УДК 004.942

В.Ф. Гузик, С.М. Гушанский, А.В. Касаркин

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАНТОВОЙ ЗАПУТАННОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРА СОГЛАСОВАННОСТИ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ИГР

Рассматривается ходовая экономическая игра «Борьба за рынки». Рассказывается, как построить математическую модель квантовой реализации этой игры. Раскрываются используемые квантовые гейты, из оператора поворота формируется гейт для загрузки смешанных стратегий в кубит. Для наглядности приводится алгоритм модели. В нем пошагово даются указания на последовательность необходимых действий и операций для создания квантовой модели игры «Борьба за рынки». Цель этой модели – оценка влияния степени запутанности (мерой которой является энтропия фон Неймана) на работу алгоритма. С помощью графиков, построенных после моделирования, исследуется влияние квантовой запутанности на выигрыш игроков. Проводится сравнение с классическими результатами. Делается вывод, что использование квантового подхода к теории игр увеличивает выигрыш для всех игроков, не меняя стратегии каждого. На примере игры «Борьба за рынки» показывается, как использовать квантовую запутанность для моделирования параметра согласованности в задачах теории игр.

Квантовая теория игр; квантовые игры; квантовые компьютеры; квантовая запутанность; сцепленность; степень запутанности; квантовое моделирование; квантовая симуляция; согласованность; суперпозиция.

V.F. Guzik, S.M. Gushanskiy, A.V. Kasarkin

USAGE OF QUANTUM ENTANGLEMENT FOR SIMULATION OF CONSISTENCY PARAMETER IN GAME THEORY PROBLEM

This article is about popular economic game “Struggle for markets”. It is said how to build mathematic model of quantum implementation of this game. It is revealed used gates, gate is forming form the rotation operator for download of mixed strategies into quibit. For illustration purposes it is given algorithm of model. Step by step it gives instructions on the sequence of necessary actions and operations for creation quantum model of game “Struggle for markets”. The goal of this model is analysis of influence of entanglement degree, the measure of which is von Neiman entropy, on the algorithm work. With the help of graphics which are built after simulation it is researched the influence of quantum entanglement on the gamers payoff. It is made a comparison with classical results. It is made a conclusion that the usage of quantum approach to the game theory raise the payoff for all the gamers without changing the strategy of each of them. Through the example of game “Struggle for markets” it is shown how to use quantum entanglement for simulation of coherence parameter in the game theory tasks.

Quantum games; quantum strategies; quantum computers; quantum entanglement; joint probabilities; measure for entanglement; maximum entanglement; quantum simulation; quantum computation; superposition.

Одной из первых работ в области квантовой теории игр стала публикация физика и математика Дэвида Мейера "Квантовые стратегии" [1] в 1999 г., в которой он рассмотрел популярную игру «Орел и решка». В настоящее время квантовая теория игр активно осваивается, появляются все новые и новые исследования в этой области. В чем отличие квантовой теории игр от классической? Особенность всех квантовых вычислений в том, что они базируются на свойствах квантовых частиц, а именно на суперпозиции и запутанности. Без применения этих свойств вычисления нельзя считать квантовыми. В квантовой теории игр суперпозиция используется для моделирования неопределенности, когда мы не можем знать, какой стратегией в данный момент времени воспользуется игрок. В классическом математическом аппарате теории вероятности такой возможности нет, там учитывается лишь вероятность, с которой игрок может выбрать ту или иную стратегию. А использование суперпозиции для моделирования этой неопределенности позволит решать задачи, которые стандартная вероятностная концепция описать не может, например асимметричная антагонистическая модель «Оппортунизм на квадрате» [2]. Запутанность не является параметром, принимающим только два состояния, либо есть, либо нет, она так же может иметь бесконечное множество значений между этими крайними состояниями. Влияние уровня запутанности на квантовые алгоритмы, в частности на телепортацию, было исследовано в работе [3], где было показано, что частичная запутанность вносит ошибку в протокол телепортации и средняя ошибка тем больше, чем меньше уровень запутанности. В теории игр квантовая запутанность позволяет моделировать согласованность – это параметр, определяющий, насколько согласованно игроки будут принимать решение в каждый момент времени, т.е. насколько их решения будут зависеть друг от друга.

Также существует ряд задач, в которых применение квантовой теории игр дает новое равновесие по Парето [4], и это равновесие более выгодно для всех игроков. Равновесие по Парето – это такое состояние системы, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.

