

УДК 519.8

Н.С. Бузало, А.Н. Никифоров

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕМОМ И КАЧЕСТВОМ ВОДЫ В ВОДОЕМАХ

Рассмотрена задача управления течениями и переносом вещества в мелководных водоемах. Система водоемов представлена в виде стратифицированного множества, на котором сформулированы 0D-, 1D- и 2D-модели гидравлики и переноса примеси. Математическая модель включает одно- и двумерные (плановые) уравнения Сен-Венана и конвекции-диффузии, граничные и начальные условия и условия склейки задач при слиянии русел. Сформулирована задача управления объемом и качеством воды в значимых зонах. Управлениями являются мощности источников сбросов вещества и расход воды на водовыпуске гидротехнических сооружений. Предложен алгоритм итерационного решения задачи управления. Получено выражение для градиента функционала, использующее вариацию Лагранжиана и сопряженную задачу.

Задачи управления для уравнений в частных производных; обратные задачи; методы оптимизации; течение воды в открытых руслах; уравнения Сен-Венана; уравнения конвекции-диффузии; сопряженные уравнения.

N.S. Buzalo, A.N. Nikiforov

APPLICATION OF CONJUGATE EQUATIONS IN PROBLEMS OF CONTROL OF WATER VOLUME AND QUALITY IN RESERVOIRS

In presented paper the problem of control for flows and mass transfer in shallow reservoirs is considered. System of reservoirs is represented as stratified set that has 0D-, 1D- and 2D-hydraulic and admixture transfer models formulated on. Mathematical model includes one- and two-dimensional (planned) Saint-Venant and convection-diffusion equations, boundary and initial conditions as well as splice conditions for problems on junction of channels. Control problem for water volume and quality in significant areas is stated. Parameters to control include source intensity of agent disposal and flow quantity on outlet of waterworks. The algorithm for iterative solving of control problem is suggested. Expression for gradient of functional using variation of Lagrangian and conjugate problem is discovered.

Control problem for equations in partial derivatives; inverse problems; optimization methods; water flow in open channels; Saint-Venant equations; convection-diffusion equations; conjugate equations.

Формулировка прямой задачи. Рассмотрим сеть мелководных водоемов. По аналогии с [1, 2] представим систему водоемов в виде 0D-, 1D- и 2D-моделей гидравлики и переноса примеси на некотором стратифицированном множестве Γ . Пример сети водоемов изображен на рис. 1.

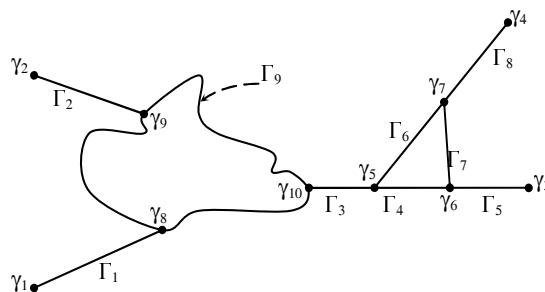


Рис. 1

Здесь стратифицированное множество Γ – это набор замкнутых множеств $\Gamma = \Gamma^0 \subset \Gamma^1 \subset \Gamma^2$, где Γ^0 – множество точек $\{\gamma_i\}_{i=1}^{10}$, состоящее из граничных точек $\{\gamma_i\}_{i=1}^4$ и точек слияния русел $\{\gamma_i\}_{i=5}^{10}$. Γ^1 получается добавлением одномерных русел $\{\Gamma_i\}_{i=1}^8$ и границы двумерного водоема Γ_9 , Γ^2 – добавлением внутренности фигуры, ограниченной контуром Γ_9 .

На отрезках $\{\Gamma_i\}_{i=1}^8$ неустановившееся одномерное течение воды описывается системой уравнений Сен-Венана, которая включает уравнение неразрывности и динамическое уравнение:

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = g_f, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2v \frac{\partial Q}{\partial x} + (g\omega - Bv^2) \frac{\partial z}{\partial x} + g\omega \left(\frac{|Q|Q}{K^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_A}{g\rho} \right) \right) - v^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{h=const} + Bi \right) = \quad (2)$$

$$= g_f v_f + \zeta B V_l |\bar{V}|,$$

где $z(x, t)$ – уровень свободной поверхности, $z(x, t) = z_b(x) + h(x, t)$, $h(x, t)$ – глубина потока, $z_b(x)$ – ордината дна русла; $Q(x, t)$ – расход, $Q = v\omega$, $v(x, t)$ – скорость течения, $\omega(x, h(x, t))$ – площадь поперечного сечения; $B(x, h)$ – ширина свободной поверхности; $i(x)$ – уклон дна русла, $i(x) = -\frac{dz_b(x)}{dx}$;

