

**Zhornik Viktoriya Aleksandrovna** – e-mail: Zhornik\_Victoria@mail.ru; cand. of phys.-math. sc.; associate professor.

**Savochka Petr Anatolievich** – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: Savochka07@mail.ru; GSP 17A, 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371603; assistant.

УДК 531.38

**А.А. Илюхин, С.А. Шретер**

**СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ  
ОБТЕКАНИЯ ПЛАСТИНКИ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ\***

*Построена математическая модель эксперимента по определению параметров аэродинамических сил, действующих на абсолютно твердую пластинку, жестко прикрепленную к упругому стержню. Стержень жестко зашпелен на неподвижном основании. Гибридная система помещена в поток воздуха, который воздействует только на пластинку, стержень изгибается в одной плоскости. Идея используемого в работе метода построения решения задачи состоит в сведении исходного уравнения равновесия Кирхгофа к системе уравнений более низкого порядка с соответствующей функцией гамильтонова типа. Функция Гамильтона в последующем подвергается нормализации в определенном числе членов, что приводит к интегрируемой системе.*

*Гамильтонов подход; преобразование Биркгофа; изгиб стержня; математическая модель; аэродинамические силы.*

**A.A. Ilyukhin, S.A. Shreter**

**THE COMPARATIVE ANALYSIS OF VARIOUS SOLUTIONS  
OF THE PROBLEM FLOW PLATE ON AN ELASTIC ROD**

*The mathematical model of experiment by determination of parameters of the aerodynamic forces operating on absolutely firm plate, rigidly attached to an elastic core is constructed. The core is rigidly jammed on the motionless basis. The hybrid system is placed in a stream of air which influences only a plate, the core is bent in one plane. The idea of a method of construction of the decision of a task used in work consists in data of the initial equation of equilibrium of Kirchhoff to system of the equations of lower order with the corresponding function of Hamilton type. Function of Hamilton in the subsequent is exposed to normalization in a certain number of members that leads to integrated system.*

*Hamiltonian approach; Birkhoff transformation; bending the rod; the mathematical model; the aerodynamic forces.*

**Постановка задачи.** Рассмотрим эксперимент по определению аэродинамических параметров в зависимости от ориентации пластинки на упругом стержне. Механическую систему помещают в набегающий поток воздуха. Нижний конец стержня жестко зашпелен, к его верхнему концу жестко прикреплена абсолютно твердая пластинка. Предполагается, что поток воздействует только на пластинку, изгиб стержня происходит в одной плоскости. Начальное положение стержня определяется заданием угла наклона касательной к оси стержня  $\theta = \psi$  по отношению к скоро-

---

\* Данная статья написана при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А.П. Чехова» по проекту № 1.1885.2011.

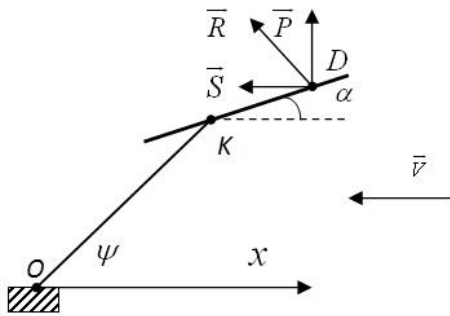


Рис. 1. Постановка задачи

плоскости пластинки. Функции  $s(\alpha)$ ,  $p(\alpha)$  – коэффициенты аэродинамических сил, зависят от формы и размеров пластинки и определяются экспериментально.

Цель работы: построить математическую модель эксперимента по продуву пластинки, закрепленной на упругом стержне, в аэродинамической трубе. Решить уравнение равновесия конструкции, установить зависимость между аэродинамическими силами и углом поворота пластинки (текущим углом атаки пластинки  $\alpha_T$ ).

