

Раздел II. Математическое моделирование физических процессов

УДК 532.5.031

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Е.Е. Дегтярева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТА ДОННЫХ ОТЛОЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Рассматривается трехмерная математическая модель транспорта наносов. Предложенная модель учитывает следующие факторы: транспорт взвешенных частиц, переход донного материала во взвешенное состояние и осаждение. Для описания транспорта взвешенных частиц применяется уравнение диффузии–конвекции–реакции. В качестве вертикальной переменной используется безразмерная переменная $\sigma \in [0,1]$. При численной реализации модели был использован метод расщепления по пространственным координатам и физическим процессам. На основе разработанных алгоритмов был построен комплекс программ, предназначенный для расчетов полей скорости движения водной среды и транспорта примеси.

Транспорт веществ; гидродинамика; уравнение диффузии–конвекции.

A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.E. Degtyreva

MATHEMATICAL MODELLING BOTTOM SEDIMENTS TRANSPORT IN VIEW OF HYDRODYNAMIC PROCESSES

This paper proposed the three-dimensional mathematical model of sediment transport. The model takes into account the following factors: transport of suspended particles, suspension and deposition. To describe the transport of suspended particles the equation of convection – reaction is applied. As the vertical variable is used dimensionless variable $\sigma \in [0,1]$. In the numerical implementation of the model we used the method of splitting on the spatial coordinates and the physical processes. The developed algorithms was built a program designed to calculate velocity fields and the aquatic environment of the impurity transport.

Sediment transport; hydrodynamics; diffusion–convection equation.

Введение. Перемещение взвесей и наносов под воздействием течений и волн влияет на состояние берегов и подходных каналов, поэтому научные знания о гидродинамических процессах очень важны в условиях расширения хозяйственной деятельности. Отсутствие учета расхода наносов может привести к авариям, переформированию донной поверхности и уменьшению пропускной способности подходных каналов [1]. Значительная часть наносов перемещается во взвешенном состоянии, поэтому изучение транспорта наносов невозможно без учета транспорта взвесей. Гидролитодинамические процессы береговой зоны изучены в работах С.М. Анцыферова, Р.Д. Косьяна, Н.В. Пыхова [2–5] на основе многочисленных натуральных экспериментов. В данных исследованиях выявлены основные особенности распределения осредненных значений концентрации взвешенных частиц.

Основным фактором взвешивания, перераспределения и транспорта донного материала является комбинированное воздействие волн и течений. Математическое моделирование помогает решать задачи прогнозирования образования наносов в прибрежной зоне моря. С помощью таких моделей можно оценить подвиж-

ность наносов; моделировать переформирование дна под действием волн и течений; моделировать перенос наносов в окрестности сооружений, находящихся на берегу или на некотором расстоянии от него [5].

Когда частица находится во взвешенном состоянии в воде, ее веса недостаточно для осаждения. Поэтому осаждаться могут только хлопья, образованные из частиц или хлопьев и частиц (рис. 1).

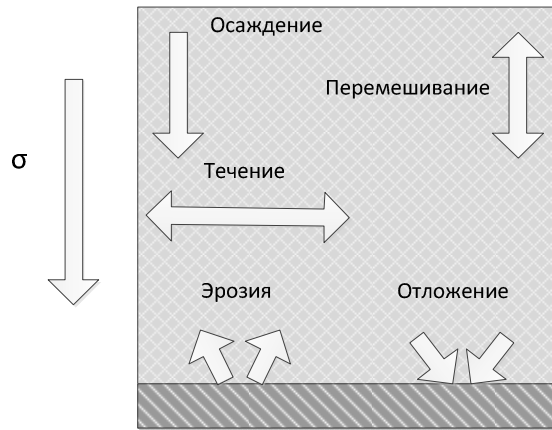


Рис. 1. Графическое представление механизмов горизонтального и вертикального движения взвешенных частиц

Описание модели. Для описания транспорта взвешенных частиц введем систему координат. В модели будем использовать декартовую систему координат в горизонтальной плоскости и σ – координатную систему в вертикальном направлении (рис. 2): $\sigma = \frac{z-\eta}{h+\eta}$, $x_\sigma = x$, $y_\sigma = y$, $t_\sigma = t$, здесь x, y, z , $\sigma = a = 1$ на свободной поверхности, $\sigma = b = -1$ на дне; $H = h + \eta$ – общая глубина до свободной поверхности, $h = h(x, y)$ – глубина водного объекта, $\eta = \eta(t, x, y)$ – возвышение свободной поверхности относительно геоида (уровня моря).

