Чикина Любовь Григорьевна – e-mail: lchikina@sfedu.ru; кафедра высокопроизводительных вычислений и информационно-коммуникационных технологий факультета математики, механики и компьютерных наук; профессор.

Чикин Алексей Львович – Институт аридных зон Южного научного центра; e-mail: chikin@sfedu.ru; главный научный сотрудник.

Shabas Irina Nikolaevna – Southern Federal University; e-mail: shabas@sfedu.ru; 344090, Rostov-on-Don, st. Stachki, 200/1, b.2, a.214; senior researcher.

Chikina Lubov Grigoryevna – e-mail: lchikina@sfedu.ru; the department VV IKT, faculty of Mathematics and Computer Science; professor.

Chikin Alexey L'vovich – Institute of Arid Ecosystems, South Science Center, Russian Academy; e-mail: chikin@sfedu.ru; chief scientific.

УДК 519.6

Е.А. Проценко, А.Е. Чистяков, С.А. Шретер, А.А. Сухинов

СРАВНЕНИЕ ТРУДОЕМКОСТЕЙ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЯВНОЙ И НЕЯВНОЙ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ В ПРИБРЕЖНЫХ ВОДНЫХ СИСТЕМАХ*

Для достоверного прогноза динамических явлений береговой зоны возникает необходимость в построении математических моделей процессов переноса вещества на мелководье под воздействием поверхностных гравитационных волн, играющих важную роль в прогнозировании возможного вмешательства в экосистему, в анализе текущей ситуации, в принятии оперативных решений по преодолению антропогенных воздействий. Цель работы заключается в построении и реализации двумерных непрерывных и дискретных моделей транспорта наносов в прибрежных водных системах, описывающих переформирование прибрежной зоны водоемов за счет движения воды и твердых частиц и удовлетворяющих основным законам сохранения. Для решения задачи использовались как традиционные (неявные), так и явные дискретные модели, с добавлением в последние регуляризированного по Б.Н. Четверушкину слагаемого – дискретного аналога разностной производной второго порядка по времени. Построены и программно реализованы на кластере распределенных вычислений пространственно-трехмерная модель гидродинамики в прибрежной зоне водоемов и модель транспорта взвешенных частиц. Приведены результаты численных экспериментов. Основной целью работы является сравнение временных затрат для алгоритмов, базирующихся на традиционных неявных и явных регуляризованных схемах. В работе рассмотрен выбор допустимого значения множителя при разностной производной второго порядка – регуляризаторе схемы, который необходим для построения эффективного параллельного алгоритма решения данной задачи на системах с массовым параллелизмом. Разработанные численные алгоритмы и реализующий их комплекс программ имеют практическую значимость: они могут быть использованы для исследования гидрофизических процессов в прибрежных водных системах, проверки гипотез и прогноза динамики донной области мелководных водоемов и береговой линии. Полученные выводы позволят улучшить существующие модели для прогнозирования изменений подводного рельефа и очертаний береговой линии.

Параллельные вычисления; перемещения наносов; дискретная модель; сеточные уравнения; численный эксперимент; метод регуляризации; неявные схемы.

* Работа выполнена при частичной поддержке проектов Программы № 43 фундаментальных исследований Президиума РАН по стратегическим направлениям развития науки "Фундаментальные проблемы математического моделирования".

E.A. Protsenko, A.E. Chistyakov, S.A. Shreter, A.A. Sukhinov

TIME-CONSUMING COMPARISON OF EXPLICIT AND IMPLICIT SCHEMES FOR NUMERICAL REALIZATION OF THE SEDIMENT TRANSPORT PROBLEM IN COASTAL SYSTEMS *

