

УДК 551.466

И.Б. Аббасов, И.С. Семенов, В.В. Царевский

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКАТА НЕЛИНЕЙНЫХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ПОЛОГИЕ
БЕРЕГОВЫЕ СКЛОНЫ**

Рассматриваются вопросы двумерного численного моделирования наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на протяженные пологие береговые склоны. Для описания волнового процесса используется уравнение Навье–Стокса. Сформулирована постановка задачи, описаны граничные и начальные условия. С помощью метода расщепления по физическим процессам построены дискретные уравнения. Разработана дискретная конечно-объемная модель исследуемой задачи с учетом коэффициента заполненности ячеек. Проведено исследование консервативности дискретной модели, найдена погрешность аппроксимации конечно-разностной схемы. Представлены результаты двумерного численного моделирования процесса набегания нелинейных поверхностных гравитационных волн на протяженные береговые склоны мелководных акваторий.

Численное моделирование; уравнение Навье–Стокса; метод расщепления; пологий береговой склон; накат нелинейных поверхностных гравитационных волн.

I.B. Abbasov, I.S. Semenov, V.V. Tsarevskiy

**NUMERICAL SIMULATION OF THE SURGE OF NONLINEAR SURFACE
GRAVITY WAVES ON FLAT COASTAL SLOPES**

This article considers two-dimensional numerical simulation of the surge of nonlinear surface gravity waves on the basis of Navier–Stokes equations. The statement of the problem is formulated and its boundary and initial conditions are described. A discrete model is constructed using the method of splitting with respect to physical processes. A discrete finite-element model of this problem is developed taking into account the cell fill factor. The conservativeness of the discrete model was investigated and the approximation error of the finite-difference scheme is found. The results of a two-dimensional numerical simulation of the surge of nonlinear surface gravity waves on extensive coastal slopes of shallow-water offshore areas are presented.

Numerical simulation; Navier–Stokes equation; splitting method; flat coastal slope; surge of nonlinear surface gravity waves.

На островных шельфах в Мировом океане часто наблюдаются акватории с протяженными мелководными береговыми участками. Во время штормовых нагонов или при возникновении цунами может произойти полное подтопление береговой зоны и суши. Следовательно, остаются актуальными вопросы прогнозирования воздействия волновых процессов на мелководные береговые акватории.

Часто эти процессы описываются различными модификациями уравнений мелкой воды. Однако для адекватного моделирования процесса наката поверхностных гравитационных волн требуется учет турбулентных эффектов и трения о дно. Уравнение Навье–Стокса позволяет описывать не только нелинейные эффекты, но и дает возможность учесть турбулентные процессы в вязкой несжимаемой жидкости.

Вопросы наката волн применительно к цунами исследовались в работе [1]. Обсуждалась взаимосвязь различных моделей, а также анализировались безразмерные параметры наката волны. Вопросы численного моделирования распространения волн на поверхности жидкости в рамках нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды рассматриваются в работе [2].

Работа [3] посвящена исследованию двумерной численной модели воздействия затопленного волнолома на распространение волны. Модель основана на уравнении Навье–Стокса. Рассматриваются вопросы моделирования волны как до обрушения, так и после обрушения. Анализируется трансформация профиля волны и связь крутизны волны с её спектральным составом.

Работа [4] посвящена двумерной турбулентной модели обрушивающихся волн. Свободная поверхность жидкости описывается MAC-методом на основе Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS). Проведено сравнение профилей обрушивающихся волн на основе различных методов при распространении по наклонному дну.

Данная работа посвящена двумерному численному моделированию наката поверхностных гравитационных волн на протяженные береговые склоны. Вопросы численного моделирования рефракции поверхностных гравитационных волн в условиях мелководья были описаны в работе [5]. Более подробно нелинейные волновые явления в аналитической постановке на поверхности мелководных акваторий рассмотрены в работе [6].

Согласно геометрии задачи, ось Ox системы координат совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону берега, ось Oz направлена вертикально вверх. В начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя. На некотором расстоянии от берега в точке $x=0$ задается возмущение в виде импульса давления, меняющееся по гармоническому закону. Необходимо смоделировать процесс выхода поверхностной волны на сухую береговую зону.

Для описания двумерных поверхностных гравитационных волн на поверхности жидкости с учетом вязкости используются двумерное уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости и уравнение гидродинамического давления [7]:

- ◆ уравнение Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g, \quad (2)$$

- ◆ уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

- ◆ уравнение гидродинамического давления, определяющее полное гидродинамическое давление с учетом глубины:

$$P(x, z, t) = p(x, z, t) + \rho g z, \quad (4)$$

где u , w – горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости $V(u, w)$ движения частиц водной среды, ρ – плотность жидкости, g – гравитационная постоянная, μ , η – горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена.

На свободной поверхности жидкости соблюдаются динамические и кинематические условия. На дне области предполагаются условия непротекания и скольжения, на левой боковой границе располагается источник волны. Правая боковая граница является продолжением дна. В начальный момент жидкость находится в покое.

С помощью метода расщепления по физическим процессам проводится аппроксимация исходных уравнений по временной переменной. Согласно данному методу расчет осуществляется в три этапа [8]:

- ◆ на первом этапе считается поле скоростей на основе уравнений;
- ◆ на втором этапе рассчитывается давление;
- ◆ на третьем этапе уточняется поле скоростей по давлению.

