

15. Wei Lu, Bingxue Shi, Zhijian Li. A modified Hamming neural network with different thresholds and multi-valued weights, *Neural Networks, 1996. IEEE International Conference*, Vol. 2. Washington, DC, pp. 1012-1016.
16. Feng K., Hoberock L.L. An optimal scheduling of pick place operations of a robot-vision-tracking system by using back-propagation and Hamming networks, *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference*, Vol. 2. Nice. IEEE, pp. 1201-1206.
17. Venkatalakshmi K., MercyShalinie S. Classification of multispectral images using neuro-statistical classifier based on decision fusion and feature fusion, *Intelligent Sensing and Information Processing, 2004. Proceedings of International Conference, 2004. IEEE*, pp. 283-288.
18. Wei Lu, Bingxue Shi, Zhijian Li. A hybrid handwritten digits recognition system based on neural networks and fuzzy logic, *Systems, Man, and Cybernetics, 1996, IEEE International Conference*, Vol. 1. Beijing. IEEE, pp. 424-427.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.В. Тютиков.

**Клевцов Сергей Иванович** – Южный федеральный университет; e-mail: sergkmps@mail.ru; 347900, Таганрог, ул. Петровская, 81; тел.: 88634328025; к.т.н.; доцент.

**Klevtsov Sergey Ivanovich** – Southern Federal University; e-mail: sergkmps@mail.ru; 81, Petrovskaya street, Taganrog, 347900, Russia; phone: +78634328025; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 519.21

**А.М. Макаров**

**ВЗАИМОСВЯЗЬ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ  
СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В БАЗИСЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ  
МОЩНОСТИ В БАЗИСЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА  
(АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ВИНЕРА-ХИНЧИНА)**

*Математический аппарат интегрального преобразования Фурье привел к созданию теории и методов синтеза оптимальных алгоритмов обнаружения сигналов, оценки их параметров на фоне шумов. Появление в последние 20–30 лет сложных сигналов со скачками частоты, псевдослучайной перестройкой частоты,  $\delta$ -модуляцией, широкополосных частотно-модулированных сигналов привело к необходимости учета вида корреляционной функции шумов. Основной задачей современной теории обнаружения сигналов на фоне шумов является уменьшение степени свободы порогов решающих правил к неизвестным «мешающим» параметрам сигналов и шумов. Особенно трудноразрешимой задачей является создание новых методов эффективного обнаружения сигналов на фоне шумов с неизвестной корреляционной функцией. Рассмотрен математический аппарат интегрального преобразования Меллина для процессов, имеющих случайный характер; в этом базисе устанавливается взаимосвязь спектральной плотности мощности случайных процессов и корреляционной функции, аналог теоремы Винера–Хинчина. Таким образом, с точностью до постоянного множителя, спектральная плотность мощности шума после инварианта к виду исходной его корреляционной функции. На этой основе появляется возможность разработать математический аппарат синтеза оптимальных алгоритмов обнаружения сигналов на фоне шумов с их неизвестной корреляционной функцией.*

*Преобразование Меллина; автокорреляция; спектральная плотность мощностислучайного процесса; неизвестная корреляционная функция; обнаружение сигналов.*

A.M. Makarov

**INTERRELATION OF AUTOCORRELATED FUNCTION OF STATIONARY CASUAL PROCESSES IN BASIS OF THE FURYE TRANSFORMATION FROM THE SPECTRAL DENSITY OF POWER IN BASIS OF THE MELLIN TRANSFORMATION (ANALOG OF VINER-HINCHIN THEOREM)**

*The mathematical apparatus of the Fourier integral led to the creation of the theory and methods of synthesis of optimal algorithms for signal detection, estimation of their parameters from the background noise. The appearance in the last 20–30 years of complex signals with frequency hopping, a pseudo-random frequency hopping,  $\delta$ -modulated wideband frequency-modulated signals has led to the need to consider the form of the correlation function of noise. The main task of the modern theory of signal detection on the background noise is to reduce the degree of freedom of the thresholds of decision rules to the unknown "interfering" signal and noise parameters. Especially formidable task is to create new methods for efficient detection of signals from the background noise with unknown correlation function. In the article the mathematical formalism of the Mellin integral transformation processes with random; in this basis is established the relationship of power spectral density of random processes and the correlation function, the analogue of the Wiener–Khinchin. Thus, up to a constant factor, noise power spectral density of the invariant to the form after its initial correlation function. On this basis it is possible to develop a mathematical formalism of the synthesis of optimal algorithms for detecting signals from the background noise with their unknown correlation function.*

*Mellin's transformation; autocorrelation; the spectral power density of the random process; unknown correlation function; detection of signals.*

Математический аппарат интегрального преобразования Фурье (ИПФ) привел к созданию теории и методов синтеза оптимальных алгоритмов обнаружения сигналов, оценки их параметров на фоне шумов [1–10].