For reliable prediction of dynamic phenomena of the coastal zone there is a need to construct mathematical models of transport of matter in shallow water under the influence of surface gravity waves, which play an important role in the prediction of possible intervention into the ecosystem, in the analysis of the current situation in the operational decisions on overcoming of anthropogenic influences. The purpose of work consists in the creation and implementation of a two-dimensional continuous and discrete models of transport of deposits in the coastal water systems, describing the rearrangement of the coastal zone of the reservoirs due to the movement of water and solid particles and satisfying the basic conservation laws. For the solution of the problem were used both traditional (implicit), and explicit discrete models, with addition in the last of regularized according to B.N. Chetverushkin composed – discrete analog of a differential derivative of the second order on time. The spatial three-dimensional model of hydrodynamics in the coastal zone of reservoirs and model of the transport of suspended particles were built and implemented on a cluster of distributed computing. The results of numerical experiments are given. The main aim of this work is to compare the time costs for algorithms based on traditional implicit and explicit regularization schemes. In work the choice of admissible value of a multiplier at a differential derivative of the second order is considered – a scheme regulyarizator which is necessary for creation of effective parallel algorithm of the solution of this task on systems with mass overlapping. Developed numerical algorithms and implementing them complex programs have practical significance: they can be used for studies of hydrophysical processes in the coastal water systems, testing hypotheses and predicting the dynamics of the bottom region of shallow water bodies and shorelines. The findings will improve existing models to predict changes in the underwater topography and shape of the coastline.

Parallel computing; sediment transport; discrete model; difference equations; numerical experiment; method of regularization; implicit schemes.

Введение. Динамика берегов и прибрежного рельефа дна во многом определяется характером перемещения наносов в береговой зоне под воздействием волн и течений. При конструктивном преобразовании рельефов необходимо учитывать динамику профиля дна в прибрежной зоне водоема под воздействием волновых процессов. Необходимы обоснованные методы расчета для достоверного прогноза динамических процессов береговой зоны. Одним из наиболее эффективных методов исследования реальных процессов гидродинамики в настоящее время становится численное моделирование. Таким образом, проблематика работы, а именно выявление наиболее эффективных в отношении временных затрат, численных моделей формирования профиля дна в прибрежной зоне водоема при образовании наносов, является актуальной.

Постановка задачи. С учетом ограничений на касательные напряжения на дне расчетной области уравнения перемещения наносов принимают вид [1–3]:

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t}+div\left(k\vec{\tau}_b\right)=div\left(k\left(\tau_{bc}/\sin\varphi_0\right)gradH\right), \tag{1}$$

$$k=\frac{A\varpi d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\left|\vec{\tau}_b-\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}gradH\right|^{\beta-1}h\left(\left|\vec{\tau}_b-\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}gradH\right|-\tau_{bc}\right), \tag{2}$$

где $h\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Уравнение (1) дополняется [4–6] начальным условием:

$$H(x,y,0)=H_0(x,y).$$

На границе расчетной области отсутствует поток, вызванный влиянием гравитационных сил: $H_0'(x,y)=0.$

Использованное для описания транспорта взвешенных частиц уравнение диффузии-конвекции может быть записано в следующем виде [7–11]:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{a-b}{H}\left(w-w_s\right)\frac{\partial C}{\partial \sigma}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_h\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_h\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\left(\frac{a-b}{H}\right)^2\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[D_v\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right]+F, \tag{3}$$

где C – концентрация осадка [г/л или кг/ м^3]; $V=\{u,v,w\}$ – составляющие поля вектора скорости [м/с]; w_s – гидравлическая крупность или скорость осаждения взвеси в вертикальном направлении [м/с]; H – глубина [м]; D_h, D_v – горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии [м^2/с]; x, y – координаты в горизонтальном направлении; σ – координата в вертикальном направлении; t – временная переменная [с]; F – функция, описывающая интенсивность распределения источников загрязняющих веществ.

Трехмерная модель гидродинамики жидкости водоема, представлена: уравнением Навье–Стокса (Рейнольдса), уравнением неразрывности, уравнением несжимаемости и соответствующими граничными условиями [12–15]. Сеточные уравнения, полученные в результате конечно-разностных аппроксимаций, решаются с помощью адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода [16–20].

