УДК 681.327

А.В. Боженюк, Е.М. Герасименко, И.Н. Розенберг

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ В НЕЧЕТКОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ГРАФЕ[*]*

Статья описывает метод нахождения потока минимальной стоимости в динамическом графе с учетом пропускных способностей дуг графа и стоимостей перевозок, представленных нечеткими числами. Особенность постановки задачи заключается в том, что учитывается нечеткий характер пропускных способностей дуг графа и стоимостей перевозок, что позволяет принимать более чувствительные к изменениям окружающей среды решения, а также в том, что принимается во внимание фактор времени, т.е. условие не мгновенного прохождения потока по дугам графа. Учитывается способность параметров графа меняться во времени, в частности зависимость пропускных способностей, стоимостей и параметров времени прохождения потока от момента отправления потока. Рассматриваемый алгоритм может быть использован для решения прикладных задач на сетях автомобильных, железных, воздушных и пр. дорог.

Динамический граф; поток минимальной стоимости; нечеткая пропускная способность; нечеткая стоимость.

A.V. Bozhenyuk, E.M. Gerasimenko, I.N. Rosenberg

MINIMUM COST FLOW DEFINING IN FUZZY DYNAMIC GRAPH

This article describes a method for minimum cost flow finding in a fuzzy dynamic graph with fuzzy arc capacities and values of transmission costs. This problem is relevant due to the fact that fuzzy nature of arc capacities and transmission costs is taken into account. It allows us to make decisions more sensitive to environmental changes. The time factor, i.e. the condition of non instant passing of flow along the arcs of the graph, is also taken into account. The ability of the graph's parameters change over time, in particular, arc capacities, transmission costs and transit times dependence on the time of flow departure is also considered. The described algorithm can be used for solving applied problems on the rail, air and other roads.

Dynamic graph; minimum cost flow; fuzzy arc capacity; fuzzy cost.

Введение. Одной из фундаментальных задач, возникающих при исследовании графов, является задача нахождения потока минимальной стоимости в графе. Данная задача широко освещалась в литературе авторами [1–3]. Суть данной задачи сводится к нахождению оптимального по затратам маршрута перевозки заданного количества единиц потока по дугам графа от источника к стоку. Но на практике такие параметры транспортной сети как пропускные способности дуг, а также стоимости перевозок не могут быть точно известны или измерены. На данные параметры влияют погодные условия, пробки на дорогах, ремонтные работы, колебания в ценах на бензин, следовательно, необходимо задавать данные параметры в нечетком виде [4, 5]. Тогда мы к приходим к постановке задачи нахождения потока минимальной стоимости в нечетких условиях [6]. Методы решения задачи нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети в нечетких условиях условно можно разделить на два класса. Первый класс представляет собой использование классических потоковых алгоритмов для определения потоков минимальной стоимости, которые вместо четких данных оперируют центральными значениями нечетких чисел, лишь в конце «размывая» их по определенным правилам

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты №11-01-00011 и №12-01-00032.

[6–7]. Второй класс задач представляет собой использование нечеткого линейного программирования, которое широко освещалось в литературе [8]. Авторы [9] рассматривают задачи «абсолютного» нечеткого ЛП. Данные задачи громоздки и могут не давать оптимального решения при определении потоков минимальной стоимости.

Но в задачах, описываемых выше, не учитывается фактор времени прохождения потока по дугам графа. В реальной жизни поток всегда затрачивает определенное время, чтобы добраться из одной вершины графа в другую. При этом такие параметры транспортной сети как пропускные способности и стоимости также могут меняться во времени, что позволяет прийти к понятию «динамического» графа в отличие от «стационарно-динамического», который принято рассматривать в литературе [10,11]. Задача нахождения потока минимальной стоимости в динамических графах в нечетких условиях практически не была освещена в литературе, следовательно, возникла необходимость разработки алгоритма, реализующего данную задачу.