**Построение математической модели.** К стержню кроме силы  $\vec{R}$  приложен момент:  $M = d(\alpha)V^2(p \cos(\alpha) + s \sin(\alpha))\rho/2$ , где  $d(\alpha)$  – расстояние от центра давления до точки крепления пластинки и стержня. Воспользуемся точным уравнением упругого равновесия при плоском изгибе для первоначально прямого стержня ( $\psi = const$ ) постоянного сечения ( $B = const$ ). Подставив все необходимые проекции, получим уравнение равновесия типа Кирхгофа:

$$B \frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{\rho}{2} s V^2 \sin(\theta) + \frac{\rho}{2} p V^2 \cos(\theta) = 0. \quad (1)$$

Решение уравнения равновесия (1) будем искать с помощью сведения его к системе уравнений гамильтонова типа [1]. Для этого поступим формально: выберем обобщенную координату  $\theta$  (в качестве  $\theta$  возьмем угол  $\theta(l)$  наклона касательной оси стержня к оси  $Ox, Ox \parallel \vec{V}$ ), укажем сопряженный координате импульс  $p_\theta$  и приведем соответствующую такому выбору функцию Гамильтона. Вводя сопряженные переменные  $\theta$  и  $p_\theta = B d\theta/dl$  вместо уравнения равновесия (1) получим систему уравнений:

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{dH}{dp_\theta} = \frac{1}{B} p_\theta; \quad \frac{dp_\theta}{dl} = \frac{dH}{d\theta} = -\frac{1}{2} \rho s V^2 \sin(\theta) - \frac{1}{2} \rho p V^2 \cos(\theta). \quad (2)$$

Если взять функцию Гамильтона  $H$  в виде

$$H = \frac{1}{2B} p_\theta^2 - \frac{1}{2} \rho s V^2 \cos(\theta) + \frac{1}{2} \rho p V^2 \sin(\theta), \quad (3)$$

то уравнения (2) будут уравнениями гамильтонова типа с соответствующей функцией Гамильтона (3). Канонической заменой  $\zeta = \theta + \delta, p_\zeta = p_\theta$ , где  $\cos \delta = p/\sqrt{p^2 + s^2}$ , из системы (2) получим:

$$\frac{d\zeta}{dl} = \frac{p_\zeta}{B}, \quad \frac{dp_\zeta}{dl} - \frac{1}{2} R \sin(\zeta), \quad \text{где } R = \rho V^2 \sqrt{p^2 + s^2}. \quad (4)$$

сти набегающего потока (рис. 1). Силу воздействия  $\vec{R}$  потока на пластинку представим в виде суммы двух векторов:  $\vec{R} = \vec{S} + \vec{P}$ , где  $\vec{S}$  – сила сопротивления;  $\vec{P}$  – подъемная сила ( $\vec{S} \parallel \vec{V}$ ,  $\vec{P} \perp \vec{V}$ ). Для аэродинамических сил возьмем зависимости [5]:  $\vec{S} = s(\alpha)V\vec{V}\rho/2$ ,  $\vec{P} = p(\alpha)V(\vec{i} \times \vec{V})\rho/2$ , где  $\rho$  – плотность воздуха;  $\alpha$  – угол атаки пластинки;  $\vec{i}$  ( $\vec{i} \perp \vec{V}$ ) – единичный вектор, лежащий в

Функция (3) в канонических переменных примет вид

$$H = p_\zeta^2 / 2B - (R \cos(\zeta)) / 2.$$

Система (4) допускает тривиальное решение  $\zeta = 0, p_\zeta = 0$ . Решение, отличное от тривиального, найдем методом нормальных форм [2]. Разложим функцию Гамильтона  $H$  в ряд по степеням канонических переменных  $\zeta, p_\zeta$ , удерживая в разложении члены до четвертого порядка включительно, перейдем к безразмерным величинам и введем комплексно-сопряженные канонические переменные  $p = p_\zeta + i\zeta, q = p_\zeta - i\zeta$ . Необходимо учесть валентность такого преобразования  $\bar{H} = -2iH$ . Здесь  $\bar{H}$  – новая функция Гамильтона:

$$\bar{H} = -i \left[ pq - \frac{1}{96} (p^4 - 4p^3q + 6p^2q^2 - 4pq^3 + q^4) \right]. \quad (5)$$

При отсутствии резонансов в системе (4) функцию Гамильтона  $\bar{H}$  (5) каноническим преобразованием приведем к нормальной форме в членах до четвертого порядка [2]. В качестве канонического преобразования выберем преобразование Биркгофа с порождающей функцией  $S_4$ :

$$p = u + \frac{\partial S_4(u, v)}{\partial v}, q = v - \frac{\partial S_4(u, v)}{\partial u}; S_4 = S_{04}v^4 + S_{13}uv^3 + S_{22}u^2v^2 + S_{31}u^3v + S_{40}u^4.$$

