Таким образом, на каждой итерации соответствует решению одной прямой задачи (1)–(15), одной сопряженной для параметров $\Psi = (h^*, Q^*, c^*, \xi^*, q_1^*, q_2^*, C^*)$ и $j_1 = 1, ..., J_1$ сопряженную задачу для уравнений (3) и (6).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шугрин С.М.* Соединение одномерной и двумерной (плановой) моделей течения воды // Водные ресурсы. – 1987. – № 5. – С. 5-15.
2. *Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С.* Численное моделирование неустановившихся гидротермических процессов в водных объектах // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 25-30.
3. *Захарченко Н.С.* Управление водно-солевым режимом водохранилищ речного типа при использовании их для орошения (на примере Веселовского водохранилища на р. Западный Маныч): Дисс. … канд. техн. наук. – Новочеркасск. – 2001. – 120 с.
4. *Рахуба А.В.* Экспериментальные исследования пространственно-временной неоднородности вод долинного водохранилища // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 146-154.
5. *Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1993ю – 368 с.
6. *Марчук Г.И.* Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1992. – 336 с.
7. *Алексеев А.К., Бондарев А.Е.* Применение сопряженных уравнений и визуальное представление сопряженных параметров в задачах идентификации и управления течением // Препринты ИМП им. М.В. Келдыша. – 2011. – № 50. 24 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-50.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н. В.В. Нефедов.

Бузало Наталья Сергеевна – Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт); e-mail: buzalo.n.s@mail.ru; 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132, тел.: 89185324924; физико-математический факультет; кафедра прикладной математики; к.т.н.; доцент.

Никифоров Александр Николаевич – e-mail: a.n.nikiforov@mail.ru; тел.: 88635255692; физико-математический факультет; кафедра прикладной математики; к.т.н.; доцент.

Buzalo Natalya Sergeevna – South-Russian state technical university (Novocherkassk polytechnic institute); e-mail: buzalo.n.s@mail.ru; 132, Prosvesheniya street, Novocherkassk, 346428, Russia; phone: +79185324924; faculty of mathematics and physics; the department of applied mathematics; cand. of eng. sc.; associate professor.

Nikiforov Alexandr Nikolaevich – e-mail: a.n.nikiforov@mail.ru; phone: +78635255695; faculty of mathematics and physics; department of applied mathematics; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 519.6

Н.Б. Иткина

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАССОПЕРЕНОСА С ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ НА БАЗЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

Рассматриваются вариационные формулировки для уравнений конвекции-диффузии на базе разрывного метода Галеркина. Применение разрывного метода Галеркина (Discontinuous Galerkin method) для решения конвективно-диффузионных задач обосновано свойствами локальной консервативности DG- метода, а также его возможностями по применению h- и p-h-стратегий. Такие характеристики метода позволяют избежать появления нефизичных осцилляций вблизи пограничных и внутренних слоев. В статье исследуется возможность использования базисов различных порядков, что позволяет разработать *стратегию построения адаптивной сетки с учетом особенностей конкретной задачи. На классе модельных задач показано, что применение лифтинг-оператора значительно повышает устойчивость вычислительной схемы.*

Разрывный метод Галеркина; уравнение конвекции-диффузии-реакции; стабилизирующие операторы.

N.B. Itkina

DISCONTINIUOS GALERKIN NUMERICAL SCHEME FOR MASS TRANSFER PROCESS WITH POINT SOURCE

Variational formulations for convection-diffusion equations based on discontinuous Galerkin (DG-method) approximation method is offered. Application of the discontinuous Galerkin method for the convection-diffusion problems solution substantiated properties of local conservatives of DG-method, as well as its potential for use h and ph-strategies. These characteristics of the method can avoid unphysical oscillations near the boundary and internal layers. The paper investigates the use of different orders bases, which allows to develop a strategy for constructing adaptive grid. Was shown on the class of model problems that the use of lifting operator significantly increased the stability of the computational scheme.

Discontinuous Galerkin method; convection-diffusion-reaction problems; operator of stabilization.