Для описания транспорта взвешенных частиц будем предполагать, что расчетная область Ω вписана в параллелепипед.

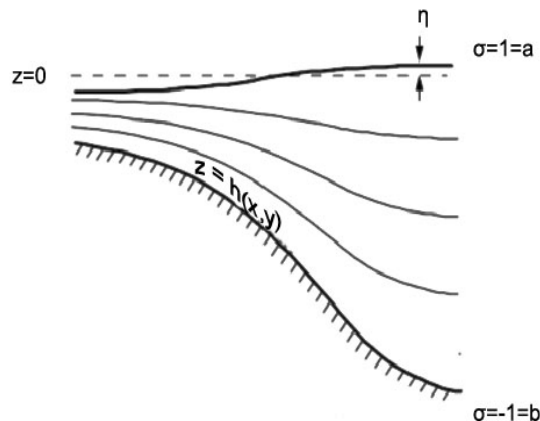


Рис. 2. σ – координатная система

Для описания транспорта взвешенных частиц использовано уравнение диффузии–конвекции–реакции, которое может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{a-b}{H} (\omega - \omega_s) \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left(\frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где C – концентрация осадка [г/л или кг/м³]; $V = \{u, v, w\}$ – составляющие поля вектора скорости [м/с]; ω_s – гидравлическая крупность или скорость осаждения по σ -координате в вертикальном направлении [м/с]; H – глубина [м]; D_h, D_v – горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии [м²/с]; x, y – координаты в горизонтальном направлении; σ – координата в вертикальном направлении; t – временная переменная [с].

Уравнение (1) рассматривается при граничных и начальных условиях. Начальная скорость устанавливается равной нулю, начальный уровень подъема воды, температуры, солености равен средним значениям подъема воды, температуры, солености исследуемого объекта;

– на свободной поверхности поток в вертикальном направлении равен нулю, таким образом:

$$\left(\frac{a-b}{H} \right) D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} + \omega_s C_k = 0, \quad (2)$$

– вблизи поверхности дна:

$$\left(\frac{a-b}{H} \right) D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} = E - D + \omega_s C_k, \quad (3)$$

– на открытых границах:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_n \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

где E – поток эрозии [кг/м²/с]; D – интенсивность осаждения осадка [кг/м²/с]; C_k – массовая концентрация взвеси [масса/объем]; n – единичный вектор нормали к открытой границе Γ_{open} ;

$$D = \begin{cases} 0 & \tau_b > \tau_{кр} \\ \omega_s C_k \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_{кр}} \right) & \tau_b \leq \tau_{кр} \end{cases}; \quad E = \begin{cases} 0 & \tau_e < \tau_{крE} \\ M \left(\frac{\tau_e}{\tau_{крE}} - 1 \right) & \tau_e \geq \tau_{крE} \end{cases},$$

где τ – касательное напряжение сдвига у дна [$H/м^2$]; $\tau_{кр}$ – критическое касательное напряжение у дна, которое оценивается на основе лабораторных испытаний как величина, со значениями от 0,05 до 0,15 [$H/м^2$]; $\tau_{крE}$ – критическое касательное напряжение эрозии, определенное как $\tau_e = 0,015(\rho_b - 1000)^{0,73}$; ρ_b – объемная плотность вещества в диапазоне плотности 1000–2000 [$кг/м^3$]; M – экспериментально-наблюдаемая, постоянная эрозии, со значениями между 0,0002 и 0,002 [$к \cdot H^{-1}с^{-1}$].

