

УДК 517.9

Л.А. Иншакова, Н.И. Красильников

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРУШЕНИЯ ПАКЕТА ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН,  
БЛИЗКИХ К ВОЛНЕ СТОКСА**

*Данная работа посвящена численному моделированию эффекта обрушения пакета гравитационных волн, близких к волне Стокса, на поверхности жидкости бесконечной глубины. Жидкость невязкая, несжимаемая, поток потенциален. Каждая из волн, близких к предельной волне Стокса, в отдельности распространяется без изменений на протяжении многих периодов времени. При взаимодействии результирующая волна разрушается. Приведено описание комплекса программ и алгоритмов (Лонге-Хиггинса–Кокле и Красильникова). Приведена зависимость порога обрушения и начальной энергии волны от начальной амплитуды единичной волны, близкой к волне Стокса. Приведены результаты численного моделирования и их сравнение с теоретическими данными.*

*Пакет гравитационных волн; предельная волна Стокса; обрушение волны; численное моделирование; комплекс программ; MatLab 6,5.*

L.A. Inshakova, N.I. Krasilnikov

**MODELLING OF GRAVITY WAVE PACKAGE BREAKING CLOSE TO THE  
STOKES WAVE**

*This article is dedicated to numerical modeling of gravity wave package breaking close to the Stokes wave of infinite depth. Liquid is considered as frictionless, incompressible, flow is potential. Each wave close to the Stokes wave individually doesn't change through lots of time periods. Their interaction results in wave package breaking. The description of a software package and used algorithms (Longuet-Higgins–Cokelet and Krasilnikov) is given. The dependence of breaking threshold and initial wave energy on the wave amplitude is shown. Numerical modeling results and comparison with the theoretical data are given.*

*Gravity waves package; Stokes breaking wave; wave breaking; numerical modeling; software package; MatLab 6,5.*

**Введение.** Рассмотрим плоскую задачу о движении гравитационной волны в жидкости бесконечной глубины. Жидкость невязкая, несжимаемая, поток потенциален. В силу предположения об отсутствии завихренности в рассматриваемой области вводится потенциал скоростей  $\varphi$ , для которого выполнено уравнение Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  с условием  $\varphi \rightarrow 0$  на глубине.

Кинематическое граничное условие заключается в том, что граничные частицы жидкости должны двигаться со скоростью свободной поверхности ( $h$  – высота волны):  $\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial y} = \nabla\varphi$ .

Динамическое граничное условие заключается в непрерывности давления при переходе через поверхность раздела. Оно сводится к представлению свободной поверхности в виде линии тока, на которой справедлив интеграл Коши–Лагранжа,  $p_{ext}$  – внешнее давление.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + gh + \frac{p_{ext}}{\rho} \equiv \text{const.}$$

Первые попытки объяснить механизм разрушения волны были сделаны Стоксом (1847 г.). В своей работе [1] он рассчитал приближенное решение для гравитационных волн конечной амплитуды, из которого следовала зависимость фазовой скорости от амплитуды волны, а также заострение вершины и сглаживание впадины волнового профиля. До настоящего времени явление обрушения связывается с предложенной им концепцией "предельной" волны [2], у которой скорости частиц на вершине равны фазовой скорости волны, т.е. в системе координат, движущейся

с фазовой скоростью волны, частицы на вершине имеют нулевую скорость. Угол при вершине такой волны был найден Митчелом [3]; он оказался равным  $120^\circ$ . Обрушающаяся волна рассматривается как запредельная волна.

Сегодня наибольших результатов в области исследования обрушения удается достичь с помощью математического моделирования. Согласно методу, предложенному М.С. Лонге-Хиггинсом и Е.Д. Кокле в [4] и развитому в работе [5], на свободной поверхности располагаются маркерные точки, для которых можно выписать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для потенциалов и положений маркерных точек ( $h_i$  – возвышение точки над средним уровнем,  $N$  – число маркерных точек):

$$\frac{dr_i}{dt} = (\nabla\varphi)_i, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - gh_i - p_{ext}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

**Теоретическая часть.** Систему (1) можно переписать в комплексных обозначениях, введя комплексный потенциал  $A = \varphi + i\psi$ , где  $\psi$  – функция тока и  $z = x + iy$  – координаты точек:

$$\frac{dz_i}{dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_i^*, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial A}{\partial z}\right|\right)_i^2 - g\text{Im} z_i - p_{ext}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Интегрирование этих систем согласно методу, предложенному в [6, 7], ведется следующим образом: по известным значениям  $\varphi, z$  вычисляются значения  $\partial\varphi/\partial n$  и  $A$ , после чего производится интегрирование на один шаг. Отметим, что перед каждым шагом интегрирования производилось, используя метод [6, 7], преобразование точек контура по формуле  $z' = \exp(-iz)$ .

