

УДК 681.518.54:519.246

А.П. Самойленко, Е.Б. Горбунова

**ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ МОДЕЛЕЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО ВЫБОРКАМ ДАННЫХ
КРИТИЧЕСКИ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА**

Изложены результаты исследования полиномиальной интерполяции как инструмента при синтезе моделей технологических объектов в условиях значительной априорной неопределенности. Осуществлена количественная оценка методов интерполяции для ряда известных законов распределения плотности вероятностей: нормального, экспоненциального и закона Вейбулла. При этом были исследованы следующие методы интерполяции: кусочно-линейная, параболическая, интерполяция многочленами Лагранжа, а также интерполяция сплайн-функциями. Показано, что результаты интерполяции значительно зависят от степени интерполирующего полинома и мало зависят от вида закона распределения вероятностей. При степени полинома не выше третьей практически во всех случаях проверка гипотезы на согласие исходного и получаемого законов распределения плотностей вероятностей интервалов дает положительные результаты, однако при параболической и кусочно-линейной интерполяции результат в значительной степени зависит от количества узлов интерполяции. Наилучшее совпадение законов имеет место при интерполяции кубическими сплайн-функциями.

Интерполяция эмпирических данных; диагностика; надежность; кусочно-линейная интерполяция; параболическая интерполяция; полиномы Лагранжа; сплайн-функции.

A.P. Samoilenko, E.B. Gorbunova

**POLYNOMIAL INTERPOLATION AS AN INSTRUMENT
OF TECHNOLOGICAL OBJECTS' MODELS SYNTHESIS ON A BASE
OF CRITICALLY LIMITED DATA SAMPLES**

In the article some results of a research of polynomial interpolation as an instrument of technological objects' models synthesis in a condition of a considerable prior uncertainty are given. A quantitative evaluation of interpolation technique is performed for the following probability distribution laws: normal, exponential and Weibull law. The following interpolation methods were researched: straight-line interpolation; parabolic interpolation; Lagrangian polynomial interpolation; polynomial spline interpolation. It is shown that the results of the interpolation greatly depend on the degree of the polynomial interpolation and slightly depend on the form of the probability distribution law. When the degree of the polynomial is not higher than the third in almost all cases, the verification of the hypothesis on the original law and the resulting distribution of the laws of probability densities intervals yields positive results, but with a parabolic and a straight-line interpolation result largely depends on the number of interpolation points. At the same time the best coincidence of laws takes place with cubic spline-functions interpolation.

Interpolation of empirical data; diagnostics; reliability; straight-line interpolation; parabolic interpolation; Lagrangian polynomial; polynomial spline.

Введение. Системные исследования проблемы эффективного контроля и диагностики состояния сложных технологических объектов (ТО) являются чрезвычайно актуальными на современном уровне развития техники, поскольку значительный рост сложности вновь создаваемого оборудования и эксплуатация его в условиях напряженного режима функционирования выдвигают качественно новые требования к методам контроля и диагностики. Важность решения указанной проблемы, к сожалению, многократно подтверждается участвовавшими случаями технических и техногенных аварий с катастрофическими последствиями как для самого технологического процесса производства, так и для окружающей среды и обслуживающего персонала. Причиной этого чаще всего является элементарная

неприспособленность эксплуатируемого устаревшего и вновь создаваемого оборудования к диагностическому контролю, отсутствие средств контроля технического состояния. Практика эксплуатации различных ТО показывает, что при отсутствии специальных средств поддержки функционирования и контроля, основная часть времени восстановления затрачивается на поиск и локализацию отказов, увеличивая тем самым затраты на ремонт и обслуживание. С другой стороны, используемые в ряде производств традиционные методы и средства функционального контроля и диагностики ТО не всегда удовлетворяют современным требованиям по надежности и обеспечению безопасности эксплуатации оборудования.

Системные исследования сложных ТО как многокачественных открытых систем позволяют на глубинном уровне выявить их характерные особенности: малоинерционность, выражающаяся в быстрой смене состояний в нештатных режимах функционирования; наличие разнообразных режимов функционирования; наличие множества параметров ТО различной диагностической значимости, значения которых наряду со случайными изменениями внутри заданных допусков, имеют тенденцию к случайным выбросам значений за их пределы; многозначность функций элементов ТО во внутрисистемных отношениях; неполнота и неточность информации о происходящих в ТО процессах, а также наличие значительной априорной неопределенности в результате действия внешних неконтролируемых или неизвестных случайных факторов. Примерами рассматриваемого класса ТО могут служить различные энергопреобразователи: дизельные судовые двигатели, турбовинтовые авиационные двигатели, паросиловые установки, энергоблоки атомных электростанций, радиоэлектронное оборудование различного назначения.