Использование квантовой запутанности в теории игр позволяет согласовать действия игроков [5]. При этом уровень запутанности отражает степень согласованности игроков. Рассмотрим модель, с помощью которой мы увидим, как квантовая запутанность, а следовательно, и согласованность влияет на выигрыш игроков в мягкой и антагонистической игре. В качестве примера взята ходовая экономическая игра «Борьба за рынки» [6] со следующей платежной матрицей, приведённой в таблице.

Платежная матрица

		Игрок B	
		0	1
Игрок A	0	(−2, −4)	(4, 4)
	1	(2, 8)	(−1, −2)

Стандартная интерпретация данной игры состоит в выборе двумя конкурирующими фирмами A и B двух стратегий: 0 – освоение и удержание первого (более выгодного) рынка и 1 – освоение и удержание второго рынка (менее выгодного). Априори предполагается, что фирма B контролирует оба рынка. В связи с этим проникновение фирмы A на новые рынки связано с финансовыми издержками на рекламную компанию и эти издержки тем больше, чем выгоднее рынок. Фирма B, соответственно, принимает превентивные меры, которые тоже требуют расходов. Победа фирмы A на первом рынке принесет ей вдвое больший выигрыш, чем на втором, однако поражение – полностью разорит. Победа ее на втором рынке принесет меньше выгоды, но и потери от возможного поражения будут не столь значительны.

Решая эту типичную задачу теории игр, находим смешанные оптимальные стратегии игроков

$$\rho_A^* = \frac{1}{3}, \qquad \rho_B^* = \frac{5}{9} \tag{1}$$

и их выигрыши

$$\mathrm{S}^{\mathrm{A}}\left(\rho_A^*, \rho_B^*\right) = \frac{2}{3},\ \mathrm{S}^{\mathrm{B}}\left(\rho_A^*, \rho_B^*\right) = \frac{4}{3}. \tag{2}$$

Как видно из решения, несмотря на все выгоды, большой риск разорения отталкивает фирму А от активного освоения второго рынка.

В квантовой интерпретации этой игры мы можем использовать квантовую запутанность, которая позволит согласовывать игрокам принятие решения на каждом шаге. Рассмотрим алгоритм квантовой мягкой игры более подробно.

Квантовая реализация игры представлена на схеме, приведенной на рис. 1. Конечное состояние может быть вычислено по формуле [7]

$$\left|\psi_f\right\rangle = \left|\psi_i\right\rangle \hat{J}\left(\hat{A} \otimes \hat{B}\right)\hat{J}^{\dagger}, \tag{3}$$

где $\left|\psi_i\right\rangle = \left|00\right\rangle$ – начальное состояние кубита, а $\left|\psi_f\right\rangle$ – конечное; оператор $\hat{J}$ запутывает кубиты игроков, $\hat{A}$ и $\hat{B}$ означают ходы игроков, а гейт $\hat{J}^{\dagger}$ распутывает кубиты для дальнейшего измерения. Выигрыш в дальнейшем вычисляется с помощью классической платежной матрицы. Получается, что классическая игра будет у нас подмножеством квантовой. Среднее значение выигрыша игроков представляется эрмитовым оператором

$$\left\langle S\right\rangle = P_{00}\left|\left\langle\psi_f\middle|00\right\rangle\right|^2 + P_{01}\left|\left\langle\psi_f\middle|01\right\rangle\right|^2 + P_{10}\left|\left\langle\psi_f\middle|10\right\rangle\right|^2 + P_{11}\left|\left\langle\psi_f\middle|11\right\rangle\right|^2, \tag{4}$$

где P_{ij} является выигрышем для игрока, связанным с IJ исхода игры, I, J ∈ {0, 1} (например, эти значения можно взять из таблицы). Если оба игрока будут применять классические стратегии игры, квантовая игра не даст ничего нового. Однако если игрокам применить квантовую запутанность стратегий, это позволит взаимодействовать сторонам таким способом, который не имеет классического аналога.

Максимально запутывающий оператор $\hat{J}$ может быть записан как

$$\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(I^{\otimes N} + i\sigma_1^{\otimes N}\right). \tag{5}$$

Запись вида $X^{\otimes N}$ означает тензорную степень, т.е. тензорное произведение X самого на себя N раз. Так как мы в этой задаче работаем с двумя кубитами, то N=2.

