Раздел II. Математические модели и методы

УДК 681.324

В.А. Павский, К.В. Павский, В.Г. Хорошевский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ СО СТРУКТУРНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ*

При анализе надежности живучих (восстанавливаемых) вычислительных систем (ВС) возникают трудности, связанные и с практической невозможностью получать аналитические формулы для показателей эффективности и их разумных оценок, зависящих от времени, и с отсутствием, для современных действующих и проектируемых ВС, достоверной статистики. Поэтому при построении математических моделей желательно минимизировать число параметров, зависящих от проблемной статистики.

В работе распределенные вычислительные системы рассматриваются как стохастический объект. Построена математическая модель функционирования ВС со структурной избыточностью и предложен подход к получению аналитической зависимости показателей надежности, характеризующих надежность ВС живучих и со структурной избыточностью, как в момент времени, так и на временном промежутке. Предложенные решения представлены в аналитическом виде.

Распределенные вычислительные системы; структурная избыточность; анализ; надежность; живучесть.

V.A. Pavsky, K.V. Pavsky, V.G. Khoroshevskiy

MATHEMATICAL MODEL AND OF INDICES CALCULATION OF COMPUTER SYSTEMS FUNCTIONING WITH STRUCTURAL REDUNDANCY

At poor authentic statistics for modern operating and projected computer systems (CS) it is hard to obtain analytical formulas (of robustness distributed CS analysis) and acceptable estimates for time-dependent indices of distributed CS functioning. So it is desirable to minimize the number of parameters (problem statistic dependent) for creating mathematical models.

Distributed computer systems are considered as complex stochastic objects. Mathematical model of distributed computer systems functioning with structural redundancy (SR) and approach for analytical dependence calculation of CS reliability are proposed. These indices characterize reliability of CS with structural redundancy and robustness systems, both at the moment of time, and on a temporary interval. Obtained solutions are presented in analytical form.

Distributed computer systems; structural redundancy; analysis; reliability; robustness.

Введение. Современные ВС требуют создания сложных многопараметрических моделей, а это приводит к тому, что оценка меры адекватности модели становится трудновыполнимой. Построение простых моделей приводит, скорее, к качественным оценкам функционирования систем, чем к количественным. Следовательно, создание простых и эффективных математических моделей с параметрами,

* Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант № НШ-2175.2012.9), РФФИ (гранты №№ 10-07-00157, 12-07-00145-а) и в рамках государственного контракта № 07.514.11.4015 с Минобрнауки РФ.

имеющими качественную или достоверную, потенциально возможную статистику, является актуальным.

Предлагается подход к получению аналитической зависимости показателей надежности, характеризующих надежность ВС живучих и со структурной избыточностью, как в момент времени, так и на временном промежутке.

Большемасштабные ВС, состоящие из достаточно высоконадежных элементарных машин (ЭМ) и имеющие структурную избыточность, при относительно быстрой замене отказавших ЭМ машинами из структурной избыточности, позволяют поддерживать необходимую производительность в течение длительного промежутка времени. Это означает, что до тех пор пока множество ЭМ, составляющих структурную избыточность, не пусто, считается, что ВС имеет высокую производительность, иначе она переходит в состояние низкой производительности. Это условие позволяет получить дополнительную информацию относительно времени нахождения ВС в состоянии высокой производительности и, не усложняя модели, дать рекомендации относительно ее эффективной работы.

Математическая модель. Имеется ВС, состоящая из N ЭМ, n из которых составляют структурную избыточность, а $N-n$ – основную подсистему. Время работы каждой ЭМ является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону с параметром λ – интенсивностью выхода ЭМ из строя. Вышедшая из строя ЭМ основной подсистемы заменяется на ЭМ из структурной избыточности, а сама попадает в восстанавливающую систему (ВУ). Если для очередной отказавшей ЭМ основной подсистемы замены нет, то ВС переходит из высокопроизводительной в низкопроизводительную. Время восстановления является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону с параметром μ – интенсивностью восстановления. Предполагается, что, независимо от числа ЭМ, находящихся в ВУ, среднее время восстановления любого числа k, $k \le n$, ЭМ, находящихся на восстановлении, $t_{cp} = 1/\mu$.

Пусть функционирование ВС происходит достаточно длительное время и $n << N$. Это позволяет нам считать, что поток отказов ЭМ подчинен экспоненциальному закону с параметром $N \cdot \lambda$ [2].

Требуется вычислить $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t структурная избыточность состоит из $(n-k)$ ЭМ, $t \in [0, \infty)$, $k = 0,1,...,n$.