Автором в среде MatLab 6.5 создан программный комплекс «Океан» для моделирования эволюции и процесса обрушения гравитационных волн на поверхности жидкости бесконечной глубины. Комплекс состоит из трех основных блоков: 1) диспетчер (управление работой комплекса, задание значений параметров эксперимента, выбор счетных методов), 2) калькуляция (все вычислительные программы) и 3) индикация (визуализация результатов эксперимента). Поскольку момент обрушения, самопересечения волнового профиля или сгущения точек сетки заранее предсказать невозможно, программный комплекс позволяет вести диалог с экспериментатором. Подробное описание комплекса приведено в [8]. Моделирование по схеме Лонге-Хиггинса–Кокле [4] возможно только для односвязной области, поэтому эксперимент ведется только до этого момента. Доказательством работы комплекса послужили работы [9, 10].

**Реализационная часть.** Задается профиль волны и потенциал скоростей из теоретического исследования Стокса [1, 2] по формулам

$$y = \frac{a}{k} \cos(kx) + \frac{a^2}{2k} \cos(2kx) + \frac{3a^3}{8k} \cos(3kx), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (2)$$

$$\varphi = -\sqrt{\frac{g}{k}} \left(a - \frac{a^3}{8k}\right) e^{ky} \sin(kx), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} - \text{волновое число}. \quad (3)$$

Все волны в комплексе нормируются до длины  $2\pi$ , поэтому  $k = 1$ .

Эволюция волны с начальной амплитудой  $a = 0,2$  приведена на Рис. 1. Волна распространяется без обрушения на протяжении многих периодов (более 10). Начальная энергия составляет 0,1918, фазовая скорость распространения соответствует теоретическим данным  $\left(c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\right)$  и составляет 3 м/с.

Пакет волн определяется следующим образом. Сначала по формулам (2), (3) задается одиночная волна. Вторая волна получается циклической перестановкой массива значений профиля и потенциала скоростей в соответствии со сдвигом фазы  $\frac{\pi}{3}$ . Результирующая волна и потенциал скоростей получаются суммой соответствующих волн и потенциалов.

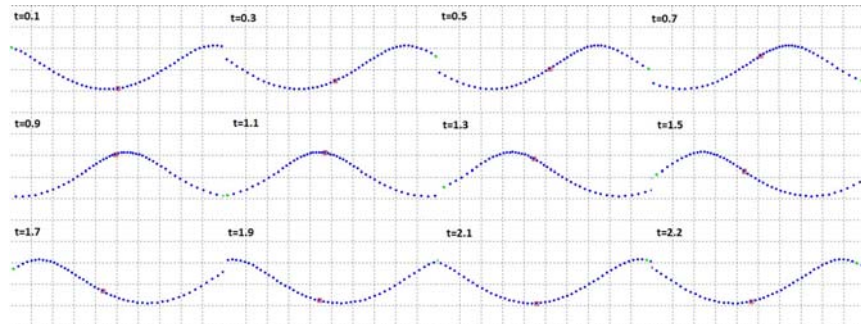


Рис. 1. Эволюция волны, близкой к волне Стокса с  $a = 0, 2$

Эволюция волнового пакета с начальной амплитудой одиночной волны  $a = 0,2$  приведена на Рис. 2 в различные моменты времени. Начальная энергия составляет 0,6688. Волна начинает разрушаться при  $t = 1,752$  (момент образования вертикальной стенки на переднем фронте волновой поверхности).

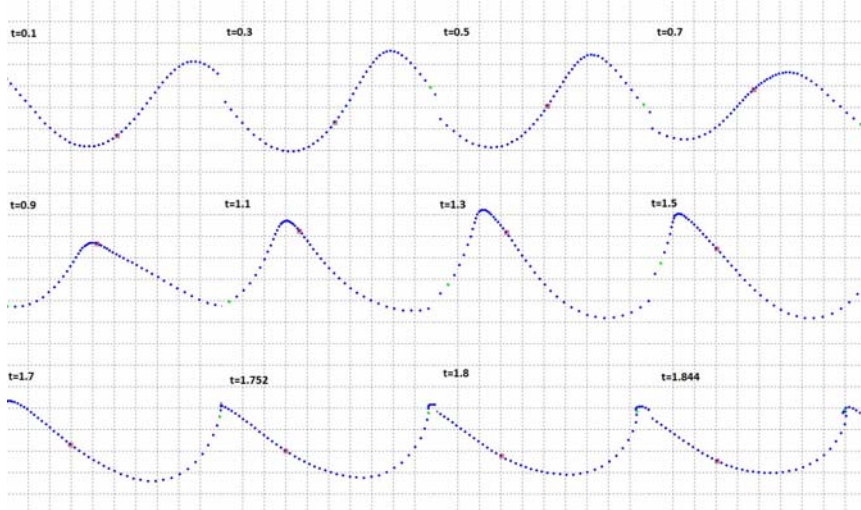


Рис. 2. Эволюция пакета волн Стокса с  $a = 0, 2$

В Таблица 1 приведены результаты моделирования динамики волновых пакетов для различных начальных условий.

