УДК 518.9

А.А. Чернушкин

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ БИОРЕСУРСОВ С УЧЁТОМ НАЛОГОВ И КОРРУПЦИИ

Рассматривается динамическая модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учётом экономической коррупции на примере локальной однородной изолированной популяции рыб. Устанавливается зависимость величины взятки за налоговые послабления от законодательно установленной налоговой ставки и от чувствительности взятки. Строится функция оптимальной антропогенной динамики рыбной популяции, которая зависит от заданного наперёд количества биомассы рыбы к концу периода иерархического воздействия, т.е. от условия устойчивого развития. Даются рекомендации по уменьшению влияния факторов, способствующих коррупции.

Математическая модель; оптимальная эксплуатация; экономическая коррупция.

A.A. Chernushkin

A MODEL OF OPTIMAL BIOLOGICAL RESOURCE EXPLOITATION WITH TAXATION AND CORRUPTION

The paper reports on dynamic model of optimal biological resource exploitation with taxation and economic corruption in application to homogenous isolated fish population. The dependence of tax bribes on tax and bribe sensitiveness is considered. The function of optimal man-made dynamics of the local fish population with dependence on the beforehand defined number of the fish biomass on the end of hierarchical exploitation period i.e. sustainable development condition is built. Recommendations for decreasing of the corruption factors influence are given. A game theory model of this problem is proposed to consider.

Mathematical model; optimal exploitation; economic corruption.

Введение. Данная работа посвящена исследованию коррупции в эколого-экономических системах. Целью работы является изучение экономической коррупции на примере эксплуатации возобновляемого ресурса (вылова рыбы). Задачами работы являются выяснение вопроса о том, может ли данный вид коррупции быть устранён полностью, а также существование возможности сохранения положительного количества биомассы рыбы к концу периода иерархического воздействия. Данная работа является первой работой в области исследования оптимальной эксплуатации биоресурсов с учётом коррупции.

Теоретическая часть. Постановка задачи.

$$J = \int_0^T \left(1 - r_0 \cdot e^{-k \cdot b(t)} - b(t)\right) \cdot \sqrt{u(t) \cdot x(t)}\, dt \to \max_{u,b};$$

$$0 \le u(t) \le 1,\ 0 \le b(t) \le 1,\ k > 0,\ t \in [0, T];\ 0 < r_0 < 1;$$

$$\dot{x}(t) = [1 - u(t)] \cdot a \cdot x(t) \cdot \left(K - x(t)\right),\ x(0) = x_0.$$

Модельные величины: $x(t)$ – биомасса популяции; $u(t)$ – доля изъятия биомассы (например, вылова рыбы); $b(t)$ – доля дохода, идущая на дачу взятки; a – коэффициент естественного прироста; K – ёмкость среды; k – чувствительность взятки; r_0 – законодательно установленная налоговая ставка (в долях). Решение осуществляется согласно принципу максимума.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(x, u, b, \psi) = \left(1 - r_0 \cdot e^{-kb(t)} - b(t)\right) \cdot \sqrt{u(t) \cdot x(t)} + \psi(t) \cdot [1 - u(t)] \cdot a \cdot x(t)\left(K - x(t)\right).$$

Согласно [1], для оптимальности управления $u^*(t)$ и траектории $x^*(t)$ необходимо существование ненулевой вектор-функции $\psi(t)$, такой что:

1. Функция Гамильтона в каждый момент времени t достигает максимума по своим переменным управления.
2. Сопряжённые переменные удовлетворяют сопряжённой системе:
$$\psi'(t) = -\frac{\partial H(x^*, u^*, b^*, \psi)}{\partial x}.$$
3. Выполнено условие трансверсальности на правом конце; в данном случае оно имеет вид $\psi(T) = 0$.
4. Выполнено условие нормировки; оно имеет вид $\psi_0(t) = 1$; подтверждение относительно величины последнего условия можно найти, например, в [2].

Рассмотрим первое условие. Производная функции H по b имеет вид
$$\frac{\partial H}{\partial b} = \sqrt{u(t) \cdot x(t)} \cdot \left(r_0 \cdot k \cdot e^{-kb(t)} - 1\right).$$

Приравнивая правую часть данного выражения к нулю и решая его относительно b, получим $b^*(t) = \frac{\ln(r_0 \cdot k)}{k}$.