Многообразие прикладных задач, в которых присутствует конвективный перенос, приводит к постоянному повышению требований к точности и эффективности численных методов. Разрывный метод Галеркина (DG-метод) позволяет получать аппроксимации разрывных решений, используя идею численных потоков и ограничителей крутизны, применяющихся в конечно-разностных и конечно-объемных схемах, в связи с чем его можно рассматривать как некоторое обобщение конечно-объемных методов [1–2]. В данном случае численные потоки – это специальные операторы следа на границе конечного элемента, а ограничители крутизны – операторы, обеспечивающие повышение устойчивости метода. Именно эти дополнения призваны обеспечивать сходимость численного решения к физически релевантному решению без осцилляций вблизи разрывов. Благодаря своей конечно-элементной структуре DG-метод имеет ряд преимуществ: 1) разрывный метод Галеркина хорошо приспособлен для локальных сгущений сетки и для локального повышения порядков базисных функций; 2) DG-метод удобен для работы со сложными и геометрически разнородными областями [3].

Рассмотрим нестационарную задачу тепломассообмена:

$$\begin{gathered} \gamma\frac{\partial u}{\partial t} - div\left(\lambda gradu\right) + \vec{a}\cdot gradu = f \text{ на } \Omega, \\ u = g_D \text{ на } \partial\Omega, \\ u\big|_{t=0} = U_0. \end{gathered} \tag{1}$$

Перейдем к системе уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma - \nabla u = 0, \\ &-\nabla\cdot\left(\lambda\sigma\right) + \vec{a}\cdot\nabla u + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} = f \end{aligned}\right. \text{ на } \Omega\ . \tag{2}$$

Определим триангуляцию области Ω: $\Xi_h = \{K\}$, где K – конечные элементы. Обозначим границу конечного элемента K: ∂K. Тогда $\Gamma = \bigcup\limits_{K\in\Xi}\partial K$ – объединение всех границ конечных элементов, $\Gamma^0 = \Gamma\setminus\partial\Omega$ – объединение внутренних границ конечных элементов.

Введем пространство $W_2^l\left(\Xi_h\right)$ как пространство функций, заданных на Ω, которые на каждом элементе K принадлежат пространству Соболева $W_2^l\left(K\right)$ с нормой $\left\|v\right\|_{W_2^l(K)}=\left(\sum_{|\gamma|\le l}\left\|D^\gamma v\right\|_{L_2(K)}^2\right)^{1/2}$, где $L_2\left(\Omega\right)$ – пространство Лебега со скалярным произведением: $\left(v,w\right)_{L_2(\Omega)}=\int_\Omega vwd\Omega$ и нормой: $\left\|v\right\|_{L_2(\Omega)}=\left(v,v\right)_{L_2(\Omega)}^{1/2}$.

Введем пространства тестовых функций:

$$\mathrm{V}_h=\left\{v\in L_2\left(\Omega\right):v\big|_K\in P(K),\forall K\in\Xi_h\right\},$$

$$\Sigma_h=\left\{\tau\in\left[L_2\left(\Omega\right)\right]^2:\tau\big|_K\in\Sigma(K),\forall K\in\Xi_h\right\},$$

где $P\left(K\right)=\mathrm{P}_p\left(K\right)$ – пространство полиномов степени $p\ge 1$, определенных на элементе K; $\Sigma\left(K\right)=\left(\mathrm{P}_p\left(K\right)\right)^2\cdot\mathrm{V}_\mathrm{h}$ и Σ_h – подпространства пространств $W_2^l\left(\Xi_h\right)$ и $\left(W_2^l\left(\Xi_h\right)\right)^2$.