Система дифференциальных уравнений для вероятностей $P_k(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} P_0'(t) = -N \cdot \lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} P_k(t), \\ P_k'(t) = -(N \cdot \lambda + \mu) P_k(t) + \mu \cdot P_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, ..., n-1, \\ P_n'(t) = -\mu \cdot P_n(t) + N \cdot \lambda \cdot P_{n-1}(t), \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями $P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0$ и условием нормировки, являющимся следствием формулировки модели

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1, \; \forall t \in [0, \infty).$$

Решение системы (1) в переходном режиме аналогично решению, приведенному в работе [3].

Так как ВС функционирует достаточно долго, то для вероятностей $P_k(t)$ достаточно иметь решение для стационарного режима

$$p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t),$$

тогда решение системы (1) имеет вид

$$p_0 = \frac{\mu}{N\cdot\lambda+\mu},\ p_k = \frac{\mu\cdot(N\cdot\lambda)^k}{(N\cdot\lambda+\mu)^{k+1}},\ p_n = \left(\frac{N\cdot\lambda}{N\cdot\lambda+\mu}\right)^n. \tag{2}$$

Учитывая (2) и формулировку модели, вероятность отказа ВС равна

$$p_{отк} = \left(\frac{N\cdot\lambda}{\mu+N\cdot\lambda}\right)^n. \tag{3}$$

Зададим доверительную вероятность γ того, что ВС находится в состоянии высокой производительности, тогда

$$1-\gamma = \left(\frac{N\cdot\lambda}{\mu+N\cdot\lambda}\right)^n. \tag{4}$$

Логарифмируя (4), находим

$$k_{cp} = \left[\frac{\ln(1-\gamma)}{\ln N\lambda - \ln(N\cdot\lambda+\mu)}\right]+1,$$

где k_{cp} – среднее число ЭМ, составляющих структурную избыточность, $[x]$ – целая часть числа x.

Зависимость среднего числа ЭМ структурной избыточности от числа ЭМ в ВС $N=10^3;\ 10^4$, $\lambda=10^{-3};\ 10^{-4}$ 1/ч, $\mu=2$ 1/ч и $1-\gamma=0{,}01;\ 0{,}05$ представлена в табл. 1, 2.

Таблица 1

$1-\gamma=0{,}01$

λ \ N	10^3	10^4	10^5
10^{-3}	4	25	232
10^{-4}	1	4	25

Таблица 2

$1-\gamma=0{,}05$

λ \ N	10^3	10^4	10^5
10^{-3}	2	16	151
10^{-4}	0	2	16

Из таблиц следует, что при числе ЭМ в ВС $<10^5$ структурная избыточность не превышает 0,15 % от общего числа ЭМ в ВС и указанной надежности.

Как уже отмечалось, многомашинные ВС, в силу своего предназначения, не могут находиться в состоянии отказа. Именно поэтому при их функционировании в состоянии низкой производительности продолжает работу восстанавливающая система, на которую, очевидно, имеется очередь на восстановление отказавших ЭМ. Ясно, что как только очередь исчезает, так сразу ВС можно считать вошедшей в состояние высокой производительности.

Пусть ξ – случайная величина, описывающая время восстановления элементарных машин в восстанавливающей системе. Пусть $F(\tau)=P\{\xi>\tau\}$ – вероятность того, что ВС в состоянии низкой производительности останется в течение времени не менее чем τ, $\tau\in[0,\infty)$.

Так как в модели рассматривается стационарный режим функционирования ВС, то $P\{\xi = 0\} = p_{отк}$ (в точке $\tau = 0$ $F(0)$ имеет разрыв). Учитывая, что все потоки простейшие, вероятность того, что за время τ откажут k ЭМ, равна

$$V_k(\tau) = \frac{(N\lambda\tau)^k}{k!} \cdot \exp(-N\lambda\tau) .$$

Таким образом, имеем одноканальную систему массового обслуживания $M/M/1$, глубоко исследованную многими авторами [2, 4], из которой следует, что

$$F(\tau) = \left(\frac{N\lambda}{\mu + N\lambda} \right)^n e^{-(\mu - N\lambda)\tau} . \quad (5)$$

На рис. 1 показана зависимость функции $F(\tau)$ от времени τ при $N = 10^3$, $\lambda = 10^{-3}$ 1/ч, $\mu = 2; 3$ 1/ч, $n = 1, 2$. Из рис. 1 следует, что при $n \geq 2$ результаты хорошо согласуются с ранее полученными в табл. 1, 2.

Эффективность функции $F(\tau)$ в рамках предложенной модели не только в простоте вычислений, но и в параметрах n и μ, позволяющих оценить не только качественную, но и дать количественную оценку функционирования ВС живучих и со структурной избыточностью, избегая при этом громоздких, хотя, может быть, более точных формул, значение которых, скорее всего, находится численными методами. Например, если задать $\mu = \mu(\lambda)$, т.е. расширить возможности восстанавливающей системы, то можно показать, насколько существенно уменьшается время выхода ВС из состояния низкой производительности.