Поскольку последнее выражение не зависит от времени, оно может быть записано в виде
$$b^* = \frac{\ln(r_0 \cdot k)}{k}. \tag{1}$$

Вычислим теперь производную по второй переменной управления (для краткости опустим аргумент t у функций):
$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{(1 - r_0 \cdot e^{-kb} - b)\sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{u}} - \psi \cdot a \cdot x \cdot (K - x).$$

Приравнивая данное выражение к нулю и решая, получим с учётом (1):
$$u^* = \frac{(k - 1 - \ln(r_0 \cdot k))^2}{4 \cdot k^2 \cdot \psi^2 \cdot a^2 \cdot x \cdot (K - x)^2}. \tag{2}$$

Предполагается, что выполнены достаточные условия максимума функции Гамильтона по переменным управления. Таким образом, выполнено первое условие принципа максимума.

Будем анализировать теперь выражение (1). Рассмотрим предельный случай обращения его в ноль (взятка невыгодна для взяткодателя). Это возможно, когда логарифм, стоящий в числителе, станет нулевым, т.е. когда $k = \frac{1}{r_0}$. В рамках данной модели предполагается, что величина r_0 (налоговая ставка) определяется государством, а k – чиновником службы рыбного хозяйства (взяткополучателем). Государство определяет величину налоговой ставки независимо от взяткополучателя. Полагая r_0 заданным, взяткополучатель устанавливает значение k таким образом, что оптимальная для взяткодателя величина b^* принимает своё наибольшее в рамках моделируемой ситуации значение. Установлено, что оптимальная для взяткополучателя величина k определяется по формуле $k = \frac{e}{r_0}$. При $r_0 = 0{,}2$ величина $k \approx 13{,}59$ (заметим, что она не ограничена сверху). При подстановке k в (1) получаем, что $b^* = \frac{r_0}{e}$. Так как r_0 всегда больше нуля, то b^* никогда не обратится в нуль, однако b^* будет уменьшаться при снижении величины r_0. Таким образом, в рамках данной модели можно сделать вывод, что коррупцию нельзя полностью искоренить, однако её уровень можно уменьшить посредством снижения налоговой ставки.

Рассмотрим теперь второе условие принципа максимума. Именно, составим выражение для сопряжённой переменной $\psi(t)$:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{(k-1-\ln(r_0 \cdot k))^2}{4 \cdot k^2 \cdot \psi(t) \cdot a \cdot \left(K - x^*(t)\right)^2} - \psi(t) \cdot a \cdot \left(K - 2 \cdot x^*(t)\right), \quad (6)$$

и третье условие, которое является краевым для (6)

$$\psi(T) = 0. \quad (7)$$

Четвёртое условие (нормировки) рассмотрено выше.

Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \cdot x(t) \cdot \left(K - x(t)\right) - \dfrac{(k - 1 - \ln(r_0 \cdot k))^2}{4 \cdot k^2 \cdot \psi^2(t) \cdot a \cdot \left(K - x(t)\right)}, \\ \psi'(t) = -\dfrac{(k - 1 - \ln(r_0 \cdot k))^2}{4 \cdot k^2 \cdot \psi(t) \cdot a \cdot \left(K - x(t)\right)^2} - \psi(t) \cdot a \cdot \left(K - 2 \cdot x(t)\right). \end{cases} \quad (8)$$

с граничными условиями $\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \psi(T) = 0. \end{cases}$

Будем решать данную систему посредством сведения её к дифференциальному уравнению второго порядка. После преобразований получим указанное уравнение, соответствующее (8):

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = a \cdot \dot{x}(t) \cdot \left(K - 2 \cdot x(t)\right) - 2 \cdot \dot{x}(t) \cdot \left(K - x(t)\right)^2 \cdot \\ \cdot \left(a \cdot x(t) \cdot \left(K - x(t)\right) - \dot{x}(t)\right) \cdot \\ \cdot \left(\left(a \cdot x(t) \cdot \left(K - x(t)\right) - \dot{x}(t)\right) + a \cdot \left(K - 2 \cdot x(t)\right)\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо определить граничные условия. Начальное условие $x(0) = x_0$ задано. Краевое условие $x(T)$, имеющее смысл количества биомассы рыбы на конец периода иерархического воздействия, будет определено ниже.