Поскольку сложные ТО функционируют в стационарных и нестационарных режимах при множественном воздействии неконтролируемых и трудноучитываемых, а зачастую и неизвестных факторов, то наиболее информативным их эмпирическим описанием представляются статистические данные о выбросах контролируемых параметров за допусковые зоны, предшествующие деградационным изменениям, нарушающим нормальное функционирование ТО. Динамика протекания процессов такова, что длительность пребывания ТО в нештатных режимах кратковременна и отражается ограниченным объемом данных (не более 10 значений выбросов), на основе которых необходима идентификация состояния ТО и принятие адекватного решения по его управлению в условиях значительной неопределенности. Однако известные подходы, основанные на требованиях наличия достаточно большого объема статистических данных, минимизации неопределенностей, в принципе не позволяют разрешить противоречия между адекватностью получаемой статистической модели и количеством имеющейся информации и, кроме того, не учитывают возможности того, что реальные состояния ТО могут быть неизоморфны значениям контролируемых параметров.

Таким образом, задача синтеза моделей сложных ТО для разработки и исследования методов статистической диагностики представляется актуальной как в научном, так и в прикладном плане.

Следует отметить, что ограниченность объема доступных для анализа данных безусловно ограничивает достоверность эмпирических моделей контролируемого объекта. В этой связи возникает идея параллельного использования нескольких подходов к синтезу модели ТО. В работах [5–7] изложены принципы построения статистического анализатора на базе совместного использования методов аддитивной аппроксимации и имитационного моделирования [1]. Достоверность анализа статистических данных анализатором может быть увеличена с применением полиномиальной интерполяции для построения случайного процесса по выборочным данным значимых параметров ТО. Такой интегральный метод обработки позволит адекватно выборке данных обоснованно выбрать соответствующую модель.

Постановка задачи. Пусть по данным эксплуатации ряда блоков ТО известна совокупность интервалов времени τ_{ij} наработки конкретных блоков системы до отказа. Эти интервалы характеризуют уровень безотказности изделий и являются функцией суммарной наработки T_n этих изделий в процессе эксплуатации:

$$\tau_{ij} = F(T_n), \quad (1)$$

где i – индекс, соответствующий одному из статистически однородных блоков, j – индекс, соответствующий номеру отказа конкретного блока.

Известна также реализация для заданного блока РЭО, начиная с момента ввода его в эксплуатацию ($T_n = 0$) и до последнего зафиксированного отказа ($T_n = T_{отк}^i$).

Необходимо по совокупности дискретных значений τ_{ij} получить эмпирический случайный процесс изменения уровня безотказности для ансамбля статистически однородных блоков РЭО $\tau_{ij} = f(T_n)$. Требуется определить вероятностные характеристики текущей наработки $T_n = T_{тек}^i$ заданного блока.

Построение эмпирического случайного процесса по выборочным данным. Очевидно, зависимость (1) является непрерывной функцией дискретного аргумента. При оценке показателей надежности РЭО для произвольного текущего момента времени $T_{тек}^i$ на оси T_n возможна ситуация, когда момент времени $T_{тек}^i$ не совпадет с моментом отказа $T_{отк}$ ни одного из блоков. В этом случае функция (1) будет не определена. При решении задачи оценки надежности конкретных блоков необходима привязка статистических данных к моменту оценивания $T_{тек}^i$, что представляется возможным только через переопределение функции (1) путем интерполяции. Отметим, что интерполяции дискретной функции (1) можно дать физическую интерпретацию как изменению уровня безотказности РЭО в процессе эксплуатации.

Интерполирующая функция должна обладать следующими свойствами:

- ◆ обеспечивать вычисление приведенных значений τ для любых значений времени суммарной наработки $T_{тек}^i$;
- ◆ давать устойчивые результаты при введении новых данных об отказах;
- ◆ должна быть гладкой и проходить через все точки отказов в координатах (τ_{ij}, T_n) , принадлежащие конкретному блоку изделия РЭО.