Сравнение трудоемкостей явной и неявной схем для задачи диффузии-конвекции. В работе рассматривается трехмерная математическая модель транспорта взвеси. Для описания транспорта взвешенных частиц применяется уравнение диффузии-конвекции. Задача решалась с использованием как традиционных (неявных), так и явных дискретных моделей, с добавлением в последние регуляризированного по Б.Н. Четверушкину слагаемого [16]. Неявная схема будет решать уравнение

$$c_t'+uc_x'+vc_y'+wc_z'=\left(\mu c_x'\right)_x'+\left(\mu c_y'\right)_y'+\left(\nu c_z'\right)_z'+f\ . \tag{4}$$

Для явной схемы будет использоваться модифицированное уравнение, в которое введена разностная производная по времени второго порядка с множителем τ^*:

$$c_t'+\frac{\tau^*}{2}c''_t+uc_x'+vc_y'+wc_z'=\left(\mu c_x'\right)_x'+\left(\mu c_y'\right)_y'+\left(\nu c_z'\right)_z'+f. \tag{5}$$

Время, затрачиваемое на численное решение соответствующих неявных разностных уравнений модифицированным попеременно-треугольным итерационным методом, можно оценить как Q_{neiavn}: $Q_{neiavn}=n_{tn}n(\varepsilon)\,\mathrm{N}^2\,q_{PTM}$, где q_{PTM} – число итераций ПТМ (*q_{PTM}=50*); N – характерное число узлов по одному координатному направлению пространству $\mathrm{N}=\max\{\mathrm{Nx},\mathrm{Ny}\}$, Nx,Ny – число шагов сетки по координатным осям; $n(\varepsilon)=\mathrm{O(N)}$; $n_{tn}=T/ht_n$, T – общее время счета, ht_n – шаг по времени для неявной схемы.

Для явной схемы такая оценка имеет вид $Q_{iavn}=n_{tr}\,\mathrm{N}^2\,q_{iavn}$, где q_{iavn} – число итераций МПТМ (*q_{iavn}=14*); $\mathrm{N}=\max\{\mathrm{Nx},\mathrm{Ny}\}$, Nx,Ny – число шагов по координатным осям; $n_{tr}=T/ht_r$, T – общее время счета, ht_r – шаг по времени для явной схемы с регуляризатором.

Таблица 1

Сравнение точности расчетов концентрации наносов неявными, явными и явными с регуляризатором схемами

	ht=0,01	ht= 0,01296	ht=0,025	ht=0,036	ht=0,05	ht=0,075	ht=0,1	ht=0,2
Неявная схема Nx*Ny								
max(C), г/л*10^{-4}	8,541		8,541	8,541	8,541	8,541	8,541	8,542
z(C), %			0,065	0,113	0,174	0,282	0,390	0,824
Явная схема Nx*Ny ,								
max(C), г/л*10^{-4}	8,539		8,536		8,531	8,525	8,52	8,497
z(C), %			0,232		0,625	1,027	1,436	3,16
Неявная схема 2Nx*2Ny								
max(C), г/л*10^{-4}	8,356		8,356	8,356	8,356	8,356	8,356	8,356
z(C), %			0,131	0,227	0,350	0,568	0,786	1,658
Явная схема 2Nx*2Ny								
max(C), г/л*10^{-4}	8,354		8,351	8,349	8,346	8,341	8,336	8,315
z(C), %			0,465	0,795	1,251	2,054	2,872	6,313
Неявная схема 4Nx*4Ny								
max(C), г/л*10^{-4}	8,322		8,322		8,322	8,322	8,322	8,322
z(C), %			0,262		0,699	1,136	1,573	3,319
Явная схема 4Nx*4Ny ,								
max(C), г/л*10^{-4}	8,32	8,32	8,317		8,312	8,307	8,302	8,281
z(C), %		0,051	0,928		2,500	4,104	5,739	12,61