Действительно, спектр ИПФ  $k$ -той функции  $\xi^{(k)}(t)$ , где  $k=1,2,3,\dots,N$  равен

$$F_T^{(k)} = \int_{-T/2}^{T/2} \xi^{(k)} e^{-j2\pi f t} dt, \quad (1)$$

где  $T$  – длительность выборки  $k$ -ой функции  $\xi(t)$ ;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $f$  – текущая частота, значение которой лежит в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Функция, представляющая собой выборку из ансамбля стационарного процесса, спектрограммы  $F_T^k(f)$  носит случайный характер.

Практическую ценность (1) имеет лишь в среднем, т.е.

$S(f) = m[F_T^k(f)]$ , где  $m[\cdot]$  операция статистического усреднения по множеству  $k$ -реализаций случайного процесса.

$$S(f) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} m[\xi(t_1)\xi(t_2)] e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1 dt_2,$$

В результате получим соотношение между спектральной мощностью случайных процессов  $S(f)$  и корреляционной функцией  $R(\tau) = m[\xi(t_1 - t_2)]$ , которое носит название теоремы Винера–Хинчина [11–13]:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (3)$$

где  $\omega = 2\pi f$ .

В [11] достаточно подробно исследованы свойства зависимостей (2) и (3), которые положенные в основу разработки математического аппарата синтеза оптимальных алгоритмов обнаружения сигналов и оценки их параметров на фоне шумов [1, 2, 6, 7, 10, 11].

В фундаментальной работе [2] В. Котельниковым в 1946 году впервые синтезированы оптимальные алгоритмы обнаружения сигналов на фоне «белого» шума с гауссовским распределением.

В 50–60 гг. XX в. на практике использовались в основном узкополосные сигналы. Рассмотрение модели «белого» шума, как шума с равномерным энергетическим спектром, соответствовало реальной действительности.

Появление в последние 20–30 лет сложных сигналов: сигналов со скачками частоты, псевдослучайной перестройкой частоты,  $\delta$ -модуляцией, широкополосных частотно-модулированных сигналов привело к необходимости учета вида корреляционной функции (3) или соответствующему её спектральной плоскости мощности (2).

Анализ решающих правил и оптимальных алгоритмов обнаружения показывают, что в их основе лежит знание корреляционной функции шума. В [4, 10] переведен классический алгоритм обнаружения детерминированного сигнала на фоне гауссовской помехи.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{a}} \geq \text{Cu}(t), \quad (4)$$

где  $\mathbf{R}^{-1}$  – корреляционная матрица шума обратная к исходной:  $\mathbf{R} = m[\xi\xi^{(T)}]$ ;  $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  – детерминированный вектор-столбец, определяющий форму сигнала;  $\mathbf{T}$  – символ транспонирования;  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$  – вектор выборок шума;

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{S}} + \vec{\xi},$$

где  $\mathbf{S}$  – вектор выборок сигнала  $\mathbf{S}$ ;  $\text{Cu}(t)$  – порог решающего правила.

Из (4) непосредственно следует, что в основе оптимальных алгоритмов обнаружения положена корреляционная функция шума, т.е. требуется априорные сведения о спектральной плотности мощности помехи.

Основной задачей современной теории обнаружения сигналов на фоне помех является уменьшение степени свободы порогов решающих правил к неизвестным «мешающим» параметрам сигналов и шумов. Особенно трудноразрешимой задачей является создание новых методик эффективного обнаружения сигналов на фоне случайных шумов с неизвестной спектральной плотностью.

Наиболее полно рассмотрены вопросы преодоления априорной неопределенности в работах [3, 6, 5, 17], где отмечена неудовлетворительная степень решения задачи преодоления априорной неопределенности в виде КФ-шума.

Как показано в [18–21] решение задачи преодоления априорной неопределенности о корреляционной функции шума возможно в пространстве интегрированного преобразования Меллина (ИПМ):

$$M(S) = \int_0^\infty f(x)x^{S-1}dx, \quad (5)$$

где  $f(x)$  – исходный анализируемый процесс;  $S = \delta + ju$ ,  $\delta_1 \leq \delta < \delta_2$ ,  $u \in (-\infty, +\infty)$ ;  $\delta_1, \delta_2$  – радиус сходимости.