Модель задачи. Постановка задачи нахождения потока минимальной стоимости в нечетком динамическом графе может быть сформулирована следующим образом:

$$Minimize \sum_{\theta=0}^{p} \sum_{(x_i,x_j)\in\tilde{A}} \tilde{c}_{ij} \times \tilde{\xi}_{ij}(\theta), \tag{1}$$

$$\sum_{\theta=0}^{p} \sum_{x_j\in X} [\xi_{sj}(\theta) - \xi_{js}(\theta - \tau_{js}(\theta))] - \tilde{\rho}(p) = \tilde{0}, \tag{2}$$

$$\sum_{x_j\in X} [\tilde{\xi}_{ij}(\theta) - \tilde{\xi}_{ji}(\theta - \tau_{ji}(\theta))] = \tilde{0},\ x_i \ne s,t;\ \theta \in T, \tag{3}$$

$$\sum_{\theta=0}^{p} \sum_{x_j\in X} [\xi_{tj}(\theta) - \xi_{jt}(\theta - \tau_{jt}(\theta))] + \tilde{\rho}(p) = \tilde{0}, \tag{4}$$

$$0 \le \tilde{\xi}_{ij}(\theta) \le \tilde{u}_{ij}(\theta), \forall (x_i, x_j) \in \tilde{A}, \theta \in T. \tag{5}$$

Выражение (1) означает, что необходимо найти минимальный маршрут перевозки заданного количества потока в транспортной сети за заданное количество моментов времени. Выражение (2) показывает, что заданный поток $\tilde{\rho}$ за p периодов времени равен потоку, выходящему из источника за p периодов времени $\sum_{\theta=0}^{p} \xi_{sj}(\theta)$. Выражение (4) показывает, что заданный поток $\tilde{\rho}$ за p периодов времени равен потоку, входящему в сток за p периодов времени $\sum_{\theta=0}^{p} \xi_{jt}(\theta - \tau_{jt})$. Количество потока $\sum_{\theta=0}^{p} \xi_{js}(\theta - \tau_{js})$, входящее в источник за p периодов времени, равно количеству потока, покидающему сток $\sum_{\theta=0}^{p} \xi_{tj}(\theta)$ за p периодов времени и равно нулю. В (3) утверждается, что для каждого узла x_i, кроме источника и стока, и каждого момента времени θ количество потока $\xi_{ji}(\theta - \tau_{ji})$, вошедшее в x_i в момент времени

$(\theta-\tau_{ji})$, равно числу единиц потока $\xi_{ij}(\theta)$, выходящему из x_i в момент θ. Неравенство (5) показывает, что потоки $\xi_{ij}(\theta)$ для всех моментов времени должны быть меньше пропускных способностей по соответствующим дугам.

Таким образом, необходимо найти минимальную стоимость перевозки заданного количества единиц потока в нечетком динамическом графе с учетом зависящих от момента отправления потока стоимостей, пропускных способностей и параметров времени прохождения потока по дугам графа. Представим формальный алгоритм решения данной задачи.

Алгоритм решения задачи. Этап 1. Перейти от заданного нечеткого динамического графа $\tilde{G}=(X,\tilde{A})$ к «растянутому во времени» на p интервалов нечеткому статическому графу $\tilde{G}_p=(X_p,\tilde{A}_p)$ путем «растягивания во времени» исходного динамического графа за заданное количество временных интервалов путем создания отдельной копии каждой вершины $x_i \in X$ в каждый рассматриваемый момент времени $\theta \in T$. Пусть $\tilde{G}_p=(X_p,\tilde{A}_p)$ представляет собой «растянутый во времени» граф исходного динамического графа. Множество вершин X_p графа $\tilde{G}_p$ задается как $X_p=\{(x_i,\theta):(x_i,\theta)\in X\times T\}$. Множество дуг $\tilde{A}_p$ состоит из дуг, идущих из каждой пары «вершина-время» $(x_i,\theta)\in X_p$ в каждую пару «вершина время», вида $(x_j,\ \theta+\tau_{ij}(\theta))$, где $x_j\in\Gamma(x_i)$ и $\theta+\tau_{ij}(\theta)\le p$. Пропускные способности $\tilde{u}(x_i,x_j,\theta,\theta+\tau_{ij}(\theta))$ дуг, соединяющие (x_i,θ) с $(x_j,\ \theta+\tau_{ij}(\theta))$ равны $\tilde{u}_{ij}(\theta)$,, стоимость перевозки $\tilde{c}(x_i,x_j,\theta,\theta+\tau_{ij}(\theta))$ единицы потока по дуге, соединяющей пару «вершина-время» (x_i,θ) с $(x_j,\ \theta+\tau_{ij}(\theta))$, равна $\tilde{c}_{ij}(\theta)$.