Для численного решения задачи использовались расчетные сетки с числами узлов по каждому из координатных направлений $kNx^* \, kNy^* \, Nz = 122 * 102 * 13$, где $k = 1, 2, 4$; z(C) – относительная погрешность, $C_{0.01}$ – концентрация, посчитанная с шагом по времени 0.01:

$$z(c)=\frac{\max\left|C_{0,01}-C_{ht}\right|}{\max(C_{ht})}*100\,\%.$$

Из табл. 1 видно, что при увеличении числа ячеек расчетной области в 2 раза в целях сохранения относительной погрешности $\approx 1\%$ для неявной схемы, численно реализуемой модифицированным попеременно-треугольным методом (МПТМ), необходимо уменьшать шаг по времени в 2 раза. Для явной схемы в этом случае шаг по времени нужно уменьшать в 1,36 раза [17]. По результатам численных экспериментов получаем следующую оценку, показывающую выигрыш во времени для явной схемы по отношению к неявной, в случае размеров сетки 122*102*13 (число итераций 8):

$$\frac{Q_{neiavn}}{Q_{iavn}}=\frac{n_{t_n}n(\varepsilon)\,\mathrm{N}^2\,q_{PTM}}{n_{t_r}\,\mathrm{N}^2\,q_{iavn}}=\frac{0,072*8*122^2*50}{0,2*122^2*14}\approx 10,286,$$

а в случае размеров сетки 244*204*13 (число итераций 10)

$$\frac{Q_{neiavn}}{Q_{iavn}}=\frac{n_{t_n}n(\varepsilon)\,\mathrm{N}^2\,q_{PTM}}{n_{t_r}\,\mathrm{N}^2\,q_{iavn}}=\frac{0,036*10*244^2*50}{0,1*244^2*14}\approx 12,857.$$

На основе проведенного численного решения модельной задачи можно сделать вывод, что с увеличением размеров расчетной сетки временные затраты для явной схемы продолжают существенно уменьшаться по отношению к временным затратам для неявных схем. Добавление в явную схему слагаемого второй разностной производной по времени с множителем τ^*, который есть величина порядка ht^2, превращает ее в трехслойную разностную схему, для устойчивости которой достаточно выполнения условия: $ht=O\left(1/N^{3/2}\right)$, что является менее жестким условием по сравнению с ограничением на временной шаг для явной нерегуляризованной схемы $ht=O\left(1/N^2\right)$ [22].Таким образом, явные регуляризованные схемы имеют преимущество по реальным временным затратам (10–14 раз и более) по сравнению с использовавшимися ранее неявными и нерегуляризованными явными схемами.

Численные эксперименты по осаждению взвеси и переформированию дна с использованием трехмерной модели гидродинамики. На основе разработанного комплекса для многопроцессорной вычислительной системы (МВС) был выполнен расчет последствий ущерба, наносимого рыбным популяциям в результате ремонтного черпания подходного судоходного канала к причалам Архангельского терминала. Дноуглубительные работы на подходном канале выполнялись самоотвозным землесосом типа ЗС-ТР 1300/2-2162; на акватории причалов терминала – грейферным земснарядом (плавкран). Производилось моделирование распространения взвешенных частиц в водной среде при выгрузке трюма самоотвозного землесоса в отвал. Использовались следующие исходные данные: глубина водоема – 10 м; объем загрузки – 741 м^3; скорость течения – 0,2 м/с; скорость осаждения – 2,042 мм/с; плотность грунта – 1600 кг/м^3; процентное содержание пылеватых частиц (d – характерный размер – меньше 0,05 мм) в песчаных грунтах – 26,83 %. Параметры расчетной области: длина – 3 км; ширина – 1,4 км; шаг по горизонтальной пространственной координате 20 м; шаг по вертикальной пространственной координате – 1 м; расчетный интервал – 2 часа. На рис. 3–6 приведены результаты численного моделирования, демонстрирующие изменение концентрации взвешенных частиц с течением времени. Концентрация взвешенных частиц показана палитрой. Расчетные интервалы составляли: 15 мин; 30 мин; 1 ч; 2 ч соответственно. Направление течения принималось совпадающим с осью OX.

