и итераций в циклах. В качестве одного из вариантов такого шаблона примем расчет для $|z_{01}|_{max} = 1$, $c_P = 2^{-14}$ (возможное отличие по уравнениям СЛАУ значений $z_{r01} \neq 1$ может приводить к отклонению количества итераций только в первом цикле, что в целом не должно оказать существенное влияние на общее количество итераций).

Для $\left|z_{01}\right|_{max} = 1$, $c_P = 2^{-14}$, $R_{int} = 2$ и P_{int} (18) получаем на основе (19):

$$P_{int} = 14,\ M_{int} = 28. \tag{20}$$

Для данного случая весь итерационный процесс разбивается на 14 циклов со следующими значениями c_l для каждого цикла:

$$c_l = 2^{-l}, l = \overline{1,14}. \tag{21}$$

Аналогично, для $\left|z_{01}\right|_{max} = 1$, $c_P = 2^{-14}$, $R_{int} = 4$:

$$P_{int} = 7,\ M_{int} = 28 \tag{22}$$

и итерационный процесс разбивается на 7 циклов со следующими значениями c_l для каждого цикла:

$$c_l = 2^{-2l}, l = \overline{1,7}. \tag{23}$$

Основываясь на приведенных выше теоретических расчетах, длительность итерационного процесса, в рассматриваемых условиях, оказывается одинаковой при значениях $R_{int} = 2$, $R_{int} = 4$. Следовательно, можно использовать одно из этих значений, а полученные соответственно оценки (20), (22) и рассчитанные веса квантов преобразования (21), (23) могут представлять универсальный шаблон для реализации итерационного процесса при $c_P = 2^{-14}$. Аналогично, можно построить шаблоны для других значений c_P.

В реальном вычислительно процессе, когда $\nabla y_{ril} \neq 0$, выполнение итераций в каждом цикле должно выполняться до тех пор, пока не выполнится по всем уравнениям СЛАУ условие (6).

Оптимизированные оценки R_{int} и P_{int} получены для условия $\nabla y_{ril} = 0$. В реальном вычислительном процессе, в соответствии с введенными ранее заключениями, количество итераций может быть увеличено или уменьшено относительно значения R_{int}.

5. Экспериментальное исследование. Работоспособность полученных рекомендаций для организации итерационного процесса решения СЛАУ и оценок была проверена на решении различных СЛАУ, характеризующихся различной сходимостью при выполнении простой итерации:

$$\begin{cases} y_1 + 0{,}6y_2 + 0{,}08y_3 = -0{,}356; \\ 0{,}12y_1 + y_2 + 0{,}7y_3 = -0{,}604; \\ 0{,}11y_1 + 0{,}4y_2 + y_3 = 0{,}353. \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + \dfrac{2}{3}y_3 = \dfrac{23}{15}; \\ \dfrac{1}{8}y_1 + y_2 + \dfrac{5}{8}y_3 = 0{,}6125; \\ \dfrac{2}{3}y_1 + 1{,}2y_2 + y_3 = \dfrac{191}{150}. \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} 3{,}74y_1 + 0{,}86y_2 + 1{,}13y_3 = 1{,}13; \\ 0{,}86y_1 + 1{,}71y_2 - 0{,}49y_3 = 1{,}88; \\ 1{,}13y_1 - 0{,}49y_2 + 1{,}26y_3 = -0{,}25. \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} 2{,}01y_1 - 0{,}53y_2 + 1{,}13y_3 = -2{,}09; \\ -0{,}53y_1 + 1{,}62y_2 - 1{,}03y_3 = 0{,}39; \\ 1{,}13y_1 - 1{,}03y_2 + 2{,}34y_3 = 2{,}13. \end{cases} \tag{27}$$

В ходе исследования был проведен сравнительный анализ между методами решения СЛАУ при условии обеспечения точности 2^{-14} на основе дельта-преобразований первого порядка с постоянным квантом $c = 2^{-14}$, методом простой итерации, а также предлагаемым в данной работе методом при $R_{int} = 2$, $R_{int} = 4$, $R_{int} = 8$, $c_P = 2^{-14}$, $M_{int} = 28$. Полученные результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты экспериментов

Метод организации итерационного процесса решения СЛАУ		Количество итераций			
		(24)	(25)	(26)	(27)
на основе дельта-преобразований первого порядка с постоянным квантом		19660	14826	20700	39360
на основе дельта-преобразований первого порядка с переменным квантом	$R_{int} = 2$	23	77	51	37
	$R_{int} = 4$	14	80	61	35
	$R_{int} = 8$	33	188	102	55
простой итерации		8	98	24	14