Необходимо вычислить заданное количество единиц потока, имеющее минимальную стоимость, вытекающее из группы источников $s_0..s_p$ во все моменты времени и втекающих в группу стоков $t_0..t_p$ во все моменты времени не позднее момента p. Для этого вводим искусственный источник s' и сток t' и соединяем s' дугами с каждым истинным источником, а t' с каждым истинным стоком. Фиктивные дуги, идущие от искусственных вершин, имеют бесконечную пропускную способность и нулевую стоимость.

Этап 2. Строим нечеткую остаточную сеть $\tilde{G}_p^{\mu}$ для «растянутого во времени графа» $\tilde{G}_p$ в зависимости от величин, идущих по дугам графа потоков. Нечеткая остаточная сеть $\tilde{G}_p^{\mu}=(X_p^{\mu},\ \tilde{A}_p^{\mu})$ строится по «растянутой во времени» сети $\tilde{G}_p$ в зависимости от величин потоков $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta=\vartheta+\tau_{ij}(\vartheta))$, идущих по дугам последней, следующим образом: каждая дуга в остаточной нечеткой сети $\tilde{G}_p^{\mu}$, соединяющая пару «вершина-время» (x_i^{μ},ϑ) с парой «вершина-время» (x_j^{μ},θ), по которой поток $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$ отправляется в момент времени $\vartheta\in T$ имеет нечеткую остаточную пропускную способность $\tilde{u}^{\mu}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)=\tilde{u}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)-\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$, стоимость $\tilde{c}^{\mu}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)=\tilde{c}(x_i,x_j\ \vartheta,\theta)$ с временем прохождения

$\tau^{\mu}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)=\tau(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$ и обратную дугу, соединяющую (x_j^{μ},θ) с (x_i^{μ},ϑ) с остаточной пропускной способностью $\tilde{u}^{\mu}(x_j,x_i,\theta,\vartheta)=\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$, стоимостью $\tilde{c}^{\mu}(x_j,x_i,\theta,\vartheta)=-\tilde{c}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$ и временем прохождения потока по данной дуге $\tau^{\mu}(x_j,x_i,\theta,\vartheta)=-\tau(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$. Изначально остаточная сеть совпадает с «растянутым во времени» статическим графом (в силу равенства дуговых потоков равен нулю).

Этап 3. Ищем путь $\tilde{P}_p^{\mu}$ минимальной стоимости по алгоритму Форда из искусственного источника s' в искусственный сток t' в построенной нечеткой остаточной сети, начиная с нулевых значений потоков.

Этап 4. Пускаем по найденному пути максимальное количество единиц потока в зависимости от ребра в остаточной сети с минимальной остаточной пропускной способностью $\tilde{\delta}_p^{\mu}=\min\,[\tilde{u}^{\mu}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)],\ (x_i,x_j)\in\tilde{P}_p^{\mu}$.

Этап 5. Обновляем значения потоков в графе $\tilde{G}_p$: для дуг, соединяющих пару «вершина-время» (x_i^{μ},θ) с (x_j^{μ},ϑ) в $\tilde{G}_p^{\mu}$ с неположительной модифицированной стоимостью $\tilde{c}^{\mu}(x_i,x_j,\theta,\vartheta)\le 0,$ изменяем поток $\tilde{\xi}(x_j,x_i,\vartheta,\theta)$ по соответствующим дугам, идущим из (x_j,ϑ) в (x_i,θ), из $\tilde{G}_p$ с $\tilde{\xi}(x_j,x_i,\vartheta,\theta)$ на $\tilde{\xi}(x_j,x_i,\vartheta,\theta)-\tilde{\delta}_p^{\mu}$. Для дуг, соединяющих пару «вершина-время» (x_i^{μ},ϑ) с (x_j^{μ},θ) в $\tilde{G}_p^{\mu}$ с неотрицательной модифицированной стоимостью $\tilde{c}^{\mu}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)\ge 0,$ изменяем поток $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$ по дугам, идущим из (x_i,ϑ) в (x_j,θ) из $\tilde{G}_p$ с $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$ на $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\ \vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}$.