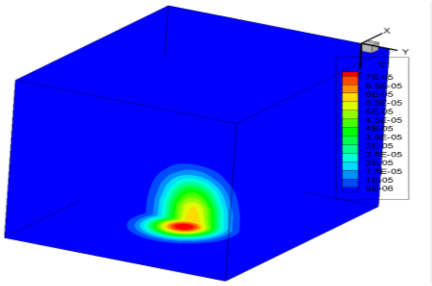

Рис. 3. Концентрация взвешенных частиц через 15 минут

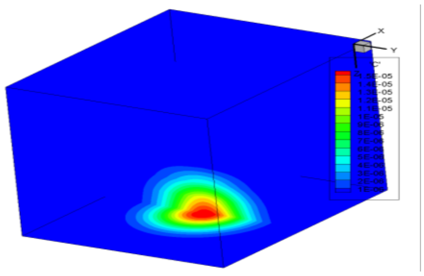

Рис. 4. Концентрация взвешенных частиц через 30 минут

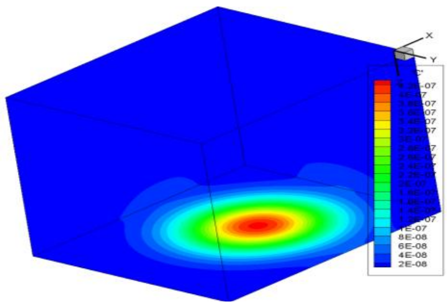

Рис. 5. Концентрация взвешенных частиц через 1 час

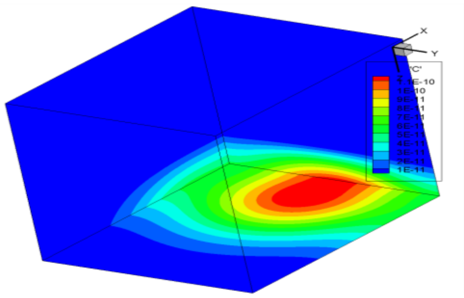

Рис. 6. Концентрация взвешенных частиц через 2 часа

В инженерных расчетах площадь заиления вычисляется по эмпирической формуле [24]

$$F = \frac{B_1 + B_2}{2L}, \; B_2 = B_1 + 2tg13°L, \qquad (6)$$

где B_1 – начальная ширина потока, равная длине зоны первоначального смещения, м; B_2 – ширина потока воды ниже по течению на расстоянии до расчетного створа Δx, м, L – расстояние до створа достаточного осаждения и разбавления взвеси – Δx, м.

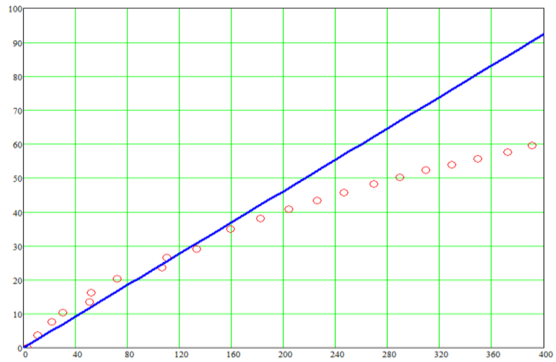

Рис. 7. Зависимости ширины зоны смешения от расстояния до створа

На рис. 7 приведены зависимости ширины зоны смешения, м (влияние диффузионного перемешивания на картины распределения взвешенных частиц) от расстояния до створа, м (влияние конвективного переноса), рассчитанные на основе разработанного программного комплекса (на рисунке показаны кружками) и на основе формулы (6) (показаны сплошной линией).