След функции $v\in\mathrm{V}_\mathrm{h}$ на границе конечного элемента K : ∂K определим следующим образом: $v_K^\pm=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}v\left(x\pm\varepsilon n_K\right)$, где n_K – единичная внешняя нормаль к границе ∂K. Оператор среднего вычисляется [1]: $\left\langle v\right\rangle=\left(v_i^-+v_j^-\right)/2$ на границе $\partial K\in\Gamma^0$, $\left\langle v\right\rangle=v_i^-$ на границе $\partial\Omega$, $\left\langle\tau\right\rangle=\left(\tau_i^-+\tau_j^-\right)/2$ на границе $\partial K\in\Gamma^0$, $\left\langle\tau\right\rangle=\tau_i^-$ на границе $\partial\Omega$, оператор скачка: $\left[v\right]=v_i^-n_i+v_j^-n_j$ на границе $\partial K\in\Gamma^0$, $\left[v\right]=v_i^-n_i$ на границе $\partial\Omega$, $\left[\tau\right]=\tau_i^-\cdot n_i+\tau_j^-\cdot n_j$ на границе $\partial K\in\Gamma^0$, $\left[\tau\right]=\tau_i^-\cdot n_i$ на границе $\partial\Omega$, где индексы i и j определяют конечные элементы K_i и K_j, имеющие общую границу ∂K.

Найти функции $u_h\in\mathrm{V}_h$ и $\sigma_h\in\Sigma_h$ такие, что $\forall K\in\Xi_h$ удовлетворяют вариационным уравнениям [1]:

$$\int_K\sigma_h\cdot\tau dx=-\int_K u_h\nabla\cdot\tau dx+\int_{\partial K}\hat{u}_K n_K\cdot\tau ds\quad\forall\tau\in\Sigma\left(K\right);\tag{3}$$

$$\int_K\lambda\sigma_h\cdot\nabla vdx+\int_K\vec{a}\cdot\sigma vdx+\int_K\gamma\frac{\partial u}{\partial t}vdx=\int_K fvdx+\int_{\partial K}\hat{\sigma}_K\cdot n_K vds\ \forall v\in P\left(K\right),\tag{4}$$

где величины σ_h и u_h аппроксимируют $\sigma=\nabla u$ и u соответственно. Тогда вариационная формулировка (3)–(4) примет вид

$$B_h\left(u_h,v\right)=\int_\Omega fvdx\quad\forall v\in\mathrm{V}_h,\tag{5}$$

$$B_h(u_h, v) = \int_{\Omega} \lambda \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v dx + \int_{\Omega} \vec{a} \cdot \nabla_h u_h v dx + \int_{\Omega} \gamma \frac{\partial u_h}{\partial t} v dx +$$
$$+ \int_{\Gamma} \lambda \left([\hat{u} - u_h] \cdot \langle \nabla_h v \rangle - \langle \hat{\sigma} \rangle \cdot [v] \right) ds + \tag{6}$$
$$+ \int_{\Gamma^0} \left(\langle \hat{u} - u_h \rangle [\nabla_h v] - [\hat{\sigma}] \langle v \rangle \right) ds.$$

Билинейная форма (5) соответствует вариационной формулировке в терминах u_h.Выбрав численные потоки в виде $\hat{u} = \langle u_h \rangle + n_K \cdot [u_h]$ на Γ^0, $\hat{u} = n_K \cdot [u_h - g]$ на $\partial\Omega$; $\hat{\sigma} = \langle \nabla_h u_h \rangle$ на Γ. Получаем вариационную постановку Baumann – Oden [3]:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v dx + \int_{\Omega} \vec{a} \cdot \nabla_h u_h v dx + \int_{\Omega} \gamma \frac{\partial u_h}{\partial t} v dx - \int_{\Gamma} \lambda \left([u_h] \cdot \langle \nabla_h v \rangle - \langle \nabla_h u_h \rangle \cdot [v] \right) ds -$$
$$- \int_{\Gamma} g n \cdot \nabla_h v ds - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} [u_h] \cdot [v] ds = \int_{\Omega} f v dx,$$
$$\forall v \in \mathrm{V}_h. \tag{7}$$

Любой элемент конечномерного подпространства $u \in \mathrm{V_h}$ можно представить в виде $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \Psi_i$, где u_i – коэффициенты разложения функции u_h по базису $\Psi_i, i = 1, \ldots, N$. В качестве базисных функций выберем взаимно-ортогональные функции $\Psi_1(x, y) = 1$, $\Psi_2(x, y) = x$, $\Psi_3(x, y) = y$, $\Psi_4(x, y) = xy$, $\Psi_5(x, y) = x^2 - \frac{1}{3}$, $\Psi_6(x, y) = y^2 - \frac{1}{3}$, $\Psi_7(x, y) = x\left(y^2 - \frac{1}{3}\right)$, $\Psi_8(x, y) = y\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$, $\Psi_9(x, y) = \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)$, $\Psi_{10}(x, y) = \left(y^3 - \frac{3}{5}y\right)$.