K – модуль расхода, $K = K(x, h(x, t))$, $K = \omega C_1 \sqrt{R}$, $C_1 = \frac{1}{n} R^{1/6}$, $R = \frac{\omega}{S}$, $S(x, h)$ – смоченный периметр, n – коэффициент шероховатости; $P_A(x, t)$ – атмосферное давление на поверхности воды; ζ – коэффициент ветрового напряжения; $\bar{V} = (V_l, V_n)$ – вектор скорости ветра с компонентами вдоль оси русла и по нормали русла соответственно; $g_f v_f$ – слагаемое, описывающее источники и стоки воды (путевые потери, осадки, испарение, притоки и стоки), $g_f(x, t)$ – мощность источника, v_f – проекция скорости источника на ось x ; g – ускорение силы тяжести.

Также на отрезках $\{\Gamma_i\}_{i=1}^8$ задается уравнение конвекции-диффузии, описывающее распространение некоторого вещества в русле [3]:

$$\omega \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial Qc}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k\omega \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \sigma c = f, \quad (3)$$

где c – концентрация вещества, осредненная по ω , k – коэффициент диффузии, σ – коэффициент химической трансформации вещества, f – функция мощности сбросов.

В области Γ^2 , ограниченной контуром Γ_9 , записываются уравнения мелкой воды для двумерного (планового) течения [1] и уравнение конвекции-диффузии:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = q_f(x_1, x_2, t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + gH \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\xi + \frac{P_A}{g\rho} \right) = \Omega q_2 - \left(\frac{g|\bar{v}|}{C_2^2 H^2} \right) q_1 + \zeta |\bar{V}| V_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + gH \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\xi + \frac{P_A}{g\rho} \right) = -\Omega q_1 - \left(\frac{g|\bar{v}|}{C_2^2 H^2} \right) q_2 + \zeta |\bar{V}| V_2,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial v_1 C}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2 C}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} \right) + \sigma C = F. \quad (6)$$

Здесь $\xi(\mathbf{x}, t) = Z(\mathbf{x}, t) - \tilde{Z}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, Z – отметка свободной поверхности воды, \tilde{Z} – средняя отметка свободной поверхности, $H(\mathbf{x}) = \tilde{Z} - Z_0(\mathbf{x})$ – средняя глубина в точке с координатами \mathbf{x} , Z_0 – отметка дна, $\bar{v} = (v_1, v_2)$ – вектор средней по глубине скорости воды, $\bar{q} = (q_1, q_2) = Hv$, $C_2(H, \mathbf{x})$ – коэффициент Шези, Ω – параметр Кориолиса, $\bar{V} = (V_1, V_2)$ – вектор скорости ветра на поверхности воды; ρ – плотность воды; $q_f(x_1, x_2, t)$ – мощности источников или стоков воды; C – концентрация, осредненная по глубине; k_1, k_2 – коэффициенты диффузии, F – функция мощности источника сбросов вещества.

Участок Γ_0 соответствует береговой линии. Здесь задается равной нулю нормальная составляющая q_n вектора \bar{q} , а для тангенциальной компоненты q_τ вводится квадратичный закон трения [4]

$$q_n = 0, \quad k_L \frac{\partial q_\tau}{\partial n} = -K_1 |q_\tau| q_\tau, \quad (7)$$

где k_L – коэффициент горизонтального турбулентного обмена, K_1 – коэффициент бокового трения.

Для концентрации принимается условие

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0. \quad (8)$$

В местах стыковки русел $\{\gamma_i\}_{i=5}^{10}$ задаются условия сопряжения моделей. При наличии гидротехнических сооружений задан расход жидкости на водовыпуске, равный $q_{\gamma_i}^*$. Тогда для случая стыковки двумерной и одномерной моделей:

$$q_n \gamma_i = Q_{\gamma_i} = q_{\gamma_i}^*; \quad q_\tau = 0; \quad (9)$$

для одномерных:

$$Q_{\gamma_i}^+ = Q_{\gamma_i}^- = q_{\gamma_i}^*. \quad (10)$$

Отсутствие гидротехнических сооружений означает равенство уровней, прилегающих к узлу, и выполнение баланса расходов [1], [5]:

$$Z_{\gamma_i} = z_{\gamma_i} \text{ или } z_{\gamma_i}^+ = z_{\gamma_i}^-, \quad (11)$$

$$\int_{\omega_{\gamma_i}} v_n \gamma_i dl = Q_{\gamma_i} \text{ или } Q^+ = Q^-. \quad (12)$$

В (10)–(12) под $Q_{\gamma_i}^+$ и $Q_{\gamma_i}^-$ понимается сумма расходов на границах участков $\{\tilde{A}_j^+\}$ и $\{\tilde{A}_j^-\}$, примыкающих к точке слияния γ_j справа и слева соответственно, т.е. $Q_{\gamma_i}^+ = \sum_{k \in \Gamma_j^+} Q_{k \gamma_i}$, $Q_{\gamma_i}^- = \sum_{k \in \Gamma_j^-} Q_{k \gamma_i}$; под $z_{\gamma_i}^+$, $z_{\gamma_i}^-$ – уровень на границах всех русел, примыкающих к узлу.