Специальным выбором коэффициентов порождающей функции приводим функцию Гамильтона (5) к нормальному виду в переменных  $u$  и  $v$

$$H_* = -i \left[ uv - \frac{1}{16} u^2 v^2 \right]. \quad (6)$$

Система дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона (6) допускает общий интеграл  $r = uv = const$ , а это позволяет представить ее точное решение в явном виде  $v = (a + ib)e^{iml}, u = (a - ib)e^{-iml}, m = i\partial H_*/\partial(uv) = const$ . Вернувшись к исходным переменным, получим зависимость  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  от дуговой координаты  $l$ :

$$\begin{aligned} p'_\zeta &= \left( a - \frac{(a^2 + b^2)a}{16} \right) \cos(ml) + \left( -b + \frac{(a^2 + b^2)b}{16} \right) \sin(ml) + \\ &+ \frac{a(a^2 - 3b^2) \cos(3ml)}{32} + \frac{b(b^2 - 3a^2) \sin(3ml)}{32}; \\ \zeta' &= \left( -b - \frac{(a^2 + b^2)b}{16} \right) \cos(ml) + \left( -a - \frac{(a^2 + b^2)a}{16} \right) \sin(ml) + \\ &+ \frac{b(b^2 - 3a^2) \cos(3ml)}{96} + \frac{a(a^2 - 3b^2) \sin(3ml)}{96}. \end{aligned}$$

Откуда находим решение поставленной задачи:  $\alpha_\tau = \alpha_0 + \sqrt{2}\zeta'(L) - \delta - \psi$ .

Для определения постоянных интегрирования  $a$  и  $b$  воспользуемся граничными условиями для  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  и получим нелинейную систему уравнений. В том случае, когда  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  заданы в одной точке, для определения  $a$  и  $b$  можно использовать обратное преобразование Биркгофа [4].

**Решение с помощью последовательных итераций.** Если  $p'_\zeta$  и  $\zeta'$  не заданы одновременно в одной точке, необходимо решать нелинейную систему. Ее предлагается решать методом последовательных приближений [4]. Как показали вычисления в этом случае, каждый шаг итерации уточняет значение искомого угла на один

знак после запятой. На рис. 2 приведены формы упругой линии деформированного стержня, просчитанные при разных скоростях набегающего потока. Все вычисления проводились при следующих параметрах стержня и пластинки:  $\rho = 1,293 \text{ кг/м}^3$ ,  $\psi = 45^\circ$ ,  $\alpha_0 = 30^\circ$ ,  $L = 0,3 \text{ м}$ ,  $d = 0,05 \text{ м}$ ,  $B = 11,34 \text{ кг} \cdot \text{м}^3 / \text{с}^2$ .

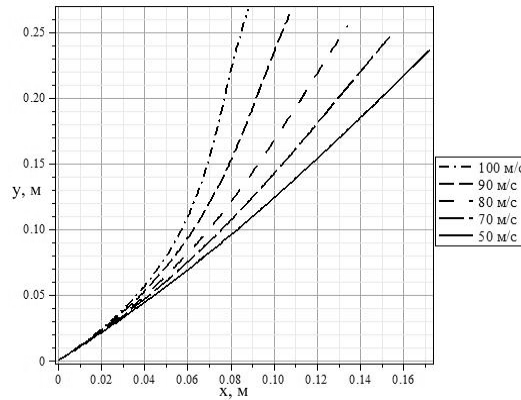


Рис. 2. Упругая линия деформированного стержня при соответствующих скоростях потока

После проведения вычислений было произведено сравнение решений  $\theta = \theta(l)$ , полученных с помощью гамильтонова подхода [4] и с помощью представления решения уравнения (1)  $\theta = \theta(l)$  в виде отрезка ряда по скорости набегающего потока [3]. Все представленные графические зависимости  $\theta = \theta(l)$  были получены при указанных выше параметрах стержня, пластинки и потока. Пластика рассматривалась абсолютно твердая, прямоугольной формы с размерами  $0,1\bar{i} \times 0,3\bar{i}$  (большая сторона расположена вдоль потока). Стержень – стальной, длиной  $L = 0,3\bar{i}$  с прямоугольным сечением  $0,006 \text{ м} \times 0,003 \text{ м}$ , меньшее из ребер сечения направлено вдоль потока. На рис. 3 приведены графики решений  $\theta = \theta(l)$ , полученные при указанных скоростях набегающего потока.