Из результатов численных экспериментов видно, что в случае расстояния до створа 150 м и менее можно принять гипотезу о том, что интенсивность диффузионного перемешивания зависит линейно от интенсивности конвективного переноса и составляет ~ 23,1 % (что соответствует тангенсу угла в 13°). При больших расстояниях преобладание конвективного переноса над диффузионными процессами усиливается.

Заключение. Построена пространственно-двумерная математическая модель транспорта наносов в мелководных водоемах, удовлетворяющая основным законам сохранения. Модель учитывает следующие физические параметры и процессы: пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна и функцию возвышения уровня, ветровые напряжения и трение о дно. Проведен анализ численного решения модельной задачи, показавший, что с увеличением количества узлов расчетной сетки временные затраты для явной схемы относительно временных затрат для неявной схемы существенно уменьшаются. Модификация явной схемы – введение разностной производной второго порядка с множителем-регуляризатором – позволяет существенно ослабить ограничения на допустимую величину шага по времени и добиться еще большего выигрыша по временным затратам по сравнению с неявными схемами и традиционными явными схемами. Явные регуляризованные схемы показали преимущество по реальным временным затратам (10–15 раз и более) по сравнению с использовавшимися ранее традиционными неявными и нерегуляризованными явными схемами (2–4 раза).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Леонтьев И.О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. – М.: Геос., 2001. – 272 с.
2. *Проценко Е.А.* Модель и алгоритмы решения задачи о транспорте наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 71-75.
3. *Проценко Е.А.* Двумерная конечно-разностная модель формирования наносов в прибрежной зоне водоема и ее программная реализация // Инженерный вестник Дона. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 23-31.
4. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A.* Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2014. – Vol. 6, Issue 4. – P. 351-363.
5. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. – 2014. – Т. 15. – С. 610-620.
6. *Ezer T., Mellor G.L.* Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton Ocean Model // Dynamics of Atmospheres and Oceans. – 2000. – Vol. 32. – P. 155-208.
7. *Дегтярева Е.Е., Проценко Е.А., Чистяков А.Е.* Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях // Инженерный вестник Дона. – 2012. – Т. 23, № 4-2. – С. 30.
8. *Дегтярева Е.Е., Чистяков А.Е.* Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 2 (127). – С. 112-118.
9. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С.* Математическое моделирование условий формирования заморов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 103-112.

10. *Сухинов А.И., Никитина А.В.* Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 62-73.
11. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А.* Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 4 (141). – С. 87-98.
12. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Alekseenko E. V.* Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2011. Vol. 3, Issue 5. – P. 562-574.
13. *Васильев В.С., Сухинов А.И.* Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 10. – С. 17-34.
14. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Timofeeva E. F., Shishenya A. V* Mathematical model for calculating coastal wave processes // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2013. – Vol. 5, Issue 2. – P. 122-129.
15. *Чистяков А.Е.* Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.
16. *Четверушкин Б.Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 33-52.
17. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V.* Error estimate for diffusion equations solved by schemes with weights // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2014. – Vol. 6, Issue 3. – P. 324-331.
18. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
19. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 532 с.
20. *Konovalov A.N.* The steepest descent method with an adaptive alternating-triangular preconditioner // Differential Equations. – 2004. – P. 1018-1028.
21. *Konovalov A.N.* To the Theory of the Alternating Triangle Iteration Method // Siberian Mathematical Journal. – 2002. – Vol. 43, Issue 3. – P. 439-457.
22. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E.* Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a non-self-adjoint operator // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2012. – Vol. 4, Issue 4. – P. 398-409.
23. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С 237-249.
24. Типовая технологическая схема добычи песка, гравия и песчано-гравийной смеси судоходных рек и других водоемов. – М.: Транспорт, 1980.