Таблица 1

Зависимость порога обрушения и энергии от амплитуды

$a$	Сдвиг фазы	Начало обрушения	Начальная энергия
0,10	$\pi/3$	–	0,1695
0,20	$\pi/3$	1,752	0,6688
0,30	$\pi/3$	1,065	1,4720
0,40	$\pi/3$	0,805	2,4905
0,20	$2\pi/3$	–	0,5023
0,25	$2\pi/3$	–	0,7913
0,27	$2\pi/3$	3,700	0,9262
0,30	$2\pi/3$	2,460	1,1802
0,34	$2\pi/3$	2,168	1,4878

**Заключение.** Смоделирован эффект обрушения волнового пакета, заданного суммой двух нелинейных волн, близких к волне Стокса, одинаковых по амплитуде, но сдвинутых по фазе. Каждая волна в отдельности долго не разрушается, энергия сохраняется. При взаимодействии они двигаются с суммированной фазовой скоростью, энергия возрастает, что приводит в конечном итоге к обрушению. Приведены результаты моделирования и количественные характеристики процесса. Направление дальнейших исследований сводится к модификации предложенного комплекса программ с учетом сил поверхностного натяжения для моделирования гравитационно-капиллярных и капиллярных волн на поверхности жидкости.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Mathematical and Physical Papers* – Cambridge, 1880. – Vol. 1. – P. 197-229.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 628 с.
3. *Michell J.H.* The highest waves in Water // *Phil. Mag. Ser. 5.* – 1993. – Vol. 36. – P. 430-437.
4. *Longuet-Higgins M.S., Cockett E.D.* The deformation of steep surface waves on water: Part I. A numerical method of computation // *Proc. Roy. Soc. – London*, 1976. – Vol. A342. – P. 157-174.
5. *Горбунов А.Л., Красильников Н.И., Лоханов М.Ю.* Численное нахождение функции тока по значениям потенциала скорости, заданным на простом контуре. – М., 1986 (Препринт/Институт общей физики АН СССР № 123. – С. 17).
6. *Красильников Н.И., Лебедев В.Б., Хапаев М.М., Грибов Б.Э.* Численное моделирование обрушения морских волн. – М., 1986 (Препринт/Институт космических исследований АН СССР: № 1095. С. 29).
7. *Красильников Н.И.* Дисперсия и обрушение гравитационных волн в жидкости // *Доклады АН СССР.* – 1987. – Т. 294, № 3. – С. 592-594.
8. *Иншакова (Харина) Л.А.* Комплекс программ «Океан» моделирования динамики гравитационных волн // *Математическое моделирование.* – М., 2012 (в печати).
9. *Иншакова (Харина) Л.А.* Численное моделирование разрушения гравитационных волн до момента стабилизации // *ЖЭТФ.* – М., 2012 (в печати).
10. *Харина Л.А.* Численное моделирование разрушения гравитационных волн в жидкости // *Труды 49-й конференции МФТИ*, 2006. – С. 54-55.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Ф.Ф. Каменец.

**Иншакова Лариса Алексеевна** – Московский физико-технический институт; e-mail: larissa.kharina@gmail.com; 119049, г. Москва, ул. Б. Якиманка, 32, кв. 75; тел.: 89165999882; факультет управления и прикладной математики; кафедра информатики; аспирант.

**Красильников Николай Иванович** – e-mail: krasilnikov.nikolai@gmail.com; 119146, г. Москва, Комсомольский пр-т, 33, кв. 14; тел.: 84957216049; факультет управления и прикладной математики; кафедра информатики; к.ф.-м.н.; старший преподаватель.

**Inshakova Larisa Alekseevna** – Moscow Institute of Physics and Technology; e-mail: larissa.kharina@gmail.com; 32-75, Bolshaya Yakimanka street, Moscow, 119049, Russia; phone: +79165999882; control/management and applied mathematics faculty; the department of computer science; graduate student.

**Krasilnikov Nikolai Ivanovich** – e-mail: krasilnikov.nikolai@gmail.com; 33-14, Komsomolsky pr-t, Moscow, 119146, Russia; phone: +74957216049; control/management and applied mathematics faculty; the department of computer science; cand. of phis.-math. sc.; senior lecturer.