Эквивалентная форма оператора, который позволяет контролировать степень запутываемых им кубит, имеет вид

$$\hat{J} = \exp\left(i\frac{\gamma}{2}\sigma_1^{\otimes N}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\left(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + i\gamma\sigma_1 \otimes \sigma_1\right), \tag{6}$$

где γ – действительный параметр, определяющий меру запутанности кубит, σ – матрицы Паули (7);

$$\sigma_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы σ_x, σ_y, σ_z осуществляют поворот на 180° вектора состояния кубита в сфере Блоха по осям X, Y, Z соответственно. Матрица σ_0 – единичная матрица, не изменяющая состояния кубита. Эти 4 матрицы составляют базис в пространстве всех эрмитовых матриц 2×2.

Наличие параметра γ позволит увидеть влияние степени согласованности игроков на их выигрыш, что и будет проанализировано в модели. Так же в модели были использованы платежные матрицы, приведенные в таблице.

Игра заключается в том, что каждый игрок может изменить состояние своего мнения (кубита) относительно выбора стратегии “0” или “1”. Для этого в кубит необходимо загрузить заранее вычисленную смешанную стратегию. Чтобы это сделать, повернем кубит так, чтобы спроектировать вероятность выбора стратегии на суперпозицию кубита $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответственно. Как известно, оператор поворота имеет вид [8]

$$\hat{U}(\Theta)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} & \sin\frac{\Theta}{2} \\ -\sin\frac{\Theta}{2} & \cos\frac{\Theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где 0≤Θ≤π, $\cos\frac{\Theta}{2}$ означает квадрат изменения вероятности получить кубит в состоянии $|0\rangle$ после измерения, а $\sin\frac{\Theta}{2}$ – в состоянии $|1\rangle$. Заменим $\cos\frac{\Theta}{2}$ и $\sin\frac{\Theta}{2}$ нашими вероятностями выбора стратегии и для первого игрока получим

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} \sqrt{\rho_A} & \sqrt{1-\rho_A} \\ -\sqrt{1-\rho_A} & \sqrt{\rho_A} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Для второго игрока соответственно получаем

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} \sqrt{\rho_B} & \sqrt{1-\rho_B} \\ -\sqrt{1-\rho B} & \sqrt{\rho_B} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

На основе этого протокола была построена модель в алгебраической среде программирования Maple с применением библиотеки для симуляции квантовых вычислений OpenQUACS. В модели был проведен анализ влияния согласованности на выигрыш игроков [9].

Алгоритм модели представлен на рис. 2.

Из алгоритма мы видим, что сначала игра решается классическим способом и из платежных матриц находятся оптимальные смешанные стратегии ρ_A, ρ_B, которые затем формируют оператор поворота кубит R. Далее в цикле на каждом шаге наращивается параметр γ (абсцисса на рис. 3) и с его помощью формируем запутывающий оператор J (6). После того как все операторы сформированы, на каждом шаге цикла выполняется протокол квантовой игры двух лиц (см. рис. 1) и формируется конечное состояние кубит $|\psi_f>$. Используя вектор этого состояния и платежную матрицу, приведенную в таблице, вычисляют средние выигрыши игроков (4) (ордината на рис. 3).

Так же была промоделирована жесткая квантовая игра. Ее алгоритм отличается только тем, что кубиты устанавливаются в состояние |01>, а не |00>, это означает, что игроки на каждом шаге будут применять противоположные стратегии.

В результате работы алгоритма мягкой и жесткой квантовой игры получаем графики, приведенные на рис. 3.

В данной задаче мы имеем дело с относительными значениями согласованности и запутанности, варьирующимися от 0 (отсутствие согласованности/запутанности) до 1 (максимальная согласованность/запутанность) и они эквивалентны.