Обратное ИПМ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c+j\infty}^{c-j\infty} M(S)S^{-x}ds. \quad (6)$$

Выбор значения  $\delta$  исчерпывающе решен в работе [19]. В [18, 20] получено решение задачи о взаимосвязи корреляционной функции в общем ИПФ со спектральной плотностью мощности (СПМ). Результаты анализа говорят о слабой зависимости СПМ от исходной корреляционной функции. Трудность этого анализа состоит в том, что ядро полученного интегрального преобразования не определимо аналитически.

По определению корреляционной функции (КФ) равно

$$R(\tau) = M[\xi_1; \xi_2] \text{ при } m_1[\xi_1] = m_1[\xi_2] = 0 \quad (7)$$

$m[\xi_1, \xi_2] = m[\xi_2 - \xi_1]$ , т.е. КФ зависит от разности аргументов  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Но для пределов интегрирования в базисе ИПМ должно выполняться условие, с одной стороны,

$$\xi_2 - \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq \xi_1,$$

с другой стороны

$$1/\sqrt{x_1 x_2}, x_1 > 0, x_2 \geq 0, \text{ или } x_1 < 0, x_2 \leq 0,$$

но второй случай противоречит области определения ИПМ, т.е. остается лишь первый случай:

$$x_1 > 0, x_2 \geq 0,$$

тогда

$$R(\tau) = m[\xi_1; \xi_2] = B(\xi_1 + \xi_2), \quad (8)$$

т.е. КФ зависит от суммы  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Используя результаты [18] для спектральной мощности шума после ИПМ, запишем

$$P(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty B(X_1, X_2)(X_1 X_2)^{-1} X_1^S X_2^{S*} dx_1 dx_2, \quad (9)$$

где  $S^*$  – комплексно-сопряженная величина к  $S$ .

Сделаем замену переменных

$$X_1 + X_2 = \tau, X_1/X_2 = \beta, \delta = 1/2,$$

определим

$$X_1 = \frac{\beta\tau}{\beta+1}, X_2 = \frac{\tau}{\beta+1}, X_1/X_2 = \frac{\beta\tau^2}{(\beta+1)^2}$$

Модуль якобиана преобразования

$$|I| = \frac{\tau}{(\beta+1)^2},$$

тогда

$$P(u) = \int_0^\infty B(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{\beta^{ju-\frac{1}{2}}}{\beta+1} d\beta. \quad (10)$$

Рассмотрим внутренний интеграл (10).

$$\int_0^\infty \frac{\beta^{ju}}{\sqrt{\beta(\beta+1)}} d\beta = \int_0^\infty \frac{\cos(u \ln \beta)}{\sqrt{\beta(\beta+1)}} d\beta + j \int_0^\infty \frac{\sin(u \ln \beta)}{\sqrt{\beta(\beta+1)}} d\beta.$$

Можно показать, что интеграл мнимой части равен нулю. Для реальной части интеграла имеем:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(u \ln \beta)}{\sqrt{\beta(\beta+1)}} d\beta, \text{ введя замену переменных } u = \ln \beta, \text{ получим}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos uy}{e^{-y/2} + e^{y/2}} dy = \int_0^\infty \frac{\cos uy}{\text{ch} \frac{y}{2}} dy = \frac{\pi}{\text{ch}(\pi u)}. \quad (11)$$

Окончательно для спектральной плотности мощности шума после его ИПМ получим

$$P(u) = \int_0^\infty B(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{\cos uy}{\text{ch}(\frac{y}{2})} dy = \frac{\pi}{\text{ch}(\pi u)} \int_0^\infty B(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Из (12) следует, что значение интеграла представляет собой, по определению [11, 12], значение интеграла корреляции случайного стационарного процесса

$$\tau_k = \int_0^\infty B(\tau) d\tau,$$

тогда

$$P(u) = \frac{\sigma_{\tau_k}}{\text{ch} \pi u}, \quad (13)$$

где  $\sigma$  – среднеквадратичное значение.