При условии, если случайные величины наработки на отказ являются выборкой из генеральной совокупности с известной функцией распределения плотностей вероятностей, интерполирующая функция должна давать для сечений $T_n = \text{const}$ набор приведенных интервалов $\tau_{пр}$, имеющих плотность распределения вероятностей того же вида.

Общая схема интерполяции эмпирических данных приведена на рис. 1, где точки отказов A_j ($j = 1, 2, \dots, m$) с координатами $(\tau_{ij}, T_{отк.j})$ принадлежат конкретному блоку изделия РЭО и являются в системе координат (τ, T_n) узлами интерполяции.

Аналогичную интерполяцию осуществляют для каждого j -го ($j=1, 2, 3, \dots, N$) однотипного блока, потоки отказов которых образуют свою дискретную функцию вида $\tau_{ij} = F(T_n)$.

Выбор конкретного метода интерполяции зависит от того, в какой мере интерполирующая функция обладает перечисленными выше свойствами. В частности, свойство 4 позволяет ввести количественную меру соответствия интерполирующей функции решаемой задаче. При этом лучшей будет та интерполяция, которая при использовании критерия фиксированной мощности и одинаковых уровнях значимости гипотезы дает более высокую степень соответствия полученного закона распределения вероятностей исходному.

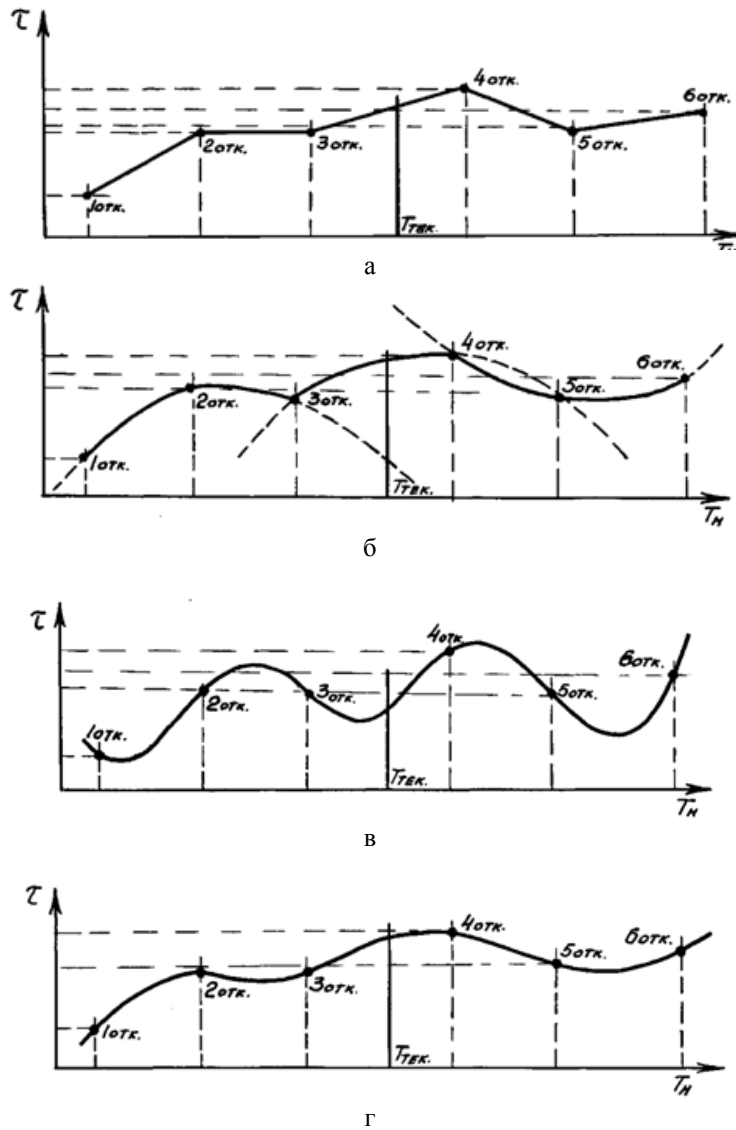


Рис. 1. Интерполяция эмпирических данных: а – кусочно-линейная интерполяция; б – параболическая интерполяция; в – интерполяция многочленами Лагранжа; г – интерполяция сплайн-функциями

Количественная оценка методов интерполяции осуществлялась для некоторых известных законов распределения вероятностей случайных наработок на отказ:

- ◆ нормального с параметрами $M(\tau) = 500$ ч, $\sigma(\tau) = 100$ ч;
- ◆ экспоненциального с параметром $M(\tau) = 500$ ч.;
- ◆ Вейбулла с параметрами $C = 100$ ч, $b = 2$.