Реализационная часть. Уравнение (9) нельзя решить аналитически. Однако оно может быть решено численными методами. Для этого необходимо присвоить модельным величинам определённые значения. Пусть $T = 20$; $r_0 = 0{,}2$; $x_{-3} = 8000$; $x_{-2} = 8800$; $x_{-1} = 9600$; $a = 1{,}14 \cdot 10^{-5}$; $K = 104800$; $x_0 = 10385{,}45$; $k = 13{,}59$; $b = 0{,}07$. Решим (9) методом конечных разностей. Заметим, что искомая функция $x^*(t)$ является функцией антропогенной динамики рыбной популяции (т.е. с учётом вылова рыбы). Определим величины: $n = 4$; $h = \frac{20-0}{4} = 5$; $x_0 = 10385{,}45$; $x_4 = 95000$. Последняя величина выбрана в качестве краевого условия для (9), т.е. $x(T) = 95000$.

Уравнению (9) соответствует система нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{x_{i+1} - 2 \cdot x_i + x_{i-1}}{h^2} = a \cdot \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2 \cdot h} \cdot (K - 2 \cdot x_i) - \\ - \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{h} \cdot (K - x_i)^2 \cdot \left(a \cdot x_i \cdot (K - x_i) - \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2 \cdot h}\right) \cdot \\ \cdot \left(\left(a \cdot x_i \cdot (K - x_i) - \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2 \cdot h}\right) + a \cdot (K - 2 \cdot x_i)\right), i = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (10)$$

В силу нелинейности (10) имеет неединственное решение. Из полученного множества решений могут быть рассмотрены только те решения, которые удовлетворяют нижеследующим условиям:

1. Решение не должно содержать комплексных корней.
2. Решение не должно содержать отрицательных корней.
3. Численность антропогенной динамики популяции не должна превышать численность естественной динамики в данный (один и тот же) момент времени.

Одним из решений системы (10), которое удовлетворяет вышеперечисленным условиям, является

$$x_0 = 10385{,}45;\ x_1 = 97160{,}78;\ x_2 = 95000;\ x_3 = 97160{,}78;\ x_4 = 95000.$$

Поскольку выбор краевого условия для (9) влияет на решение системы (10), то оно подбирается экспериментально. Также имеет место закономерность: чем ближе значение $x(T)$ к величине K, тем большее количество решений удовлетворяет условиям 1–3, в то время как при $x(T) = 0$ ни одно решение системы (10) при $n = 4$ не удовлетворяет данным условиям. Таким образом, всегда имеется возможность сохранения положительного количества биомассы рыбы к концу периода иерархического воздействия. Необходимо также отметить, что при увеличении размерности (10), а именно при $n = 5$ (шаг $h = 4$) система (10) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям 1-3:

$$x_0 = 10385{,}45;\ x_1 = 28771{,}8;\ x_2 = 786{,}978;$$
$$x_3 = 1903{,}49;\ x_4 = 7496{,}31;\ x_5 = 95000.$$

Увеличение размерности (10) при $n > 4$ влечёт за собой резкое увеличение вычислительных затрат, что значительно затрудняет исследование схемы (10). Таким образом, вопрос об устойчивости разностной схемы (10) остаётся открытым.

Для получения функции $x^*(t)$ в виде аналитического выражения необходимо провести регрессионный анализ (так как полученные значения в узлах являются приближёнными). Посредством применения метода наименьших квадратов установлено, что данная функция наилучшим образом приближается полиномом четвёртой степени:

$$x^*(t) = -6{,}79 \cdot t^4 + 328{,}15 \cdot t^3 - 5512{,}1 \cdot t^2 + 37561 \cdot t + 10385$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 1{,}00$.

Уравнение (6) может быть решено аналитически. Решение имеет вид

$$\psi(t) = \sqrt{C_\psi \cdot e^{-2\cdot a\cdot(K-2\cdot x^*(t))\cdot t} - \frac{(k-1-\ln(r_0\cdot k))^2}{4\cdot k^2\cdot a^2\cdot\left(K-x^*(t)\right)^2\cdot\left(K-2\cdot x^*(t)\right)}},$$

где

$$C_\psi = \frac{(k-1-\ln(r_0\cdot k))^2\cdot e^{2\cdot a\cdot(K-2\cdot x^*(T))\cdot T}}{4\cdot k^2\cdot a^2\cdot\left(K-x^*(T)\right)^2\cdot\left(K-2\cdot x^*(T)\right)}.$$

Прибыль рыболовецкого предприятия составит 7 672 480 рублей.