Таким образом, с точностью до постоянного множителя, спектральная плотность мощности шума после ИПМ инвариантна к виду исходной его корреляционной функции (13). Это свойство может быть положено в основу синтеза оптимальных в базисе ИПМ алгоритмов обнаружения сигналов на фоне шумов с неизвестной априори корреляционной функцией.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Котельников В.А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. – М.: Советское радио, 1956. – 152 с.
2. *Шенон К.* Связь при наличии шума. В кн. Работы по теории информации и кибернетики. – М.: ИЛ, 1963.
3. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. – М.: Советское радио, 1972. – 744 с.
4. *Хелстром К.* Статистическая теория обнаружения сигналов. – М.: Иностранная литература, 1963. – 432 с.
5. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивание статистических сигналов. – М.: Советское радио, 1978. – 447 с.
6. *Репин В.Г. Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем. – М.: Советское радио, 1977. – 432 с.
7. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. В 3 кн. Кн. 2. – 2-е изд. перераб. и дополнена. – М.: Советское радио, 1975. – 392 с.
8. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. В 3 кн. Кн. 3. – М.: Советское радио, 1976. – 288 с.
9. *Акимов П.С., Евстратов Ф.Ф., Захаров С.И. и др.* Обнаружение радиосигналов / Под ред. А.А. Колосова. – М.: Радио и связь, 1989. – 288 с.
10. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
11. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – 2 изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
12. *Мидлтон В.* Введение в статистическую теорию связи. Т. 2. – М.: Советское радио, 1962. – 832 с.
13. *Френкс Л.* Теория сигналов: Пер с англ. / Под ред. Д.Е. Вакмана. – М.: Советское радио, 1974. – 344 с.
14. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: Гостекстиздат, 1948. – 480 с.
15. *Гельфанд И.И., Шилев Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматлит, 1959. – 470 с.
16. *Давенпорт В.В., Рут В.Л.* Введение в теорию случайных сигналов и шумов: Пер. с англ. / Под ред. Р.М. Добрушина. – М.: ИЛ, 1960. – 493 с.
17. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию. – М.: Советское радио, 1972. – 352 с.
18. *Макаров А.М.* Спектральное представление гармонических сигналов в базе интегрального преобразования Меллина // Управление и информационные технологии. Межвузовский сборник. – Пятигорск: КМВ, 2012. – С. 154-159.
19. *Макаров А.М., Дейнеко М.С.* Введение в теорию и приложения мультипликативных характеристик функций. – Таганрог: ТРТУ, 2002. – 76 с.
20. *Макаров А.М.* Применения интегрального преобразования Меллина в исследовании свойств гамма-функции // Материалы Международной молодежной научной конференции «Математическая функция и её приложения» (МФП-2012) в рамках федеральной целевой программы «Научные и научнопедагогические кадры информационной России на 2003-2013 годы» / Под ред. Санкина А.В. и Алтухова В.И. – Пятигорск: СКФУ, 2012-2013. – Т. 1. – С. 100-106.
21. *Гынянкин С.И., Гузенко О.Б.* Корреляционные свойства спектров Меллина случайных процессов // Радиотехника. – 1997. – № 4. – С. 26-28.

## REFERENCES

1. *Kotel'nikov V.A.* Teoriya potentsial'noy pomekhoustoychivosti [Theory of potential noise immunity]. Moscow: Sovetskoe radio, 1956, 152 p.
2. *Shanon K.* Svyaz' pri nalichii shuma [Communication in the presence of noise]. V kn. Raboty po teorii informatsii i kibernetiki [The book Works on information theory and Cybernetics]. Moscow: IL, 1963.
3. *Van Tris G.* Teoriya obnaruzheniya, otsenok i modulyatsii [The theory of detection, estimation, and modulation]. Vol. 1. Moscow: Sovetskoe radio, 1972, 744 p.
4. *Khelstrom K.* Statisticheskaya teoriya obnaruzheniya signalov [Statistical theory of detection signals]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1963, 432 p.