Этап 6 (I). Если значение потока $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times\tilde{P}_p^{\mu}$ минимальной стоимости $\tilde{c}(\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times P_p^{\mu})$ из фиктивного источника в фиктивный сток меньше заданного потока $\tilde{\rho}(p)$ в графе $\tilde{G}$, меняем $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)$ на $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times\tilde{P}_p^{\mu}$ и переходим к **этапу 2.**

(II) Если значение потока $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times\tilde{P}_p^{\mu}$ минимальной стоимости $\tilde{c}(\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times P_p^{\mu})$ из фиктивного источника в фиктивный сток в $\tilde{G}_p$ равно заданному значению потока $\tilde{\rho}(p)$ за p интервалов времени, следовательно, найден заданный поток минимальной стоимости в $\tilde{G}_p$ и переходим к **этапу 7**.

(III) Если значение потока $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times\tilde{P}_p^{\mu}=\tilde{\omega}(p)$ минимальной стоимости $\tilde{c}(\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times P_p^{\mu})$, что больше чем $\tilde{\rho}$, но меньше $\tilde{\nu}$, то требуемым потоком минимальной стоимости представляет собой $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+(\tilde{\delta}_p^{\mu}-\tilde{\omega}(p)+\tilde{\rho}(p))\times P_p^{\mu}$ минимальной стоимости $\tilde{c}(\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+(\tilde{\delta}_p^{\mu}-\tilde{\omega}(p)+\tilde{\rho}(p))\times P_p^{\mu})$ и переходим к **этапу 7.**

Этап 7. Если найдено заданное значение потока $\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times\tilde{P}_p^{\mu}=\tilde{\rho}(p)$ минимальной стоимости $\tilde{c}(\tilde{\xi}(x_i,x_j,\vartheta,\theta)+\tilde{\delta}_p^{\mu}\times P_p^{\mu})$ в графе $\tilde{G}_p$ из фиктивного источника в фиктивный сток, определяемое множеством путей $\tilde{P}_p^{\mu}$, переходим к первоначальному динамическому графу $\tilde{G}$ следующим образом: отбрасываем искусственные вершины и дуги, соединяющее их с другими вершинами.

Заключение. Рассматриваемый в статье алгоритм нахождения потока минимальной стоимости в нечетком динамическом графе позволяет решать широкий круг задач, возникающих на сетях автомобильных, железных и др. видах дорог, в частности, нахождения оптимального маршрута перевозки заданного количества единиц потока. Актуальность алгоритма в учете нечеткости, присущей параметрам транспортной сети, а также динамической структуры рассматриваемых сетей дорог.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
2. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
3. *Филипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 276 с.
4. *Беляков С.Л., Розенберг И.Н.* Интеллектуальные геоинформационные системы // Железнодорожный транспорт. – 2011. – № 4. – С. 32-37.
5. *Беляков С.Л.* Нечеткие знания и вывод в геоинформационной системе // Информационные технологии. – 2001. – № 12. – С. 16-21.
6. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* The Methods of Maximum Flow and Minimum Cost Flow Finding in Fuzzy Network. In: Ignatov, D., Kuznetsov, S., Poelmans, J. (Eds.) Concept Discovery in Unstructured Data Workshop (CDUD 2012) co-located with the 10th International Conference on Formal Concept Analysis (ICFCA 2012) May 2012, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium 2012. – P. 1-12.
7. *Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. – М.: Энергоатомиздат, 1991.
8. *Ganesan K., Veeramani P.* Fuzzy Linear Programs with Trapezoidal Fuzzy Numbers // Ann Oper Res. – 2006. – P. 305-315.
9. *Kumar A., Kaur J., Singh P.* Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints // International Journal of Mathematical and Computer Sciences 6:1. – 2010. – P. 37-41.
10. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* Algorithm of Maximum Dynamic Flow Finding in a Fuzzy Transportation Network. In: Proceedings of East West Fuzzy Colloquium 2012 19th Zittau Fuzzy Colloquium, September 5–7. – P. 125-132.
11. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* The Task of Minimum Cost Flow Finding in Transportation Networks in Fuzzy Conditions // C. Kahraman, E.E. Kerre, F.T. Bozbura (Eds.): World Scientific Proceeding Series on Computer Engineering and Information Science – Vol.7. / Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making. Proceeding of the 10th International FLINS Conference, World Scientific. – 2012. – P. 354-359.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Е.А. Башков.