Анализ приведенных в таблице данных показывает, что разработанныйалгоритм организации итерационного процесса решения СЛАУ с переменным квантом, базирующийся на оптимизированных оценках $R_{int} = 2$, $R_{int} = 4$, и обеспечивающий оптимизацию длительности реальных итерационных процессов, отличается существенным (в сотни – тысячи раз) сокращением количества итераций по отношению к методу решения СЛАУ на основе дельта-преобразований первого порядка с постоянным квантом, а также существенной близостью по количеству итераций к методу простой итерации (по данным таблицы отношение количества итераций метода простой итерации к методу с переменным квантом составляет ~ 1,3÷0,4). В то же время из таблицы также видно, что при уходе от оптимизированных значений R_{int} и использовании $R_{int} = 8$ проявляется существенное увеличение количества итераций.

Заключение. Разработанные на основе дельта-преобразований первого порядка и использовании переменного кванта алгоритмы решения СЛАУ, характеризующихся сходимостью, позволяют существенно сократить количество итераций по сравнению с известными аналогичными методами, существенно приблизить итерационные процессы по длительности к простой итерации. При этом для специализированных вычислительных средств создаются предпосылки сокращения аппаратных ресурсов и длительности выполнения отдельных итераций благодаря возможности исключения операций с многоразрядными кодами коэффициентов и переменных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Максфилд К.* Проектирование на ПЛИС. – М.: Додека-XXI, 2007. – 408 с.
2. *Кравченко П.П.* Инкрементные методы решения систем линейных алгебраических уравнений // Многопроцессорные вычислительные структуры. – 1983. – Вып. 5 (XIV). – С. 30-32.
3. *Гомозов О.В. Ладыженский Ю.В.* Инкрементные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений и архитектура мультипроцессоров на программируемой логике // Научные труды ДонНТУ. Серия «Информатика, кибернетика и вычислительная техника». – 2010. – Вып. 12 (165). – С. 34-40.
4. *Гомозов О.В.* Структура инкрементных алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений // Материалы 3-й Международной научно технической конференции «Моделирование и компьютерная графика – 2009». – Донецк, 2009. – С. 255-259.
5. *Николаев И.А.* Исследование устойчивости систем, содержащих цифровые интеграторы: Дис. … кан. тех. наук. – Таганрог, 1968. – 181 с.
6. *Третьяков С.И.* Алгоритмы работы специализированных процессоров для решения систем уравнений // Кибернетика. – 1978. – № 5. – С. 34-36.
7. *Третьяков С.И.* Реализация метода блочной итерации на специализированных процессорах. В кн. Технические средства управляющих машин и систем. – Киев, 1978. – С. 9-13.

8. *Малиновский Б.Н., Боюн В.П., Козлов Л.Г.* Алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, ориентированные на структурную реализацию // Управляющие системы и машины. – 1977. – Вып. 5. – С. 79-84.
9. *Боюн В.П., Козлов Л.Г., Малиновский Б.Н., Третьяков С.И.* Устройство для решения систем линейных алгебраических уравнений. Автор. свид. № 543943 – БИ, 1977, № 3.
10. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
11. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 632 с.
12. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 532 с.
13. *Кравченко П.П.* Основы теории оптимизированных дельта-преобразований второго порядка. Цифровое управление, сжатие, параллельная обработка информации: Монография. – Таганрог. Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008. – 192 с.