REFERENCES

1. *Leont'ev I.O.* Pribrezhnaya dinamika: volny, techeniya, potoki nanosov [Coastal dynamics: waves, currents, sediment flow]. Moscow: Geos., 2001, 272 p.
2. *Protsenko E.A.* Model' i algoritmy resheniya zadachi o transporte nanosov [Model and algorithms for solving the problem of sediment transport], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2009, No. 8 (97), pp. 71-75.
3. *Protsenko E.A.* Dvumernaya konechno-raznostnaya model' formirovaniya nanosov v pribrezhnoy zone vodoema i ee programmnaya realizatsiya [Two-dimensional finite-difference model of the formation of sediment in the coastal zone of the reservoir and its software implementation], *Inzhenernyy vestnik Dona* [Journal of engineering Don], 2010, Vol. 13, No. 3, pp. 23-31.
4. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A.* Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, Vol. 6, Issue 4, pp. 351-363.
5. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A.* Matematicheskoe modelirovanie transporta nanosov v pribrezhnykh vodnykh sistemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [Mathematical modeling of sediment transport in coastal aquatic systems on a multiprocessor computer system] *Vychislitel'nye metody i programmirovanie* [Computational methods and programming], 2014, Vol 15, pp. 610-620.
6. *Ezer T., Mellor G.L.* Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton Ocean Model, *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 2000, Vol. 32, pp. 155-208.

7. *Degtyareva E.E., Protsenko E.A., Chistyakov A.E.* Programmnaya realizatsiya trekhmernoy matematicheskoy modeli transporta vzvesi v melkovodnykh akvatoriyakh [A software implementation of a three-dimensional mathematical model of the transport of sediment in the shallow waters of the], *Inzhenernyy vestnik Dona* [Journal of engineering Don], 2012, Vol. 23, No. 4-2, pp. 30.
8. *Degtyareva E.E., Chistyakov A.E.* Modelirovanie transporta nanosov po dannym eksperimental'nykh issledovaniy v Azovskom more [Modeling sediment transport based on experimental studies in Azov sea], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, No. 2 (127), pp. 112-118.
9. *Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E., Semenov I.S.* Matematicheskoe modelirovanie usloviy formirovaniya zamorov v melkovodnykh vodoemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [Mathematical modeling of the formation of Zamora in shallow waters on a multiprocessor computer system], *Vychislitel'nye metody i programmirovanie* [Computational methods and programming], 2013, Vol. 14, pp. 103-112.
10. *Sukhinov A.I., Nikitina A.V.* Matematicheskoe modelirovanie i ekspeditsionnye issledovaniya kachestva vod v Azovskom more [Mathematical modelling and expeditional investigations of water quality in Azov sea], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2011, No. 8 (121), pp. 62-73.
11. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Fomenko N.A.* Metodika postroeniya raznostnykh skhem dlya zadachi diffuzii-konvektsii-reaktsii, uchityvayushchikh stepen' zapolnennosti kontrol'nykh yacheek [Method of construction difference scheme for problems of diffusion-convection-reaction, takes into the degree filling of the control volume] *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 4 (141), pp. 87-98.
12. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Alekseenko E. V.* Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2011, Vol. 3, Issue 5, pp. 562-574.
13. *Vasil'ev V.S., Sukhinov A.I.* Pretsizionnye dvumernye modeli melkikh vodoemov [Precision two-dimensional model of shallow pools], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2003, Vol. 15, No. 10, pp. 17-34.
14. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Timofeeva E. F., Shishenya A. V* Mathematical model for calculating coastal wave processes, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, Vol. 5, Issue 2, pp. 122-129.
15. *Chistyakov A.E.* Ob approksimatsii granichnykh usloviy trekhmernoy modeli dvizheniya vodnoy sredy [On approximation of the boundary conditions of the three-dimensional model of water environment], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2010, No. 6 (107), pp. 66-77.
16. *Chetverushkin B.N.* Predely detalizatsii i formulirovka modeley uravneniy sploshnykh sred [The limits of detail and formulation of the model equations of continuous media], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2012, Vol. 24, No. 11, pp. 33-52.
17. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Shishenya A. V.* Error estimate for diffusion equations solved by schemes with weights, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, Vol. 6, Issue 3, pp. 324-331.
18. *Samarskiy A.A.* Teoriya raznostnykh skhem [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1989, 432 p.
19. *Samarskiy A.A., Nikolaev E.S.* Metody resheniya setochnykh uravneniy [Methods for solving grid equations]. Moscow: Nauka, 1978, 532 p.
20. *Konovalov A.N.* The steepest descent method with an adaptive alternating-triangular preconditioner, *Differential Equations*, 2004, pp. 1018-1028.
21. *Konovalov A.N.* To the Theory of the Alternating Triangle Iteration Method, *Siberian Mathematical Journal*, 2002, Vol. 43, Issue 3, pp. 439-457.
22. *Sukhinov A. I., Chistyakov A. E.* Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a non-self-adjoint operator, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, Vol. 4, Issue 4, pp. 398-409.
23. *Chistyakov A.E.* Teoreticheskie otsenki uskoreniya i effektivnosti parallel'noy realizatsii PTM skoreyshego spuska [Speedup and efficiency estimation of parallel SSOR algorithm], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2010, No. 6 (107), pp 237-249.