5. *Sosulin Yu.G.* Teoriya obnaruzheniya i otsenivanie statisticheskikh signalov [The theory of detection and estimation of statistical signals]. Moscow: Sovetskoe radio, 1978, 447 p.
6. *Repin V.G., Tartakovskiy G.P.* Statisticheskii sintez pri apriornoy neopredelennosti i adaptatsii informatsionnykh sistem [Statistical synthesis under a priori uncertainty and adaptation of information systems]. Moscow: Sovetskoe radio, 1977, 432 p.
7. *Levin B.R.* Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki [Theoretical foundations of statistical radio engineering]. V 3 kn. Kn. 2. 2<sup>nd</sup> ed. pererab. i dopolnena. Moscow: Sovetskoe radio, 1975, 392 p.
8. *Levin B.R.* Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki [Theoretical foundations of statistical radio engineering]. V 3 kn. Kn. 3. Moscow: Sovetskoe radio, 1976, 288 p.
9. *Akimov P.S., Evstratov F.F., Zakharov S.I. i dr.* Obnaruzhenie radiosignalov [The detection of radio signals]. Moscow: Radio i svyaz', 1989, 288 p.
10. *Levin B.R.* Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki [Theoretical foundations of statistical radio engineering]. 3<sup>rd</sup> ed. pererab. i dop. Moscow: Radio i svyaz', 1989, 656 p.
11. *Tikhonov V.I.* Statisticheskaya radiotekhnika [Statistical radio engineering]. 2<sup>nd</sup> ed. pererab. i dop. Moscow: Radio i svyaz', 1982, 624 p.
12. *Midlton V.* Vvedenie v statisticheskuyu teoriyu svyazi [Introduction to statistical communication theory]. Vol. 2. Moscow: Sovetskoe radio, 1962, 832 p.
13. *Frenks L.* Teoriya signalov [Theory of signals]: Per s angl., Pod red. D.E. Vakmana. Moscow: Sovetskoe radio, 1974, 344 p.
14. *Titchmarsh E.* Vvedenie v teoriyu integralov Fur'e [Introduction to the theory of Fourier integrals]. Moscow: Gostekstizdat, 1948, 480 p.
15. *Gel'fand I.I., Shilov G.E.* Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi [Generic functions and actions]. Moscow: Fizmatlit, 1959, 470 p.
16. *Davenport V.V., Rut V.L.* Vvedenie v teoriyu sluchaynykh signalov i shumov [Introduction to the theory of random signals and noise: Per. s angl., Pod red. R.M. Dobrushina. Moscow: IL, 1960, 493 p.
17. *Trakhtman A.M.* Vvedenie v obobshchennuyu spektral'nyuyu teoriyu [Introduction to generalized spectral theory]. Moscow: Sovetskoe radio, 1972, 352 p.
18. *Makarov A.M.* Spektral'noe predstavlenie garmonicheskikh signalov v bazise integral'nogo preobrazovaniya Mellina [Spectral representation of the harmonic signals in the basis of the Mellin integral transforms], *Upravlenie i informatsionnye tekhnologii. Mezhdunarodskiy sbornik* [Management and information technology. Interuniversity collection]. Pyatigorsk: KMV, 2012, pp. 154-159.
19. *Makarov A.M., Deyneko M.S.* Vvedenie v teoriyu i prilozheniya mul'tiplikativnykh kharakteristik funktsiy [Introduction to the theory and applications of multiplicative functions features]. Taganrog: TRTU, 2002, 76 p.
20. *Makarov A.M.* Primeneniya integral'nogo preobrazovaniya Mellina v issledovanii svoystv gamma-funktsii [Application of the Mellin integral transform in the study of the properties of gamma function], *Materialy Mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchnoy konferentsii «Matematicheskaya funktsiya i ee prilozheniya» (MFP-2012) v ramkakh federal'noy tselevoy programmy «Nauchnye i nauchopedagogicheskie kadry informatsionnoy Rossii na 2003-2013 gody»* [Proceedings of the International youth scientific conference "Mathematical function and its applications" (MFP-2012) in the framework of the Federal target program "Scientific and Scientific-pedagogical personnel information Russia 2003-2013"]. Pyatigorsk: SKFU, 2012-2013, Vol. 1, pp. 100-106.
21. *Tynyankin S.I., Guzenko O.B.* Korrelyatsionnye svoystva spektrov Mellina sluchaynykh protsessov [Correlation properties of the spectra Mellin random processes], *Radiotekhnika* [Radio engineering], 1997, No. 4, pp. 26-28.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор И.М. Першин.

**Макаров Анатолий Михайлович** – Северо-Кавказский федеральный университет, филиал в г. Пятигорске; e-mail:mellin\_22@mail.ru; г. Пятигорск, пр. 40 лет Октября, 56; тел.: +78793399844; кафедра комплексной защиты информации и стандартизации; д.т.н.; профессор.

**Makarov Anatoly Mikhailovich** – North-Caucasian Federal University, branch in the town of Pyatigorsk; e-mail:mellin\_22@mail.ru; 56, etc. 40 years of October, Pyatigorsk, Russia; phone: +78793399844; the department of complex information protection and standardization; dr. of eng. sc.; professor.