Исходные массивы случайных величин τ_i с указанными законами распределения плотностей вероятностей были получены на ЭВМ с использованием стандартных программ. Объемы выборок составляют по 600 значений случайной величины τ_i [4].

Каждая выборка случайных величин τ_i , полученная на ЭВМ, была проверена на принадлежность к генеральной совокупности, закон распределения плотностей вероятностей которой априорно известен (задан по условию моделирования). Результаты проверки гипотезы при уровне значимости α критерия Пирсона представлены в табл. 1 и показали хорошее согласие опытного распределения с теоретическим.

Для каждого закона распределения из исходного массива выбирались последовательности из $m = 6$ значений случайной величины, которые в координатах (τ, T_H) давали точки отказов для ансамбля однотипных блоков:

$$\left. \begin{aligned} &A_{1,1}(\tau_{1,1}; \tau_{1,1}); A_{1,2}(\tau_{1,2}; \tau_{1,1} + \tau_{1,2}); \dots; A_{1,j}(\tau_{1,j}; \sum_{j=1}^m \tau_{1,j}) \\ &A_{2,1}(\tau_{2,1}; \tau_{2,1}); A_{1,2}(\tau_{2,2}; \tau_{2,1} + \tau_{2,2}); \dots; A_{2,j}(\tau_{2,j}; \sum_{j=1}^m \tau_{2,j}) \\ &\dots \\ &A_{j,1}(\tau_{j,1}; \tau_{j,1}); A_{j,2}(\tau_{j,2}; \tau_{j,1} + \tau_{j,2}); \dots; A_{j,j}(\tau_{j,j}; \sum_{j=1}^m \tau_{j,j}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$ – количество реализаций для однотипных блоков, $N = 60$; $j = 1, 2, \dots, m$ – количество отказов для каждого блока, $m = 6$.

Таблица 1

**Расчетные значения статистики критерия Пирсона
($\alpha=0,1, k=s-1, s=1+3, 32 \lg N = 10$)**

Статистика χ^2	Экспоненциальный закон	Нормальный закон	Закон Вейбулла
Критическое значение $\chi_{k,\alpha}^2$	14,68	14,68	14,68
Расчетное значение $\chi_{набл}^2$	5,728	4,107	5,913

Были исследованы следующие методы интерполяции сеточных функций, заданных в дискретном ряду точек:

- ◆ кусочно-линейная интерполяция (рис. 1,а);
- ◆ параболическая интерполяция (рис. 1,б);
- ◆ интерполяция многочленами Лагранжа (рис. 1,в);
- ◆ интерполяция сплайн-функциями (рис. 1,г).

При фиксированных значениях T_{mek} (рис. 1) указанными методами интерполяции были получены выборки значений приведенных интервалов $\tau_{пр}$ объемом $N = 60$. Число узлов интерполяции (количество отказов) менялось от $m = 3$ до $m = 6$. Для каждой выборки вычислялось значение статистики критерия согласия Пирсона. В результате исследования было выявлено, что расчетное значение статистики $\chi_{набл}^2$ слабо зависит от типа закона распределения случайных величин τ и от значения T_{mek} , при котором осуществлялась выборка интервалов $\tau_{пр}$, в то время как зависимость от метода интерполяции и от количества узлов интерполяции (число отказов) носит ярко выраженный характер.

На рис. 2–5 представлены графики зависимости критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ от количества узлов интерполяции m для исследуемых методов интерполяции (рис. 1) при фиксированном значении $T_{\text{тек}} = 1000$ ч.