Для концентрации вещества при стыковке одномерных моделей записываем условие непрерывности концентрации, а при стыковке двумерной и одномерной моделей условие баланса концентрации:

$$c_{\gamma_i}^+ = c_{\gamma_i}^- \text{ или } \int_{\omega_{\gamma_i}} C_{\gamma_i} d\omega = c_{\gamma_i} / \omega_{\gamma_i}, \quad (13)$$

где C^+ , C^- – концентрация на границах всех русел, примыкающих к узлу.

В граничных точках $\{\gamma_i\}_{i=1}^4$ задается либо уровень воды, либо расход

$$h = \varphi_1 \text{ либо } Q = \varphi_2. \quad (14)$$

В начальный момент времени задаются начальные условия:

$$\tilde{N}|_{t=0} = C_F, \quad c|_{t=0} = c_F, \quad \bar{q}|_{t=0} = \bar{q}_F, \quad Q|_{t=0} = Q_F, \quad \xi|_{t=0} = \xi_F, \quad h|_{t=0} = h_F. \quad (15)$$

Постановка задачи управления. Пусть в подобластях $\Gamma_{1j_1}^0 \subset \Gamma$ и $\Gamma_{2j_2}^0 \subset \Gamma$, $j_1 = 1, \dots, J_1$, $j_2 = 1, \dots, J_2$ необходимо обеспечить выполнение ограничений соответственно по суммарному количеству примеси и объему воды за период времени $[0, T]$. Управлениями в задаче являются мощности источников вещества f и F , а также расходы воды на водовыпуске гидротехнических сооружений $q_{\gamma_i}^*$.

Введем функции [6]

$$p_{i,j_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma_{i,j_i}^0, \\ 0, & x \notin \Gamma_{i,j_i}^0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad x = \mathbf{x} = (x_1, x_2) \text{ или } x = x$$

и составим ограничения для функционалов

$$Y_{1,j_1} = \int_0^T \int_{\Gamma_{1,j_1}^0} p_{1,j_1} \hat{c} d\Gamma dt \leq \hat{Y}_{1,j_1}, \quad (16)$$

а в качестве минимизируемого функционала рассмотрим

$$Y = \sum_{j_2} \left(\int_0^T \int_{\Gamma_{2,j_2}^0} p_{2,j_2} \hat{h} d\Gamma dt - \hat{Y}_{2,j_2} \right)^2, \quad (17)$$

где \hat{Y}_{1,j_1} и \hat{Y}_{2,j_2} – заданные ограничения по качеству и объему воды; $\hat{c} = c\omega$ или $\hat{c} = C(H + \xi)$, $\hat{h} = h\omega$ или $\hat{h} = (H + \xi)$, в зависимости от того, происходит интегрирование по одномерной или по двумерной области. А также пусть функции f и F описывают набор точечных источников f_m, F_n .

Таким образом, задача управления звучит так. Найти значения $f_m, F_n, q_{\gamma_i}^*$, доставляющие минимум функционалу (17) при выполнении ограничений для функций c, C (16), на решении краевой задачи (1)–(15).

Итерационное решение задачи управления. Будем ориентироваться на какой-либо градиентный метод с возвратом в допустимую область. Для этого получим выражение для градиента функционала Y , используя вариацию Лагранжиана и сопряженную систему [7]. Обозначим $U = (h, Q, c, \xi, q_1, q_2, C)$ – вектор неизвестных функций, а $\mathbf{u} = (f_m, F_n, q_{\gamma_i}^*)$ – вектор управлений.

Запишем прямую задачу в операторном виде

$$AU = \Phi \text{ в } \Gamma, \tag{18}$$

с граничными условиями и условиями склейки

$$aU = \varphi \text{ на } \{\gamma_i\}_{i=1}^{10} \text{ и } \Gamma_9. \tag{19}$$

Введем сопряженные параметры $\Psi = (h^*, Q^*, c^*, \xi^*, q_1^*, q_2^*, C^*)$ и Лагранжиан

$$L = Y + (AU - \Phi, \Psi)_{L_2(\Gamma)} + (aU - \varphi, \Psi)_{L_2(\{\gamma_i\}_{i=1}^{10} \cup \Gamma_9)}. \tag{20}$$

Можно показать, что вариация целевого функционала ΔY равна вариации Лагранжиана ΔL на решении прямой задачи и задачи в возмущениях.