Подставляя представление функции $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \Psi_i$ в вариационное уравнение (7) и учитывая вид численных потоков, получаем

$$\sum_i u_i^{K_j} \int_{K_j} \lambda \nabla \Psi_i^{K_j} \cdot \nabla \Psi_n^{K_j} dx + \sum_i u_i^{K_j} \int_{K_j} \vec{a} \cdot \nabla \Psi_i^{K_j} \Psi_n^{K_j} dx + \sum_i \frac{\partial u_i^{K_j}}{\partial t} \int_{K_j} \gamma \Psi_i^{K_j} \Psi_n^{K_j} dx +$$
$$+ \sum_i u_i^{K_j} \int_{\partial K_j} \lambda \left(\left[\Psi_i^{K_j} \right] \left\langle \nabla \Psi_n^{K_j} \right\rangle - \left\langle \nabla \Psi_i^{K_j} \right\rangle \left[\Psi_n^{K_j} \right] \right) ds - \quad , \tag{8}$$
$$- \int_{\Gamma \cap \partial K_j} g n \cdot \nabla \Psi_n^{K_j} ds - \frac{1}{\mu} \sum_i \int_{\Gamma \cap \partial K_j} n \left(u_i^{K_j^{in}} \Psi_i^{K_j^{in}} - u_i^{K_j^{ex}} \Psi_i^{K_j^{ex}} \right) n \Psi_n^{K_j} ds = \int_{K_j} f \Psi_n^{K_j} dx,$$

где $\Psi_i^{K_j^{in}}, \Psi_i^{K_j^{ex}}$ – базисные функции самого элемента K_j и соседнего элемента с общей границей, соответственно. Дискретный аналог задачи (1) – система линейных алгебраических уравнений (8). Для вычисления интегралов в соотношении (8) используются квадратурные формулы метода Гаусса четвертого порядка.

Основные свойства численной схемы (8) исследуются на классе модельных задач. Для задач конвекции-диффузии особенно важно определить примерный интервал изменения значений параметра стабилизации μ и влияния порядка конечно-элементного базиса на точность решения системы (8).

Модельная задача: в области $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ решить задачу

$$-div\left(\lambda gradu\right) + \vec{a}\cdot gradu = f \qquad (9)$$

с коэффициентами $\vec{a} = (1,1)$ аналитическое решение $u(x, y) = \sin 2\pi x \sin 2\pi y$.

Вычислительные эксперименты проводились на вложенных сетках 5×5, 10×10, 20×20 на элементах первого, второго, третьего порядка для коэффициентов $\lambda = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ с различными значениями параметра стабилизации $\mu = 1, 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001$.

Таблица 1

Погрешность решения задачи (9) при $\lambda = 0{,}1$

N	Порядок базисных функций	$\|u-u^*\|$			
		$\mu=1$	$\mu=0{,}1$	$\mu=0{,}01$	$\mu=0{,}001$
25	1	8,07–01	3,24–01	5,26–01	7,55–01
	2	1,20–01	7,91–02	5,38–02	8,17–02
	3	1,75–02	1,34–02	1,22–02	2,58–02
100	1	1,45–01	7,99–02	1,36–01	4,49–01
	2	4,65–02	2,98–02	1,25–02	1,17–03
	3	1,70–03	1,17–03	5,67–04	1,14–03
400	1	2,97–02	2,15–02	1,78–02	1,48–01
	2	1,33–02	9,71–02	3,25–03	1,67–03
	3	1,26–04	8,41–05	3,51–05	3,34–05

Уменьшение порядка коэффициента λ приводит к появлению незначительных погрешностей в окрестности границы области, увеличение порядка элементов позволяет увеличить точность решения. Применение параметра стабилизации позволяет повысить точность решения задачи на два порядка.