Коэффициент вертикального турбулентного обмена, неоднородный по глубине, определяется следующим образом:

$$\nu = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)^2}, \quad (5)$$

где \bar{U}, \bar{V} – осредненные по времени пульсации горизонтальных компонент скорости, Δ – характерный масштаб сетки, C_s – безразмерная эмпирическая константа, значение которой обычно определяется на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности.

Одним из преимуществ данной модели является усовершенствованная параметризация коэффициента турбулентного обмена по вертикали, подобранная исходя из сравнений данных экспериментальных измерений. Следует также отметить, что при описании рельефа дна и изменения геометрии водной поверхности за счет сгонно-нагонных явлений осуществлялся учет частичной «заполненности» ячеек [13–16].

Построение дискретной модели. Для дискретизации поставленной задачи введем равномерную прямоугольную сетку: $\omega = \omega_x \times \omega_y \times \omega_\sigma \times \omega_t$

$$\omega_x : \{x_i = ih_x, i = \overline{0, N_x - 1}, h_x(N_x - 1) = l_x\}, \quad \omega_y : \{y_j = jh_y, j = \overline{0, N_y - 1}, h_y(N_y - 1) = l_y\},$$

$$\omega_\sigma : \{\sigma_k = kh_\sigma, k = \overline{0, N_\sigma - 1}, h_\sigma(N_\sigma - 1) = l_\sigma\}, \quad \omega_t : \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N_t}, \tau N_t = l_t\},$$

где τ – шаг по времени; h_x, h_y, h_σ – шаги по пространству; N_t – количество временных слоев; T – верхняя граница по времени; N_x, N_y, N_σ – количество узлов по пространству; l_x, l_y, l_σ – размеры параллелепипеда по координатным направлениям. Для аппроксимации будем использовать схемы расщепления. Согласно этой схеме на первом этапе осуществляется решение системы трехдиагональных алгебраических уравнений методом прогонки в одном из направлений, в результате чего находятся значения искомой функции на промежуточном $(n + 1/2)$ -м временном слое. На втором этапе находится искомое решение на верхнем $(n+1)$ -м временном слое. Такая схема имеет первый порядок по времени, но стационарное решение не зависит от величины временного шага.

Результаты численного эксперимента. Из результатов проведенного численного эксперимента (рис. 3) видна картина поля течения водной среды при обтекании искусственного препятствия (волнореза).

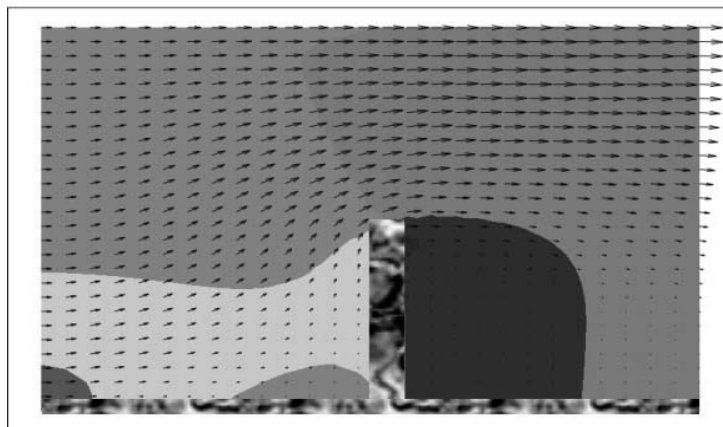


Рис. 3. Поле распределения давления от источника в момент времени t без учета концентрации и турбулентного обмена

Ниже приведены результаты численного моделирования транспорта веществ при обтекании водной средой волнореза. В данном эксперименте источник веществ задается точечной функцией и поле загрязняющих веществ задавалось нулевой функцией.