Вычисляя производную Гато и используя тождество Лагранжа, получаем, что вариация Лагранжиана под действием возмущения имеет вид

$$\Delta Y = \Delta L = -(\Delta\Phi, \Psi)_{L_2(\Gamma)} - (\Delta\varphi, \Psi)_{L_2(\{\gamma_i\}_{i=1}^{10} \cup \Gamma_9)}. \tag{21}$$

В результате, решив сопряженную задачу и вычислив Ψ , получаем градиент целевого функционала $\nabla Y = \nabla Y(\Phi, \varphi) = \psi(U(\Phi, \varphi))$ и можем рассчитать новое приближение $\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{u}^j - \tau \nabla Y$.

Рассмотрев отдельно уравнения (3) и (6) и записав к ним сопряженные, преобразуем ограничения (16) к системе следующих линейных неравенств:

$$\sum_m f_m \int_0^T c_{j_1}^*(x_m, t) + \sum_n F_n \int_0^T C_{j_1}^*(\mathbf{x}_n, t) dt \leq \hat{Y}_{1, j_1}, \quad j_1 = 1, \dots, J_1, \tag{22}$$

где $c_{j_1}^*(x_m, t), C_{j_1}^*(\mathbf{x}_n, t)$ – решение сопряженных задач для уравнений конвекции диффузии, соответствующих подобластям Γ_{1, j_1}^0 , взятых в точках источников вещества.

Таким образом, на каждой итерации соответствует решению одной прямой задачи (1)–(15), одной сопряженной для параметров $\Psi = (h^*, Q^*, c^*, \xi^*, q_1^*, q_2^*, C^*)$ и $j_1 = 1, \dots, J_1$ сопряженную задачу для уравнений (3) и (6).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шугрин С.М. Соединение одномерной и двумерной (плановой) моделей течения воды // Водные ресурсы. – 1987. – № 5. – С. 5-15.
2. Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С. Численное моделирование неустановившихся гидротермических процессов в водных объектах // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 25-30.
3. Захарченко Н.С. Управление водно-солевым режимом водохранилищ речного типа при использовании их для орошения (на примере Веселовского водохранилища на р. Западный Маныч): Дисс. ... канд. техн. наук. – Новочеркасск. – 2001. – 120 с.
4. Рахуба А.В. Экспериментальные исследования пространственно-временной неоднородности вод долинного водохранилища // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 146-154.
5. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1993ю – 368 с.
6. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1992. – 336 с.
7. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Применение сопряженных уравнений и визуальное представление сопряженных параметров в задачах идентификации и управления течением // Препринты ИМП им. М.В. Келдыша. – 2011. – № 50. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-50>.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н. В.В. Нефедов.

Бузало Наталья Сергеевна – Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт); e-mail: buzalo.n.s@mail.ru; 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132, тел.: 89185324924; физико-математический факультет; кафедра прикладной математики; к.т.н.; доцент.

Никифоров Александр Николаевич – e-mail: a.n.nikiforov@mail.ru; тел.: 88635255692; физико-математический факультет; кафедра прикладной математики; к.т.н.; доцент.

Buzalo Natalya Sergeevna – South-Russian state technical university (Novocherkassk polytechnic institute); e-mail: buzalo.n.s@mail.ru; 132, Prosvesheniya street, Novocherkassk, 346428, Russia; phone: +79185324924; faculty of mathematics and physics; the department of applied mathematics; cand. of eng. sc.; associate professor.

Nikiforov Alexandr Nikolaevich – e-mail: a.n.nikiforov@mail.ru; phone: +78635255695; faculty of mathematics and physics; department of applied mathematics; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 519.6

Н.Б. Иткина

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАССОПЕРЕНОСА С ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ НА БАЗЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

Рассматриваются вариационные формулировки для уравнений конвекции-диффузии на базе разрывного метода Галеркина. Применение разрывного метода Галеркина (Discontinuous Galerkin method) для решения конвективно-диффузионных задач обосновано свойствами локальной консервативности DG-метода, а также его возможностями по применению h- и p-h-стратегий. Такие характеристики метода позволяют избежать появления нефизических осцилляций вблизи пограничных и внутренних слоев. В статье исследуется возможность использования базисов различных порядков, что позволяет разработать