REFERENCES

1. *Maksfild K.* Proektirovanie na PLIS [Design based on FPGA]. Moscow: Dodeka-XXI, 2007, 408 p.
2. *Kravchenko P.P.* Inkrementnye metody resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Incremental methods for solving systems of linear algebraic equations], *Mnogoprotsessornye vychislitelnye struktury* [Multiprocessor computing patterns], 1983, Issue 5 (XIV), pp. 30-32.
3. *Gomozov O.V. Ladyzhenskiy Yu.V.* Inkrementnye algoritmy resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy i arkhitektura multiprotsessorov na programmiruemoy logike [Incremental algorithms for solving systems of linear algebraic equations and architecture of the multiprotsessors programmable logic], *Nauchnye trudy DonNTU. Seriya «Informatika, kibernetika i vychislitelnaya tekhnika»* [Scientific works of Donetsk national Technical University. Series "computer science, Cybernetics and computer engineering"], 2010, Issue 12 (165), pp. 34-40.
4. *Gomozov O.V.* Struktura inkrementnykh algoritmov resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Structure incremental algorithms for solving systems of linear algebraic equations], *Materialy 3-y Mezhdunarodnoy nauchno tekhnicheskoy konferentsii «Modelirovanie i kompyuternaya grafika – 2009»* [The materials of the 3rd International scientific technical conference "Modeling and computer graphics - 2009"]. Doneck, 2009, pp. 255-259.
5. *Nikolaev I.A.* Issledovanie ustoychivosti sistem, soderzhashchikh tsifrovye integratory: Dis. … kan. tekh. nauk. [Investigation of stability of systems with digital integrators. Cand. of eng. sc. diss.]. Taganrog, 1968, 181 p.
6. *Tretyakov S.I.* Algoritmy raboty spetsializirovannykh protsessorov dlya resheniya sistem uravneniy [The algorithms specialized processors for solving systems of equations], *Kibernetika* [Cybernetics], 1978, No. 5, pp. 34-36.
7. *Tretyakov S.I.* Realizatsiya metoda blochnoy iteracii na spetsializirovannykh protsessorakh [Implementation of the method of block iteration on specialized processors], *V kn. Tekhnicheskie sredstva upravlyayushchikh mashin i system* [In the book. Technical means of control machines and systems]. Kiev, 1978, pp. 9-13.
8. *Malinovskiy B.N., Boyun V.P., Kozlov L.G.* Algoritmy resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy, orientirovannye na strukturnuyu realizatsiyu [Algorithms for solving systems of linear algebraic equations, focused on the implementation of structural], *Upravlyayushchie sistemy i mashiny* [Control systems and machines], 1977, Issue 5, pp. 79-84.
9. *Boyun V.P., Kozlov L.G., Malinovskiy B.N.,Tretyakov S.I.* Ustroystvo dlya resheniya system lineynykh algebraicheskikh uravneniy [he device for solution sistemlerinin algebraic equations], *Avtor. svid. № 543943 – BI, 1977, № 3* [Copyright certificate № 543943 - BI, 1977, no. 3].
10. *Berezin I.S., Zhidkov N.P.* Metody vychisleniy [Methods of calculations]. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1966, 632 p.
11. *Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M.* Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow: BINOM. Labora-toriya znaniyj, 2006, 632 p.
12. *Samarskiy A.A., Nikolaev E.S.* Metody resheniya setochnykh uravneniy [Methods for solving grid equations]. Moscow: Nauka, 1978, 532 p.

13. *Kravchenko P.P.* Osnovy teorii optimizirovannykh delta-preobrazovaniy vtorogo poryadka. Cifrovoe upravlenie, szhatie, parallelnaya obrabotka informacii: Monografiya [Fundamentals of the theory optimized Delta transformations of the second order. Digital control, compression, parallel information processing: Monograph]. Taganrog. Izd-vo TTI YuFU, 2008, 192 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Кравченко Павел Павлович – Южный федеральный университет; e-mail: kravchenkopp@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371673; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ; профессор.

Пирская Любовь Владимировна – e-mail: lyubov.pirskaya@gmail.com; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ; аспирант.

Kravchenko Pavel Pavlovich – Southern Federal University; e-mail: kravchenkopp@sfedu.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371673; the department of software engineering; professor.

Pirskaya Lyubov Vladimirovna – e-mail: lyubov.pirskaya@gmail.com; the department of software engineering; postgraduate student.

УДК 681.5

О.Н. Зенкина

ПРОБЛЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ МЕТОДОВ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Исследуется проблема линеаризации для выявления условий и возможностей разработки методов анализа автоколебаний при помощи гармонической линеаризации класса нелинейных систем с распределенными параметрами. Рассмотрены основные теоретические положения методы и подходы, на основе которых предполагается исследование класса нелинейных распределенных систем. Проведен анализ состояния проблемы и рассмотрены условия, позволяющие выделить класс распределенных систем, которые предполагается исследовать. Исследована возможность обобщения методов линеаризации систем с сосредоточенными параметрами для распределенных систем. Основные задачи исследования нелинейных автоматических систем сводятся к отысканию возможных состояний равновесия системы и исследованию их устойчивости, определению периодических движений, исследованию процессов перехода системы к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях. Разработка новых методов линеаризации нелинейных распределенных систем управления. Процесс разработки позволит выделить определенный класс задач, для которых можно нелинейный распределенный объект описать с помощью адекватной линейной модели.

Распределенные системы; нелинейная характеристика; линеаризация; колебания.

O.N. Zenkina

FORMATION PROBLEMS OF LINEARIZATION METHODS OF THE NONLINEAR DISTRIBUTED CONTROL SYSTEMS

The aim of the research is to identify relevant studies of conditions and possibilities of developing methods for the analysis of self-excited oscillations using harmonic linearization of a class of nonlinear systems with distributed parameters. The basic theoretical methods and approaches, on the basis of which to study a class of non-linear distributed systems. The analysis of the problem and the conditions to isolate a class of distributed systems to be explored. We investigated the possibility of synthesis methods linearized systems with lumped parameters for distributed systems. The main objectives of research of nonlinear automatic systems are reduced to search