24. Tipovaya tekhnologicheskaya skhema dobychi peska, graviya i peschano-graviynoy smesi sudokhodnykh rek i drugikh vodoemov [Typical technological scheme of production of sand, gravel and sand-gravel aggregate shipbuilding output of the rivers and other water bodies]. Moscow: Transport, 1980.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.А. Илюхин.

Сухинов Андрей Александрович – Южный федеральный университет; e-mail: andreysukhinov@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634315638; аспирант.

Чистяков Александр Евгеньевич – e-mail: cheese_05@mail.ru; тел.: 88634371606; к. ф.-м. н.; доцент.

Проценко Елена Анатольевна – Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ); e-mail: rab55555@rambler.ru; 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: 88634601258; к. ф.-м. н.; старший преподаватель.

Шретер Сергей Алексеевич – e-mail: sergshre@yandex.ru; тел.: 89885307372; старший преподаватель.

Sukhinov Andrey Alexandrovich – Southern Federal University; e-mail: andreysukhinov@gmail.com; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634315638; postgraduate student.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – e-mail: cheese_05@mail.ru; phone: +78634371606; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

Protsenko Elena Anatol'evna – Anton Chekhov Taganrog State Institute; e-mail: rab55555@ rambler.ru; 48, Iniciativnaya street, Taganrog, 347936, Russia; cand. of phis.-math. sc.; senior lecturer.

Shreter Sergei Alekseevich – e-mail: sergshre@yandex.ru; phone: +79885307372; senior lecturer.

УДК 519.6

А.В. Шишеня, А.И. Сухинов

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ И СГОННО-НАГОННЫХ ЯВЛЕНИЙ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ И ЕЁ ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

Рассматриваются математические модели гидродинамики мелководных водоемов со свободной поверхностью на основе классической системы уравнений Навье-Стокса и на основе уравнений движения с регуляризатором. Выполнена постановка уточненных граничных условий для обеих моделей, а для аппроксимации операторов производных по пространственным направлениям применен интегроинтерполяционный метод, учитывающий частичную заполненность ячеек расчетной сетки. Это позволяет повысить точность получаемых результатов, а также учитывать движение свободной поверхности и изменение береговой линии за счет сгонно-нагонных явлений. Уточненная постановка граничных условий особенно важна при моделировании мелководных водоемов, так как в этом случае близкое расположение горизонтальных границ оказывает значительное влияние на поля скорости и давления внутри расчетной области. Применение построенных математических моделей для предсказания неблагоприятных и опасных явлений в водных системах в режиме реального времени требует их эффективной параллельной реализации. Повышения эффективности параллельной реализации можно добиться путем использования явных схем при численном решении уравнений модели. Известно, что явные схемы имеют более жесткое ограничение на шаг по времени, чем явные, поэтому предлагается использовать