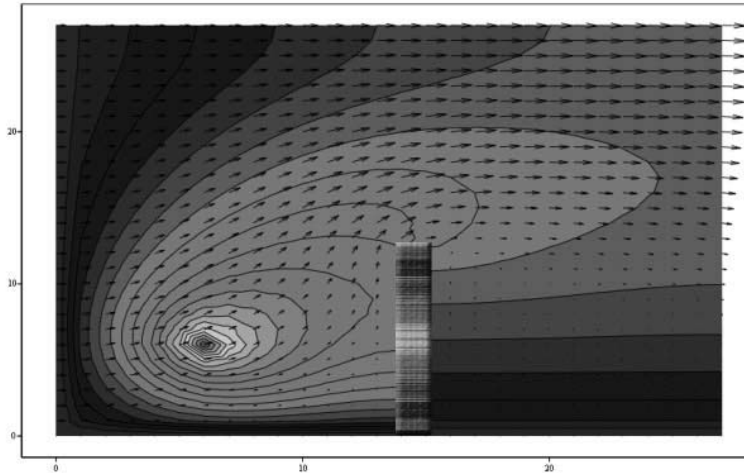


Рис. 4. Поле концентрации от источника в момент времени t

Из рис. 4 видно, как изменится поле концентрации веществ через заданное время t . Функция концентрации веществ показана палитрой.

Выводы. В работе построена математическая модель транспорта донного взвешенного материала, учитывающая следующие физические процессы: подъем взвесей со дна, конвективно-диффузионный перенос, а также осаждение донного материала. Для описания движения водной среды использованы модели гидродинамики, описываемые уравнением Навье–Стокса [8–11]. Следует также отметить, что при построении дискретной модели использовались разностные схемы [6], а при решении сеточных уравнений – эффективный метод решений сточных уравнений (адаптивный МПТМ) [12]. К достоинствам разработанной модели также можно отнести высокую точность, которая достигается за счет учета степени «заполненности» контрольных ячеек.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сухинов А.И. Прецизионные модели гидродинамики и опыт применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море // Известия ТРТУ. – 2006. – № 3 (58). – С. 228-235.
2. Анцыферов С.М., Дебольский В.К., Аквис Т.М. О влиянии состояния дна на формирование потока несвязных наносов // Водные ресурсы. – М.: Наука, 2004. – Т. 31, № 6. – С. 675-682.
3. Динамические процессы береговой зоны моря / Под ред. Р.Д. Косьяна, И.С. Подымова, Н.В. Пыхова. – М.: Научный мир, 2003. – 320 с.
4. Дегтярева Е.Е., Чистяков А.Е. Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 2 (127). – С. 112-118.
5. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13. – С. 290-297.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.

7. *Заковоротнова Е.Е.* Выбор модели транспорта наносов в мелководном водоеме // Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики. – СПб.: Российская академия наук, 2010. – С. 284-286.
8. *Алексеевко Е.В., Сидоренко Б.В., Колгунова О.В., Чистяков А.Е.* Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 6-18.
9. *Лалин Д.В., Черчаго А.А., Чистяков А.Е.* Совместные экспедиционные исследования гидрофизических параметров Азовского моря на многоцелевой яхте «Буревестник» и НИС т/х «Платов» // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 82-89.
10. *Чистяков А.Е.* Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75-82.
11. *Чистяков А.Е., Алексеевко Е.В., Колгунова О.В.* Вычислительные эксперименты с математическими моделями турбулентного обмена в мелководных водоемах // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 10 (87). – С. 171-175.
12. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.
13. *Чистяков А.Е.* Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.
14. *Сушинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.
15. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 32-44.
16. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 159-167.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. Г.В. Куповых.

Сушинов Александр Иванович – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: sukhinov@gmail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, ГСП 17А; тел.: 88634310599; руководитель ТТИ ЮФУ.

Чистяков Александр Евгеньевич – e-mail: cheese_05@mail.ru; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

Дегтярева Екатерина Евгеньевна – e-mail: katerina.degtyareva@gmail.com; тел.: 89045069696; кафедра высшей математики; аспирантка.

Sukhinov Alexander Ivanovich – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: sukhinov@gmail.ru; GSP 17A, 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: 88634310599; head the TIT SFedU.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – e-mail: cheese_05@mail.ru; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; cand. of phis.-math. sc. associate professor.

Degtyareva Ekaterina Evgenevna – e-mail: katerina.degtyareva@gmail.com; phone: 89045069696; the department of higher mathematics; postgraduate student.