Таблица 2

Погрешность решения задачи(9) при $\lambda = 0{,}01$

N	Порядок базисных функций	$\|u-u^*\|$			
		$\mu=1$	$\mu=0{,}1$	$\mu=0{,}01$	$\mu=0{,}001$
25	1	5,64–00	2,32–00	1,44–00	2,02–00
	2	1,206–00	4,46–01	1,87–01	4,45–01
	3	1,06–01	3,38–02	1,57–02	3,57–02
100	1	1,84–00	3,60–01	3,64–01	6,10–01
	2	1,67–01	2,02–02	2,02–02	1,35–02
	3	2,63–03	6,46–04	6,46–04	1,11–03
400	1	1,79–00	2,84–01	6,17–02	1,65–01
	2	2,30–02	1,47–02	3,42–03	1,56–03
	3	1,28–04	1,00–04	4,05–05	3,01–05

Для решения задачи массопереноса в трубчатом реакторе (математическая модель(1)) использовалась вычислительная схема с оптимальным значением параметра стабилизации $\mu \in [0,1;0,001]$ на вложенных сетках 5×5, 10×10, 20×20 с базисными функциями второго порядка. Для задачи, приближенной к реальной, доминирование конвекции было значительно меньше (на 2–4 порядка), чем для модельных задач, что обусловило значительное уменьшение погрешности (на 2–3 порядка).

Проведенные вычислительные эксперименты показали возможности применения разрывного метода Галеркина для решения конвективно-диффузионных задач с преобладанием конвекции. Оптимальный выбор параметра стабилизации позволяет повысить точность решения задачи как минимум на один порядок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Arnold D.N., Brezzi F., Cocburn B., Marini D.* Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. – 2002. – Vol. .39, № 5. – P. 1749-1779.
2. *Cocburn B.* Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // In High – Order Methods for Computational Physics. – 1999. Vol. 9. – P. 69-224.
3. *Baumann C.E.and Oden J.T.* A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1999. – № 175. – P. 311-341.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. О.П. Солоненко.

Иткина Наталья Борисовна – Новосибирский государственный технический университет; e-mail: itkina.nat@yandex.ru; г. Новосибирск-99, ул. М. Горького, 92, кв. 3; тел.: 80059383464; кафедра вычислительных технологий; к.т.н.; доцент.

Itkina Natali Borisovna – Novosibirsk State Technical University; e-mail: itkina.nat@yandex.ru; 92, M. Gorky street, ap. 3, Novosibirsk-99, Russia; phone: 80059383464; the department of computational technologies; cand. of eng. sc., associate professor.

УДК 629.7.016

О.Д. Креерренко, Е.С. Креерренко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА ПО ВПП, УПРАВЛЯЕМОГО РЕГУЛЯТОРАМИ, СИНТЕЗИРОВАННЫМИ НА ОСНОВЕ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Статистические данные по авиационным происшествиям в классах пассажирских и транспортных самолетов мира показывают, что значительная доля авиационных происшествий, в том числе катастроф, на этапе посадки происходит в результате столкновения самолета с наземными объектами вследствие его выкатывания за пределы взлетно-посадочной полосы (ВПП). Как правило, причинами авиационных происшествий являются отказы в системах самолета, а также человеческий фактор. В связи с этим проблема совершенствования законов автоматического управления для обеспечения заданного уровня безопасности при движении летательного аппарата (ЛА) по ВПП остается весьма актуальной. В докладе рассмотрен новый синергетический подход к синтезу законов автоматического управления движением самолета по ВПП. Такой подход позволяет всесторонне и в полном объеме учесть естественные динамические свойства ЛА как нелинейного, многомерного и многосвязного объекта управления (ОУ) [1].

Математическая модель; летательный аппарат; синергетический синтез; законы управления.