Разработана дискретная конечно-объемная модель с учетом коэффициента заполненности ячеек [9]. Расчетная область по пространственным направлениям представляет собой прямоугольник. Для численной реализации дискретной мате-

матической модели задачи используется равномерная сетка. Для аппроксимации исходных дифференциальных уравнений по пространственным координатам используется интегроинтерполяционный метод.

Получены дискретные аналоги уравнений для расчета составляющих вектора скорости, поля давления, а также дискретные аналоги граничных условий. Проведено исследование консервативности дискретной модели. Найдена погрешность аппроксимации конечно-разностной схемы $O(\tau + h_x^2 + h_z^2)$. Проведено исследование устойчивости задачи на основе принципа максимума, получены ограничения на шаги по времени и по пространственным координатам.

Дискретные уравнения для расчета составляющих вектора скорости и поля давления рассчитываются по неявной схеме, дискретные уравнения для уточнения компонент поля скорости рассчитываются по явной схеме. Для решения дискретных уравнений используется метод верхней релаксации. Разработана программа для расчета двумерного поля скоростей и поля давления водной среды.

На рис. 1 в динамике представлен процесс набегания нелинейной поверхностной гравитационной волны на пологий береговой склон. Поверхностная гравитационная волна удовлетворяет начальным требованиям мелководности $H/\lambda < 1/2$, в нашем случае длина волны в 6 раз больше глубины акватории.

С приближением к берегу, глубина залива уменьшается, волна начинает ощущать дно, следовательно, возрастает влияние нелинейных эффектов. Это приводит к укрупнению переднего фронта гребня поверхностной волны. Траектории движения частиц среды на переднем фронте волны становятся вертикальными, передний фронт становится отвесным и происходит обрушение волны.

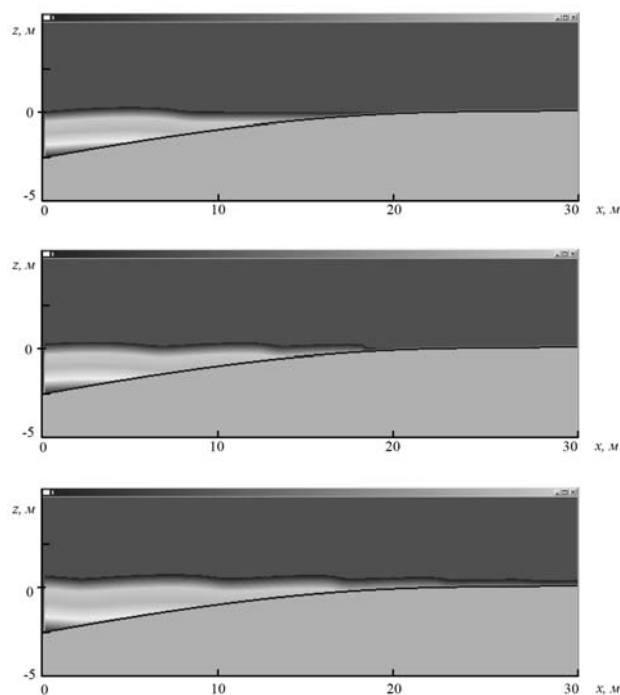


Рис. 1. Последовательные этапы наката поверхностной гравитационной волны, глубина акватории $H=2,5$ м, начальные параметры волны: длина $\lambda=15$ м; скорость $c=4,3$ м/с; амплитуда $a=0,25$ м; $kH=1$; $\varepsilon=0,2$; время (сверху вниз) $t=2,1$ с; $t=5,6$ с; $t=18,6$ с

Из рис. 1 видно, что при непрерывном воздействии поверхностных гравитационных волн происходит полное подтопление протяженной мелководной акватории. Соответственно, с помощью предложенной модели можно прогнозировать воздействие штормовых нагонов и цунами на мелководные акватории Мирового океана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Железняк М.К., Пелиновский Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // «Накат цунами на берег»: Сб. науч. тр. – Горький, 1985. – С. 8-34.
2. Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук Ан.Г., Симонов К.В. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1989. – 168 с.
3. Kawasaki K. Numerical simulation of breaking and post-breaking wave deformation process around a submerged breakwater // Coastal Engineering Journal. – 1999. – Vol. 41, № 3&4. – P. 201-223.
4. Zhao Q., Armfield S., Tanimoto K. Numerical simulation of breaking waves by a multi-scale turbulence model // Coastal Engineering. – 2004. – Vol. 51. – P. 53-80.
5. Аббасов И.Б., Неверов А.А. Численное моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнения мелкой воды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 147-153.
6. Аббасов И.Б. Моделирование нелинейных волновых явлений на поверхности мелководья. – М.: Физматлит, 2010. – 128 с.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. – Т. 2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
8. Harlow F. H. Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. – 1965. – Vol. 8, № 12. – P. 2182-2189.
9. Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е. Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. Я.Е. Ромм.

Аббасов Ифтихар Балакишиевич – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: igkd@egf.tsure.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, ГСП 17А; тел.: 88634371794; кафедра инженерной графики и компьютерного дизайна; к.ф.-м.н.; доцент.

Семёнов Илья Сергеевич – e-mail: vm@egf.tti.sfedu.ru; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; программист.

Царевский Виктор Васильевич – кафедра высшей математики; аспирант.

Abbasov Iftikhar Balakishi – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: igkd@egf.tsure.ru; GSP 17A, 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371794; the department of engineering drawing and computer design; cand. of phis.-math. sc; associate professor.

Semenov Ilya Sergeevich – e-mail: vm@egf.tti.sfedu.ru; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; programmer.

Tsarevskiy Viktor Vasil'evich – the department of higher mathematics; postgraduate student.