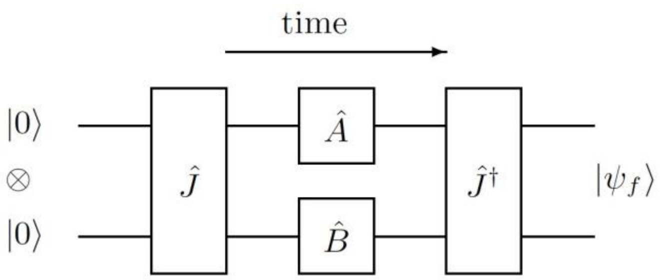

Рис. 1. Протокол квантовой игры двух лиц

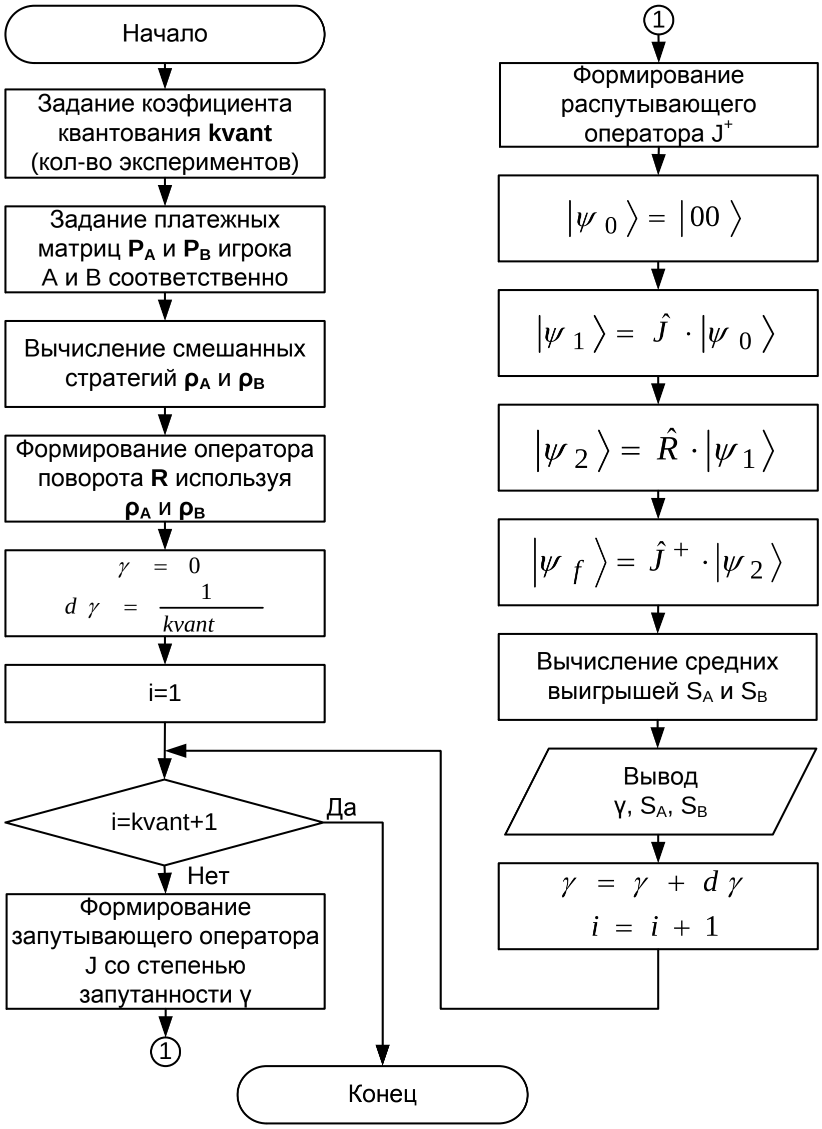

Рис. 2. Алгоритм мягкой квантовой игры

Из графиков делаем вывод, что если запутанность отсутствует, выигрыш игроков равен их выигрышу в классической игре, при увеличении степени запутанности (перемещение вправо по графику) выигрыш также увеличивается [10]. Из рис. 3 видно, что это относится как к мягким, так и к жестким играм. Графики наглядно доказывают, что квантовая теория игр значительно эффективнее классической, при условии использования запутанности.

При согласованности, равной нулю, игроки выбирают стратегии независимо от выбора стратегии противоположного игрока в данный момент. При согласованности, равной единице (см. рис. 3), игроки в мягких играх выбирают одинаковые стратегии при каждом повторении игры, в жестких играх – противоположные. Промежуточные значения – это отклонения от этих состояний: чем ближе к 1, тем вероятность того, что решение примется, согласованно возрастает.

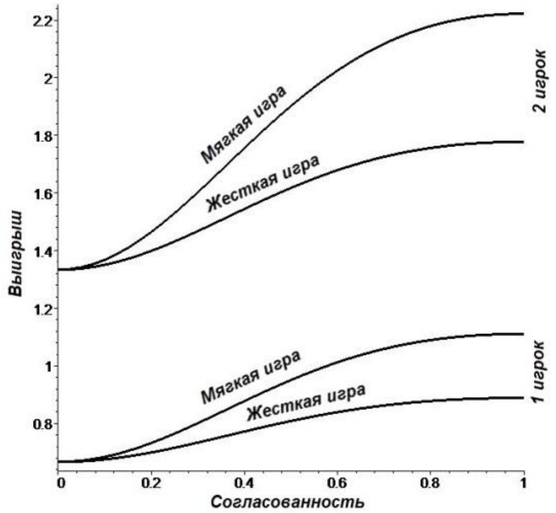

Рис. 3. Влияние согласованности игроков на их выигрыш

Согласованность может носить и несколько другую интерпретацию, она может показывать вероятность узнать (подслушать, выведать) решение противника. В классической теории игр такой возможности не было. Также это означает, что частичная запутанность для нас становится необходимым ресурсом, а не источником ошибок, как в большинстве случаев [11].