Боженюк Александр Витальевич – Научно-технический центр «Информационные технологии» федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: avb002@yandex.ru; 347922, г. Таганрог, Октябрьская пл., 4; тел.: 89198799621; д.т.н.; профессор.

Герасименко Евгения Михайловна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: e.rogushina@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: +79885315343; м.н.с.

Розенберг Игорь Наумович – ОАО «Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт инженеров железнодорожного транспорта» (НИИАС); e-mail: I.kudreyko@gismps.ru; 109029, Москва, ул. Нижегородская, 27, стр. 1; тел.: 84959677701; д.т.н.; зам. генерального директора.

Bozhenyuk Alexander Vitalievich – Scientific and Technical Center «Information Technologies» of Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education «Southern Federal University»; e-mail: avb002@yandex.ru; 4, Oktyabrskaya Square, Taganrog, 347922, Russia; phone: +79198799621; dr. of eng. sc.; professor.

Gerasimenko Evgeniya Michailovna – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"; e-mail: e.rogushina@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: + 79885315343; junior scientific researcher.

Rozenberg Igor Naymovich – Public corporation "Research and development institute of railway engineers"; e-mail: I.kudreyko@gismps.ru; 27/1, Nizhegorodskaya, Moscow, 109029, Russia; phone: +74959677701; dr. of eng. sc.; deputy director.

УДК 681.3.06: 681.323 (519.6)

Я.Е. Ромм, А.С. Дзюба

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РУКОПИСНЫХ СИМВОЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПОДСТАНОВКИ ИНДЕКСОВ ПРИ СОРТИРОВКЕ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ

Представлен метод распознавания рукописных символов на основе подстановки индексов при сортировке полярных координат точек изображения. Дан алгоритм нахождения признаков рукописного символа с использованием трехкратного рекурсивного прореживания всех точек изображения посредством идентификации экстремальных элементов координат на основе сортировки. Описана классификация и целочисленная идентификация рукописных символов с использованием фильтрации и экстремальных признаков. Согласно программному эксперименту различимы все рукописные символы из алфавита русского языка и почерк. Представлены алгоритмы и результаты программного экспериментов.

Распознавание рукописных символов; сортировка подсчетом; подстановка; целочисленные идентификаторы; экстремумы полярных координат изображения.

Ya.E. Romm, A.S. Dzuba

IDENTIFICATION OF HANDWRITTEN SYMBOLS WITH USING SUBSTITUTION OF INDEXES WHEN SORTING POLAR COORDINATES

There was presented a method for recognition of handwritten symbols that based on the substitution indexes when sorting the polar coordinates of pixels. Proposed an algorithm to finding signs of handwritten symbols. It achieved by decimation of all image points with using triple recursion. There were described the classification and integers identificators of handwriting symbols using filtration and extreme signs. According to the program's experiment, handwritten symbols from the Russian alphabet and handwriting were distinct. The algorithm and the results of program's experiments are presented as well.

Recognition of handwritten symbols; the sorting by counting; substitution; integers identificators; extremes of polar coordinate of image.

Постановка вопроса. Выбраны четыре образца каждого из рукописных символов русского алфавита, три из которых написаны одним человеком, а четвертый – другим. Наряду с тем рассматриваются символы шрифтов ms windows, сходные по написанию с рукописными символами. Все образцы представлены в растровом изображении, при этом образцы одного класса сходны между собой, но не идентичны. Цвет написания каждого рукописного символа темный, фон – светлый. Ставится задача классификации, распознавания и компьютерной идентификации