Заключение. В статье был исследован один из видов коррупции в эколого-экономических системах (в частности, экономическая коррупция) на примере эксплуатации возобновляемого биоресурса. Установлено, что данный вид коррупции не может быть устранён полностью, однако может быть уменьшен путём уменьшения налоговой ставки. Также был положительно решён вопрос о существовании возможности сохранения положительного количества биомассы рыбы. В перспективе планируется рассмотреть теоретико-игровую модель вида

$$J_v = \int_0^T \left(p\cdot r_0\cdot e^{-k\cdot b(t)} + b(t)\right)\cdot\sqrt{u(t)\cdot x(t)} \to \max_k, \qquad k > 0$$

$$J_u = \int_0^T \left(1 - r_0\cdot e^{-k\cdot b(t)} - b(t)\right)\cdot\sqrt{u(t)\cdot x(t)} \to \max_{u,b},$$

$$0 \le u(t) \le 1,\ 0 \le b(t) \le 1,\ t\in[0,T];\ 0 < r_0 < 1;$$
$$\dot{x}(t) = [1-u(t)]\cdot a\cdot x(t)\cdot\left(K-x(t)\right),\ x(0) = x_0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мазалов В.В.* Математическая теория игр и её приложения. – СПб.: Лань, 2010;
2. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 599 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Г.А. Угольницкий.

Чернушкин Андрей Александрович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: konsultant87@mail.ru; г. Ростов-на-Дону, ул. Малиновского, 76/2, кв. 50; тел.: 89181034403; факультет математики, механики и компьютерных наук, кафедра прикладной математики и программирования, аспирант.

Chernushkin Andrew Aleksandrovich – Southern Federal University, e-mail: konsultant87@mail.ru, 76/2-50, Malinovskogo street Rostov-on-Don, Russia; phone: 89181034403, the faculty of mathematics, mechanics and computer science; department of applied mathematics and programming; postgraduate student.

УДК 519.865

О.И. Горбанева

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УЧЕТА ФАКТОРА КОРРУПЦИИ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ*

Рассматривается статическая задача распределения ресурсов в трехуровневой системе. Исследуется влияние механизма коррупции при распределении и использовании ресурсов на экономическую систему, на целевые функции ее участников и на их стратегии. Рассматриваются случаи административного и экономического воздействия вышестоящих уровней на нижестоящие. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения механизма принуждения и побуждения как со стороны верхнего уровня при воздействии на средний, так и со стороны среднего уровня при воздействии на нижний. Учитываются два типа высшего уровня: заинтересованный и незаинтересованный.

Распределение ресурсов; управляемая динамическая система; устойчивое развитие; равновесие побуждения; равновесие принуждения; модель коррупции.

O.I. Gorbaneva

STATIC MODELS TAKING INTO ACCOUNT CORRUPTION FACTOR UNDER RESOURCE ALLOCATION IN HIERARCHICAL CONTROL SYSTEMS

The static problem of resource allocation in a three-tier system is considered. The effect of the mechanism of corruption in the resource allocation and resource using in the economic system to objective functions of the participants and their strategies is investigated. The cases of administrative and economic impact of higher levels to the lower level are considered. The corruption fighting possibility and ways in the case of the compulsion and impulsion mechanism applying both by the upper level to mid-level, and by the mid-level to the lower is estimated. Two types of top-level: the interested and disinterested upper levels are taken into account.

Resource allocation; controlled dynamic system; sustainable development; impulsion equilibrium; compulsion equilibrium; corruption model.

Введение. Рассматривается трехуровневая система управления. Нижний уровень производит продукцию и в процессе производства воздействует на управляемую динамическую систему (УДС) [6]–[7]. Средний уровень воздействует на нижний уровень путем побуждения [8] (распределения ресурсов между элементами нижнего уровня) или принуждения [8] (контролирует использование ресурсов). Состояние УДС не входит в сферу интересов среднего уровня. Верхний уровень

* Работа поддержана РФФИ, проект 12-01-00017.