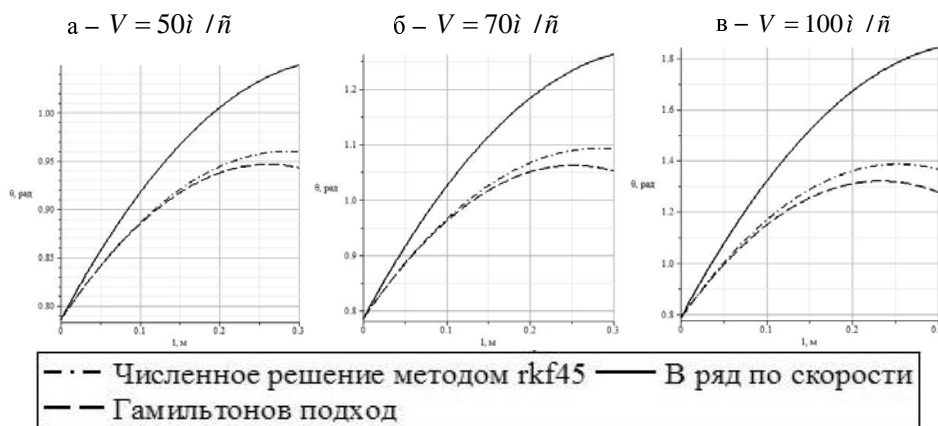


Рис. 3. Сравнение решений  $\theta = \theta(l)$ , полученных разными методами

Для выяснения, какой из приближенных методов адекватнее описывает поведение построенной модели, было проведено численное решение методом gkf45 (Рунге–Кутта–Фельберга 4–5-го порядка). На рис. 3 оно отмечено линией «точка-тире».

**Заключение.** Из проведенных сравнений можно заключить, что гамильтонов подход дает достаточно близкое к «истинному» решение, но при математическом моделировании заставляет каждое решение получать с помощью последовательных итераций, что не всегда удобно для реализации. Второй подход через представление решения в виде отрезка ряда по скорости дает аналитические формулы для всех решений, однако его применение целесообразно лишь при малых скоростях потока.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2002. – 264 с.
2. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев: Наукова думка, 1979. – 216 с.
3. Илюхин А.А., Ступко С.А. Приближенное решение задачи о равновесии пластинки на упругом стержне в потоке воздуха // Механика твердого тела. – Киев: Наукова думка, 2000. – Вып. 30. – С. 242-246.
4. Илюхин А.А., Шретер С.А. Поведение пластинки на упругом стержне в аэродинамическом потоке // Научно-технический вестник Поволжья. – Казань, 2011. – Вып. 6. – С. 43-47.
5. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в соприкасающейся среде. – М.: Изд-во Мос. ун-та, 1986. – 86 с.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н., доцент С.С. Белоконова.

**Илюхин Александр Алексеевич** – Таганрогский государственный педагогический институт им. А.П.Чехова; e-mail: aleilyukhin@yandex.ru; 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: 89043465321; кафедра математического анализа; зав. кафедрой; д.ф.-м.н.; профессор.

**Шретер Сергей Алексеевич** – e-mail: sergshre@yandex.ru; тел.: 89885307372; кафедра математического анализа; аспирант.

**Pyukhin Alexander Alexeyevich** – Anton Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute; e-mail: aleilyukhin@yandex.ru; 48, Initiative street, Taganrog, 347936, Russia; phone: 89043465321; the department of mathematical analysis; head of the department; dr. of phis.-math. sc.; professor.

**Shreter Sergey Alexeyevich** – e-mail: sergshre@yandex.ru; phone: 89885307372; the department of mathematical analysis; postgraduate student.

УДК 004.93; 539.1.08

**А.М. Бакаляров, В.Г. Бондур, М.Д. Каретников, В.И. Лебедев, В.А. Макаров,  
Г.В. Мурадян, А.Б. Мурынин, Г.В. Яковлев**

#### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИСТАНЦИОННОГО ОБНАРУЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ГАММА-КВАНТОВ С ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ**

*В рамках реализации математических методов распознавания образов разработана и проверена программная методика обнаружения источника гамма-квантов с известным спектром, базирующаяся на использовании обучаемых нейронных сетей для разделения спектров, измеренных гамма-спектрометром, на два класса: фон и эффект плюс фон. Проверка осуществлялась с помощью численного моделирования переноса излучения методом Монте-Карло. Были промоделированы реальные условия эксперимента и получен набор спектров, который использовался для обучения многослойного перцептрона. Тестирование*