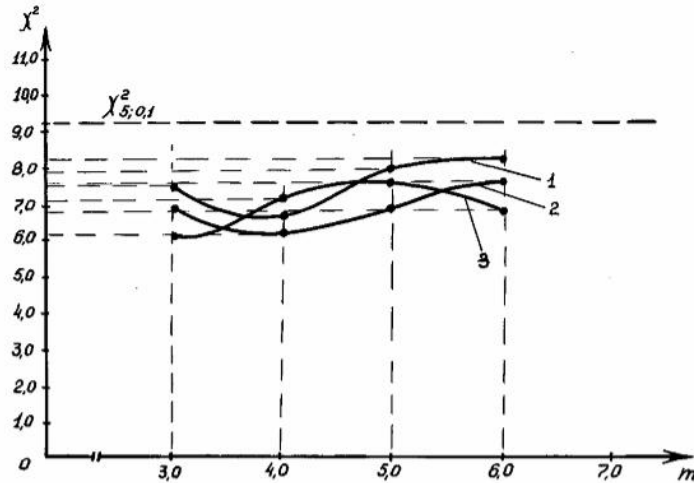


Рис. 2. Графики зависимости для экспоненциального (1), нормального (2) и вейбулова (3) законов для кусочно-линейной интерполяции

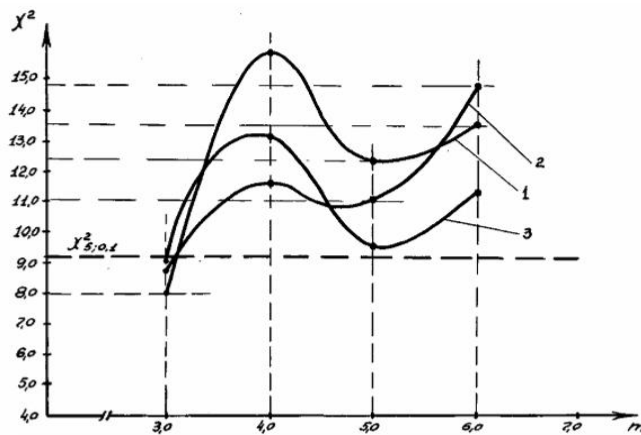


Рис. 3. Графики зависимости для экспоненциального (1), нормального (2) и вейбулова (3) законов для параболической интерполяции

Сравнение и анализ графиков позволяет сделать следующие выводы.

Кусочно-линейная интерполяция и интерполяция сплайн-функциями дают устойчивые значения критерия согласия $\chi^2_{\text{набл}}$ при изменении числа узлов интерполяции m . В обоих случаях гипотеза о согласии опытного и теоретического законов распределения может быть принята.

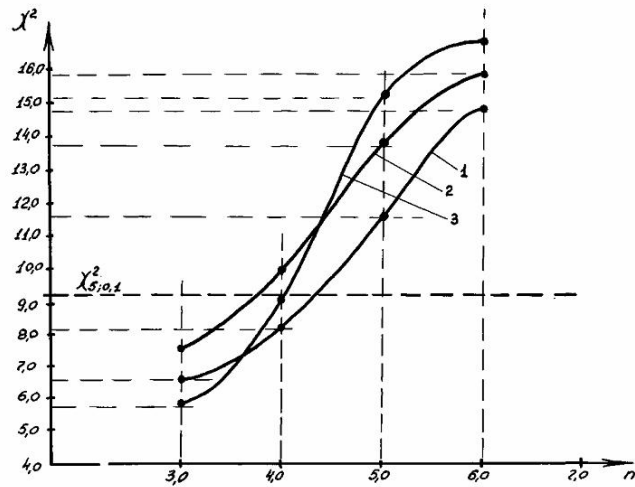


Рис. 4. Графики зависимости для экспоненциального (1), нормального (2) и вейбулова (3) законов для интерполяции многочленами Лагранжа

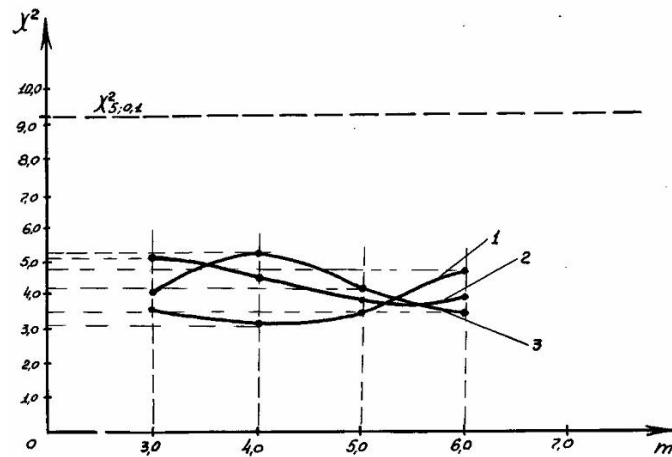


Рис. 5. Графики зависимости для экспоненциального (1), нормального (2) и вейбулова (3) законов для интерполяции сплайн-функциями

Интерполяция сплайн-функциями дает меньшие значения $\chi_{\text{набл}}^2$ чем при кусочно-линейной интерполяции, что соответствует более высокому уровню значимости принимаемой гипотезы.