В самом деле, вернемся к формуле (5). При увеличении n вероятность входа ВС в состояние низкой производительности уменьшается. С другой стороны, если она в него вошла, то время выхода ВС из этого состояния будет зависеть от величины $\mu - N\lambda$ и не зависеть от n, т.е. в этом случае модель бессильна.

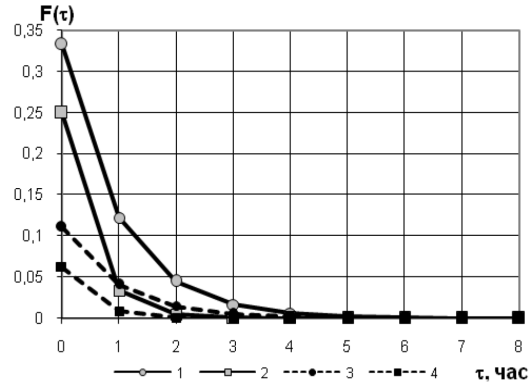

Рис. 1. Зависимость функции $F(\tau)$ от времени τ при $N = 10^3$, $\lambda = 10^{-3}$ 1/ч: 1 – $\mu = 2$ 1/ч, $n = 1$; 2 – $\mu = 3$ 1/ч, $n = 1$; 3 – $\mu = 2$ 1/ч, $n = 2$; 4 – $\mu = 2$ 1/ч, $n = 2$

Попробуем извлечь пользу из второго сомножителя правой части формулы (5). Пусть а – событие, состоящее в том, что ВС войдет в состояние низкой производительности, тогда $P\{A\} = p_{отк}$. Рассмотрим условную вероятность $P\{\xi < \tau / A\}$. По определению

$$P\{\xi > \tau / A\} = \frac{P\{A \cap (\xi > \tau)\}}{P\{A)\}}.$$

Но $P\{A \cap (\xi < \tau)\} = F(\tau)$, тогда

$$P\{A \cap (\xi < \tau)\} = \exp(-(\mu - N\lambda)\tau). \qquad (6)$$

Пусть $\Delta = \mu - N\lambda$, $\Delta > 0$. Из формулы (3) следует, что для повышения эффективности функционирования ВС следует увеличить n. Из (5) и (6) следует, что при фиксированном n и больших Δ вероятность выхода ВС из состояния низкой производительности велика при малом τ.

Если n фиксировано и Δ мало, то из (6) следует, что необходимо увеличить Δ, что можно сделать за счет увеличения μ. Реально это означает повышение производительности восстанавливающей системы.

То же самое справедливо и для $\Delta = \mu - N\lambda < 0$.

Заключение. Наглядность модели и простота полученных формул позволяет использовать их при экспресс-анализе надежности распределенных ВС.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хорошевский В.Г.* Архитектура вычислительных систем. – М.: МГТУ им. Баумана, 2008. – 520 с.
2. *Кокс Д. Р.* Теория восстановления / Кокс Д.Р, Смит В.Л.; Под ред. Ю.К. Беляева. – М.: Сов. радио, 1967. – 312 с.
3. *Павский В.А.* Расчет показателей эффективности решения задач потока с отказами на распределенных вычислительных системах / В.А. Павский, К.В. Павский // Материалы Международной научно-технической конференции «Многопроцессорные вычислительные и управляющие системы». Т.2. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – С. 65-67.
4. *Гнеденко Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: ЭДИТОРИАЛ УРСС, 2005. – 400 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.М. Белевцев.

Хорошевский Виктор Гаврилович – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН»; e-mail: khor@isp.nsc.ru; 630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 13; тел.: 83833332171; 83833305626; заведующий лабораторией; д.т.н.; профессор; член-корреспондент РАН.

Павский Кирилл Валерьевич – e-mail: pkv@isp.nsc.ru; лаборатория ВС; научный сотрудник; к.т.н.

Павский Валерий Алексеевич – Кемеровский технологический институт пищевой промышленности; e-mail: pavvm@kemtipp.ru; 650056, г. Кемерово, б-р Строителей, 47; тел.: 83842734200; кафедра высшей математики; зав. кафедрой; д.т.н.; профессор.

Khoroshevsky Victor Gavrilovich – A.V. Rzhanov institute of semiconductor physics of Siberian branch of the RAS; e-mail: khor@isp.nsc.ru; 13, Ak/ Lavrentieva av., Novosibirsk, 630090, Russia; phones: +73833332171; +73833305626; head of laboratory; dr. of eng. sc.; professor; corresponding member of Russian academy of sciences.

Pavsky Kirill Valerievich – e-mail: pkv@isp.nsc.ru; researcher; can. of eng. sc.

Pavsky Valery Alexeevich – Kemerovo institute of technology of the food-processing industry; e-mail: pavvm@kemtipp.ru; 47, Stroiteley bulvar, Kemerovo, 650056, Russia; phone: +73842734200; head of chair of high mathematics; dr. of eng. sc.; professor.