Кроме всего прочего, квантовые алгоритмы теории игр отличаются простотой реализации, чтобы смоделировать задачу, приведенную выше, необходимо всего два кубита. Соответственно, если у нас будет стоять задача с множеством игроков – увеличится только количество кубит, которое будет равно числу игроков, т.е. рост необходимых ресурсов будет линейным, а в случае с классической теорией игр мы имеем субэкспоненциальное увеличение вычислительной сложности. Следовательно, для емких задач теории игр классический компьютер становится непригоден.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Meyer D.A.* Quantum strategies // Phys.Rev.Lett. – 1999. – № 82. – P. 1052-1055.
2. *Парфёнов Г.Н., Франева Л.К.* Математические модели в теории фирмы: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. – 101 с.
3. *Kasarkin A.V., Gushanskiy S.M., Guzik V.F.* Influence of parameters entanglement on the quantum algorithms // Ежемесячный мультидисциплинарный научный журнал «European Researcher». – 2012. – № 5-1 (20). – С. 448-450.

4. *Eisert J., Wilkens M., Lewenstein M.* Quantum Games and Quantum Strategies // Phys.Rev.Lett.83:3077. 1999. arXiv:quant-ph/9806088v3.
5. *Гузик В.Ф., Гушанский С.М., Касаркин А.В.* Использование квантовой запутанности для увеличения выигрыша в задачах теории игр для двух и трех игроков // Информатизация и связь. – 2013. – № 5. – С. 103-106.
6. *Думачев В. Н.* Модели и алгоритмы квантовой информации: Монография. – Воронеж: ВИМВД, 2009. – 231 с.
7. *Flitney Adrian P.* Abbott Derek. An introduction to quantum game theory // Fluct. Noise Lett. 2. 2002. R175-87. arXiv:quant-ph/0208069v2.
8. *Eisert J., Wilkens M.* Quantum Games // J. Mod. Opt. 47 2543. 2000. arXiv:quant-ph/0004076v1.
9. *Касаркин А. В.* Квантовая запутанность и квантовая теория игр // Высокопроизводительные вычислительные системы: Сб. науч. тр. – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2012. – Вып. 2. – С. 16-20.
10. *Гузик В.Ф., Гушанский С.М., Касаркин А.В.* Квантовая запутанность и её значение в теории игр // Сб. тр. X Всероссийской научной конференции молодых ученых аспирантов и студентов «Информационные технологии, системный анализ и управление – ИТСАиУ-2012». – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2012. – Т. 1. – С. 222-225.
11. *Касаркин А.В., Гушанский С.М.* Очищение запутанности // Сб. науч. тр. третьей Всероссийской школы-семинара аспирантов, студентов и молодых ученых ИМАП-2011. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2011. – С. 210-212.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Е.А. Башков.

Гузик Вячеслав Филиппович – Южный федеральный университет; e-mail: gvf@tsure.ru; 347928, г. Таганрог, ул. Энгельса, 1; тел.: +78634371656; кафедра вычислительной техники; зав. кафедрой; д.т.н.; профессор.

Гушанский Сергей Михайлович – e-mail: kron@pbox.ttn.ru; кафедра вычислительной техники; доцент.

Касаркин Алексей Викторович – e-mail: kav589@mail.ru; кафедра вычислительной техники; магистрант.

Guzik Viacheslav Filipovich – Southern Federal University; e-mail: gvf@tsure.ru; 1, Engelsa street, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371656; the department of computer engineering; head the department; dr. of eng. sc.; professor.

Gushanskiy Sergey Mihaylovich – e-mail: kron@pbox.ttn.ru; the department of computer engineering; associate professor.

Kasarkin Alexey Viktorovich – e-mail: kav589@mail.ru; the department of computer engineering; undergraduate.

УДК 681.51

В.М. Радионов

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОЦИКЛОНОМ КАК СЛОЖНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

Рассматриваются вопросы формирования адаптивной системы управления центробежным гидравлическим классификатором по качественным и количественным критериям для повышения энергоэффективности обогатительных фабрик. Гидродинамика гидроциклона представлена сложной внутренней структурой потока, численное моделирование которого остается нетривиальной задачей. Проведен анализ существующих моделей. Быстрое стохастическое изменение свойств и состава пульпы и различные ограничения проведения измерений при получении информации о состоянии объекта управления требуют применения