Параболическая интерполяция, как и интерполяция полиномами Лагранжа степени m , приводит к сильной зависимости расчетной величины критерия $\chi_{\text{набл}}^2$ от числа узлов интерполяции m .

Заключение. В ряде случаев неравновесность и малоинерционность исследуемых объектов при их исследовании позволяет получать только малые объемы экспериментальных данных, не приемлемые для традиционных методов их обработки, или их низкой эффективности. Для осуществления контроля, прогнозтики и диагностики в условиях ограниченности априорной информации требуется разра-

ботка и исследование методов синтеза адекватных моделей ТО по малым выборкам данных. Достоверность синтезированных моделей может быть достигнута при интегральном применении нескольких методов обработки выборочных данных. Наряду с описанными в [1] методами аддитивной аппроксимации и имитационного моделирования предлагается использовать полиномиальную интерполяцию выборочных значений. Исследование интерполирующих полиномов различного вида применительно к указанной задаче показало, что результаты интерполяции значительно зависят от степени интерполирующего полинома; при степени полинома не выше третьей практически во всех случаях проверка гипотезы на согласие исходного и получаемого законов распределения плотностей вероятностей интервалов дает положительные результаты, причем наилучшее совпадение законов имеет место при интерполяции кубическими сплайн-функциями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гузик В. Ф., Кидалов В.И., Самойленко А.П.* Статистическая диагностика неравновесных объектов. – СПб.: Судостроение, 2009. – 304 с.
2. *Гаскаров Д.В., Шаповалов В.И.* Малая выборка. – М.: Статистика, 1978. – 248 с.
3. *Гаскаров Д. В., Голинкевич Т.А., Мозгалецкий А.В.* Прогнозирование технического состояния и надежности РЭА / Под ред. Т.А. Голинкевича. – М.: Сов. радио, 1974. – 224 с.
4. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Анализ данных на компьютере / Под. ред. В.Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 543 с.
5. *Гузик В.Ф., Самойленко А.П., Чапцев А.Г., Бондаренко М.А.* Программный процессор по статистической обработке массивов малых выборок // А.с. №2000610544 об официальной регистрации Роспатентом РФ программы для ЭВМ от 28.06.2000.
6. *Рогозов Ю.И., Самойленко А.П., Усенко О.А.* Программный анализатор стохастических моделей для систем контроля и диагностики состояния технологических объектов // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2002610727 от 17.05.2002.
7. *Самойленко А.П., Рогозов Ю.И., Кудрявцев Р.В.* Программа по реализации аддитивной аппроксимации данных ограниченного объема в базисе Гауссовых вкладов // А.с. №2002611968 об официальной регистрации Роспатентом РФ программы для ЭВМ от 22.11.2002.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Самойленко Анатолий Петрович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: rts@tti.sfedu.ru; 347900, г. Таганрог, пер. 1-й Крепостной, 34, кв. 43; тел.: 89885847326; кафедра радиотехнических и телекоммуникационных систем; к.т.н.; доцент.

Горбунова Екатерина Борисовна – e-mail: kattag@rambler.ru; 347910, г. Таганрог, ул. 1-я Котельная, 71, кв. 188; тел.: +79286277299, кафедра радиотехнических и телекоммуникационных систем; аспирантка.

Samoylenko Anatoliy Petrovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: rts@tti.sfedu.ru; 34 – 43, 1-st Krepostnoy, Taganrog, 347910, Russia; phone: +79885847326; the department of radio and telecommunication systems; associate professor.

Gorbunova Ekaterina Borisovna – e-mail: kattag@rambler.ru; 71 – 188, 1-st Kotel'naya, Taganrog, 347910, Russia; phone: +79885847326; the department of radio and telecommunication systems; postgraduate student.